

普通高等教育“三海一核”系列规划教材

数学物理方程与 特殊函数

于涛 杨延冰 编

高等教育出版社

普通高等教育“三海一核”系列规划教材

数学物理方程与 特殊函数

于涛 杨延冰 编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书共 8 章, 前 6 章为数学物理方程与特殊函数的经典内容: 介绍三类典型的数学物理方程及一些基本概念、分离变量法、行波法与积分变换法等, 还探讨了贝塞尔函数、格林函数及勒让德多项式的应用; 后 2 章为工程实践中应用广泛的变分法、解析近似解及数值近似解等内容。

本书可作为高等学校工科类各专业的数学物理方程与特殊函数课程教材, 也可供相关的理科类专业学生及工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

数学物理方程与特殊函数 / 于涛, 杨延冰编. -- 北京: 高等教育出版社, 2019.9

ISBN 978-7-04-052203-7

I. ①数… II. ①于… ②杨… III. ①数学物理方程 - 