



全国硕士研究生农学门类入学考试辅导丛书

2020

数 学

复习指南暨习题解析

王来生 主编

面向农学门类 名校名师编审
融通主流教材 精讲重点考点
解析习题试题 轻松复习应考



中国农业大学出版社

ZHONGGUONONGYEDAXUE CHUBANSHE



全国硕士研究生农学门类入学考试辅导丛书

2020

数 学

复习指南暨习题解析

王来生 主编

面向农学门类 名校名师编审
融通主流教材 精讲重点考点
解析习题试题 轻松复习应考



中国农业大学出版社

ZHONGGUONONGYEDAXUE CHUBANSHE

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

数学复习指南暨习题解析. 2020/王来生主编. —北京:中国农业大学出版社, 2019. 8
ISBN 978-7-5655-2253-6

I. ①数… II. ①王… III. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 173929 号

书 名 数学复习指南暨习题解析(2020)

作 者 王来生 主编

策划编辑 席清 丛晓红 张蕊

责任编辑 洪重光

封面设计 郑川

出版发行 中国农业大学出版社

社 址 北京市海淀区学清路甲 38 号

邮政编码 100083

电 话 发行部 010-62733489, 1190

读者服务部 010-62732336

编辑部 010-62732617, 2618

出 版 部 010-62733440

网 址 <http://www.caupress.cn>

e-mail cbsszs@cau.edu.cn

经 销 新华书店

印 刷 北京鑫丰华彩印有限公司

版 次 2019 年 8 月第 1 版 2019 年 8 月第 1 次印刷

规 格 787×1092 16 开本 26.5 印张 660 千字

定 价 69.00 元

封面图片出处: © IMAGEMORE Co., Ltd.

读者反馈邮箱 zhangrui973@126.com

图书如有质量问题本社发行部负责调换

出版说明

最新版“全国硕士研究生农学门类入学考试辅导丛书”如期和广大考生见面了。本版辅导丛书是以教育部最新考试大纲为依据,分析往年农学门类联考试题及考试情况,征询有关权威专家的意见和建议,充分吸纳各有关高校辅导老师的教学经验,以前11版为基础,经过必要的扩充和修改而成的。

本丛书包括“复习指南暨习题解析”和“历年真题与全真模拟题解析”两个系列,根据考生复习备考的通常做法,按照基础知识的复习、知识的梳理与归纳以及冲刺模拟训练等不同阶段分别组织编写而成。

“复习指南暨习题解析”系列辅导书,主要是依据考纲对知识点进行全面阐述和总结梳理,按照数学(含高等数学、线性代数、概率论与数理统计)、化学(含无机及分析化学、有机化学)、动物生理学、植物生理学、生物化学5个科目分别组织编写和出版。其中,对重点难点进行详细的剖析,对疑点作了详尽的解释;对考点、要点、重要公式和结论也都一一总结和梳理;对例题进行详解,每个步骤做到详细、不缺步跳步,便于考生理解和熟悉解题思路;每章节后还附有一定量的习题,对复习内容及时进行训练和巩固。

“历年真题与全真模拟题解析”系列辅导书,是考生在冲刺阶段的复习用书,采取历年真题加模拟题的训练和解析的模式编写。真题部分包含了2008—2018年11年统考试题,其中包含了诸多有价值的信息,例如出题角度、试题题型、内容的涵盖面以及出题规律等。考生可以通过这部分的演练进一步掌握命题规律,查缺补漏,了解考研试题的解答方式、得分点以及解题的技巧,达到“观千剑而后识器”的目的。模拟题针对考生在复习阶段出现的问题,从考研热考内容和重点题型中多角度设计题目,旨在冲刺阶段进行考前摸底与练兵,增强考生在应试中的变通能力。

为了编好这套书,我们邀请了学术水平高、治学严谨、经验丰富、权威性强的知名专家学者担任主编,编写队伍汇聚了教育部直属的5所国家重点农林高校和多所省属重点高校常年从事相关学科教学的骨干教师和考研辅导专家,其中大多是往年负责或参加研究生考试命题和阅卷工作的老师。各位编写人员本着为考生着想、对教学负责的态度,牺牲了大量休息时间,反复斟酌拿捏内容的广度和深度,把握例题、习题和模拟题的代表性,尽心尽力从考生的角度去组织内容和体系。这种高度的责任心和奉献精神使我们深受感动,在此向他们表示诚挚的感谢和崇高的敬意!

自该套丛书出版发行以来,受到农学门类考生的格外青睐。这既是在全国范围内率先正式出版发行、最系统全面的农学门类考研辅导书,同时也是目前权威性高、适用性广、实用性强的考研宝典。我们真诚地希望考生能通过这套丛书的学习和引导,熟悉各科考试大纲,温习贯

通考试内容,巩固和掌握所学知识,提高解题能力和应试技巧。同时,希望本丛书也能成为大学生在校学习有关课程的好帮手、好伙伴。

尽管我们本着帮助考生更好地系统复习和备考的良好愿望,尽力组织编写好和出版好这套书,但仍不免有疏漏之处,恳请各位同学及老师们批评指正,以利于我们今后不断地改进和提高。

最后,预祝各位考生取得好成绩!

中国农业大学出版社

2019年8月

前 言

本书是专门针对农学门类硕士研究生考试而编写的辅导书。为了方便考生的复习和应考,在总结分析历年联考试题以及部分院校有关课程教学大纲的基础上,中国农业大学、南京农业大学、山东农业大学和山西农业大学联合编写了这本数学考研复习指导书。参加编写的老师大多是往年在本校负责研究生考试命题工作的老师。

全书分三篇。第一篇为高等数学,内容分别为函数、极限、连续,一元函数微分学,一元函数积分学,多元函数微分学和常微分方程。第二篇是线性代数,内容为行列式,矩阵,向量,线性方程组,矩阵的特征值和特征向量。第三篇是概率论与数理统计,内容为随机事件与概率,随机变量及其分布,二维随机变量及其分布,随机变量的数字特征,大数定律、中心极限定理,数理统计的基本概念。

本书的主要特点是:依据农学门类数学教学基本要求,精选出具有启发性、典型性和针对性的题目,许多典型例题都选自考研真题,通过对这些题目的分析解答,帮助读者掌握基本知识点和提高综合解题能力。

根据农学门类数学的考试需要,作者团队对今年的部分试题进行增补与删减。2019年修订量达到30%。

每一章首先给出考研大纲中的考试内容和考试要求以及本章的重点。每一章根据知识点分类总结,给出基本概念、定义、重要定理与常用公式,方便学生的学习。在典型例题的选择上,相当一部分典型例题综合性较强并具有一定的深度。对于典型例题中难度较大的题,先给出解题思路分析,然后给出正式解答,有的题最后还加以评注;目的是帮助学生正确理解和掌握基本的数学概念、理论和方法,开拓思维模式,培养学生综合分析问题和解决问题的能力。每章后面附有练习题,使学生及时了解本章的学习情况。书后附四套模拟试题,供同学复习时参考。

根据几年来的考研实际情况,为了更好地帮助考生复习,我们还同时配套编写了《数学历年真题与全真模拟题解析》一书,供广大农学门类考生考研冲刺使用。

本书的编写分工如下:

第一篇,高等数学:王来生(第一章),周志坚(第二章),介跃建(第三章),陈静(第四章),崔克俭(第五章);

第二篇,线性代数:曾善玉(第六、七、八章),王云诚(第九章),张良云(第十章);

第三篇,概率论与数理统计:徐义田(第十一、十二、十三章),杨丽明(第十四、十五章),崔克俭(第十六章)。

全书由王来生教授总体设计并统稿。

由于编写人员水平所限,书中疏漏之处在所难免,敬请读者指正。

编 者

2019年8月

目 录

第一篇 高等数学

第一章 函数、极限、连续	3
一、函数的定义与性质	3
二、数列与函数的极限	7
三、极限运算法则、无穷小与无穷大	9
四、极限存在法则、未定式的极限	13
五、函数的连续性	20
六、极限计算中的其他典型例题	25
练习题	30
练习题答案	32
第二章 一元函数微分学	37
一、导数的概念与性质	37
二、导数的计算	44
三、高阶导数	50
四、微分	52
五、综合例题	53
六、微分中值定理	57
七、洛必达法则	63
八、函数的单调性与曲线的凹凸性	63
九、利用导数研究函数的极值与最值	70
练习题	75
练习题答案	78
第三章 一元函数积分学	82
一、原函数的概念,不定积分的定义和性质	82
二、不定积分的计算	83
三、定积分的概念、几何意义、性质,变上限定积分	96
四、定积分的计算	97
五、证明题	101
六、定积分的应用	107
练习题	110
练习题答案	112
第四章 多元函数微积分学	115
一、多元函数的概念、极限、连续	115

二、多元函数的偏导数及全微分	117
三、多元复合函数的求导法则	121
四、多元函数的极值及应用	129
练习题	135
练习题答案	137
五、二重积分	142
练习题	157
练习题答案	160
第五章 常微分方程	164
一、微分方程的基本概念与可解类型	164
二、一阶微分方程的应用	171
练习题	175
练习题答案	177

第二篇 线性代数

第六章 行列式	185
一、行列式的定义	185
二、行列式的性质	186
三、行列式的计算	188
练习题	195
练习题答案	197
第七章 矩阵	204
一、矩阵及其运算	204
二、可逆矩阵	211
三、矩阵的初等变换	214
四、矩阵的秩	216
练习题	217
练习题答案	219
第八章 向量	224
一、向量及其运算	224
二、向量组的线性相关性	225
三、向量组的极大线性无关组与向量组的秩	231
练习题	233
练习题答案	235
第九章 线性方程组	240
一、线性方程组	240
二、典型题型	242
练习题	247
练习题答案	250

第十章	矩阵的特征值和特征向量	254
	一、特征值和特征向量	254
	二、实对称矩阵的对角化	258
	练习题	263
	练习题答案	266
第三篇 概率论与数理统计		
第十一章	随机事件与概率	273
	一、随机事件的描述及其关系运算	273
	二、事件的频率与概率	275
	三、条件概率、乘法公式、事件的独立性	277
	四、全概率公式与贝叶斯公式	279
	五、本章应注意的几个问题	281
	练习题	282
	练习题答案	284
第十二章	随机变量及其分布	289
	一、随机变量及其概率分布	289
	二、常见随机变量的分布	294
	三、随机变量函数的分布	298
	四、本章应注意的几个问题	301
	练习题	301
	练习题答案	305
第十三章	二维随机变量及其分布	309
	一、二维随机变量的联合分布	309
	二、二维随机变量的边缘分布及独立性	311
	三、二维随机变量函数的分布	314
	四、常见二维随机变量的分布	317
	五、本章应注意的几个问题	320
	练习题	321
	练习题答案	323
第十四章	随机变量的数字特征	328
	一、随机变量的数学期望	328
	二、随机变量的方差、协方差和相关系数	341
	练习题	359
	练习题答案	361
第十五章	大数定律、中心极限定理	366
	一、切比雪夫不等式	366
	二、几个常用的大数定律	366
	三、几个常用的中心极限定理	367

练习题.....	372
练习题答案.....	374
第十六章 数理统计的基本概念	378
一、样本及其数字特征	378
二、常用统计量的分布	379
三、正态总体的抽样分布	381
练习题.....	386
练习题答案.....	388
附录 模拟试题	391
模拟试题一.....	391
模拟试题一答案.....	392
模拟试题二.....	395
模拟试题二答案.....	397
模拟试题三.....	400
模拟试题三答案.....	403
模拟试题四.....	407
模拟试题四答案.....	409

第一篇 高等数学

- ◆ 第一章 函数、极限、连续
- ◆ 第二章 一元函数微分学
- ◆ 第三章 一元函数积分学
- ◆ 第四章 多元函数微积分学
- ◆ 第五章 常微分方程

第一章 函数、极限、连续

考试内容

函数的概念及表示法;函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性;复合函数、反函数、分段函数和隐函数;基本初等函数的性质及其图形;初等函数函数关系的建立;数列极限与函数极限的定义及其性质;函数的左极限与右极限;无穷小量和无穷大量的概念及其关系;无穷小量的性质及无穷小量的比较;极限的四则运算;极限存在的两个准则;单调有界准则和夹逼准则;两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

函数连续的概念;函数间断点的类型;初等函数的连续性;闭区间上连续函数的性质。

考试要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题中的函数关系。
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性。
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念。
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念。
5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限和右极限)的概念。
6. 了解极限的性质与极限存在的两个准则,掌握极限四则运算法则,掌握利用两个重要极限求极限的方法。
7. 理解无穷小量的概念和基本性质,掌握无穷小量的比较方法,了解无穷大量和无穷小量的概念及其关系。
8. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型。
9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质。

本章重点

求极限或给定极限值确定式中的常数;利用洛必达法则求七种未定式的极限;讨论函数的连续性;判断间断点的类型;无穷小的比较;利用极限存在准则和两个重要极限求极限;方程在给定区间内有无实根;分段函数在分界点处的极限与连续;闭区间上连续函数的性质。

一、函数的定义与性质

1. 函数的概念

如果变量 x 在数集 D 中任取一个值,变量 y 按某个对应法则 f 总有唯一确定的值与它对

应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x), x \in D$ 。其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域,集合 $W=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域。

2. 函数的特性

(1)函数的有界性 若存在 $M > 0$,使得 $|f(x)| \leq M$ 对于任一 $x \in D$ 都成立,则称 $f(x)$ 在 D 上有界,也称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数,否则称为无界。

(2)函数的单调性 设 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义, x_1, x_2 为 (a, b) 内任意两点,当 $x_1 < x_2$ 时,总有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内为单调增加的函数;当 $x_1 < x_2$ 时,总有 $f(x_1) > f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内为单调减少的函数。单调增加和单调减少的函数统称为单调函数。

(3)函数的奇偶性 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对于任一 $x \in D$,有 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 是偶函数;若 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 是奇函数。偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于坐标原点对称。

(4)函数的周期性 若存在一个非零常数 T ,使得函数 $y=f(x)$ 在其定义域内有 $f(x+T) = f(x)$ 成立,则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期。

3. 复合函数与初等函数

(1)反函数 设函数 $y=f(x), x \in D$ 的值域为 W ,且 x 与 y 是一一对应的,对任何 $y \in W$,按照对应法则 f^{-1} 总有唯一确定的 x 与之对应,称函数 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数, $y=f(x)$ 又称为直接函数。习惯上用 y 表示函数,所以反函数可写成 $y=f^{-1}(x), x \in W$ 。它们的图形关于 $y=x$ 对称。

(2)基本初等函数 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数。

(3)复合函数 设函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_f ,而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z_φ ,若 $D_f \cap Z_\varphi \neq \Phi$,则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数。

(4)隐函数 设二元方程为 $F(x, y) = 0$,如果对任意的 $x \in D$,总有满足上述方程的 y 与之对应,则称 y 是 x (由方程 $F(x, y) = 0$ 确定)的隐函数。

(5)初等函数 由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成的并能用一个式子表示的函数称为初等函数。

例 1 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \log_{(x-1)}(16-x^2)$$

$$(2) y = \arcsin \frac{2x-1}{7} + \frac{\sqrt{2x-x^2}}{\ln(2x-1)}$$

$$\text{解} \quad (1) \text{ 要使函数有定义,则有 } \begin{cases} 16-x^2 > 0 \\ x-1 > 0 \\ x-1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 < x < 4 \\ 1 < x \\ x \neq 2 \end{cases}$$

所以所求定义域为 $(1, 2) \cup (2, 4)$ 。

$$(2) \text{ 由题意可知 } \begin{cases} \left| \frac{2x-1}{7} \right| \leq 1 \\ 2x-x^2 \geq 0 \\ 2x-1 > 0 \\ 2x-1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq x \leq 2 \\ x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases},$$

所求定义域是 $(\frac{1}{2}, 1) \cup (1, 2]$ 。

例 2 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f(f(\cdots f(x)))$

解 记 $f_n(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_n$

$$f_2(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$f_3(x) = f(f_2(x)) = \frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+2x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

设 $f_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$, 则有

$$f_{k+1}(x) = \frac{f_k(x)}{\sqrt{1+f_k^2(x)}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$$

由数学归纳法可知, 对正整数 n , $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$ 。

例 3 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$, $\varphi(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ x^2-1, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$ 。

解 由于 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$, 所以 $f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x) < 1 \\ \varphi(x), & \varphi(x) \geq 1 \end{cases}$

(1) $\varphi(x) < 1$

当 $x < 0$ 时, $\varphi(x) = x+2 < 1 \Rightarrow x < -1, f[\varphi(x)] = e^{x+2}$;

当 $x \geq 0$ 时, $\varphi(x) = x^2-1 < 1 \Rightarrow 0 \leq x < \sqrt{2}, f[\varphi(x)] = e^{x^2-1}$ 。

(2) $\varphi(x) \geq 1$

当 $x < 0$ 时, $\varphi(x) = x+2 \geq 1 \Rightarrow -1 \leq x < 0, f[\varphi(x)] = x+2$;

当 $x \geq 0$ 时, $\varphi(x) = x^2-1 \geq 1 \Rightarrow x \geq \sqrt{2}, f[\varphi(x)] = x^2-1$ 。

综上所述,

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2}, & x < -1 \\ x+2, & -1 \leq x < 0 \\ e^{x^2-1}, & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ x^2-1, & x \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

例 4 已知 $2f(x) + f(1-x) = x^2$, 求 $f(x)$ 的表达式。

解法 1 由题设可知, $f(x)$ 应是多项式函数, 且最高次数为二次, 所以设 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 由已知等式可得

$$2(ax^2 + bx + c) + a(1-x)^2 + b(1-x) + c = x^2$$

整理得 $3ax^2 + (b-2a)x + a+b+3c = x^2$ 。

比较两端同次幂系数得
$$\begin{cases} 3a = 1 \\ b - 2a = 0 \\ a + b + 3c = 0 \end{cases}, \text{解得 } a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}, c = -\frac{1}{3}.$$

故有 $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ 。

解法 2 分析: 欲求 $f(x)$ 表达式, 若能得出 $f(x)$ 与 $f(1-x)$ 的另一个方程, 则可解出 $f(x)$ 。

解 由已知 $2f(x) + f(1-x) = x^2$ (1)

令 $1-x=t \Rightarrow x=1-t$, 代入方程(1)得

$$2f(1-t) + f(t) = (1-t)^2,$$

故有 $2f(1-x) + f(x) = (1-x)^2$ (2)

将上述方程(2)与已知方程(1)联立, 解得

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

例 5 设 $g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 2 \\ 2, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$, 求函数 $f(x) = g(2x) + g(x-1)$ 的定义域, 并

求 $f\left(\frac{3}{2}\right)$ 。

解 $g(x)$ 的定义域为 $[0, 4]$, 对于 $g(2x)$, 应有 $0 \leq 2x \leq 4$, 则有 $0 \leq x \leq 2$, 对于 $g(x-1)$, 要求 $0 \leq x-1 \leq 4$, 则 $1 \leq x \leq 5$, 故 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 2]$ 。

则 $f\left(\frac{3}{2}\right) = g(3) + g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + 1 = 3$ 。

例 6 设 $f(x)$ 为连续函数, 且满足 $\exp\left\{\int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right) dt\right\} = f(x)$, 求 $f(x)$ 的表达式。

解 对题中所给的关系式取自然对数, 得

$$\int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right) dt = \ln f(x)$$

上式两边同时对 x 求导,有

$$3f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, \text{ 即 } f'(x) = 3f^2(x)$$

解之,可得

$$f(x) = -\frac{1}{3x + C}$$

易知 $f(0) = 1$, 因此得 $C = -1$, 所以 $f(x) = \frac{1}{1 - 3x}$ 。

二、数列与函数的极限

1. 数列极限的定义

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow$ 任意 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \epsilon$, 称常数 a 是数列 x_n 的极限, 又称数列 x_n 收敛于 a 。

2. 数列极限的性质

有界性 收敛的数列必定有界。

唯一性 每个收敛的数列只有一个极限。

3. 函数极限的定义

定义 1 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow$ 任意 $\epsilon > 0$, 存在正数 X , 当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$ 。

在上述定义中, 将 $|x| > X$ 改写成 $x > X$ (或 $x < -X$), 便得到 $x \rightarrow +\infty$ (或 $x \rightarrow -\infty$) 时函数的极限。

定义 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ 任意 $\epsilon > 0$, 存在正数 δ , 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$ 。

在上述定义中, 将 $0 < |x - x_0| < \delta$ 改写成 $0 < x_0 - x < \delta$ (或 $0 < x - x_0 < \delta$), 便得到 $x \rightarrow x_0$ 时的左(右)极限的定义。

左极限记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0)$

右极限记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0)$

4. 函数极限的性质

函数 $f(x)$ 极限存在的充分必要条件是 $f(x)$ 的左、右极限均存在并且相等。

若函数 $f(x)$ 极限存在, 则极限值是唯一的。

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$)。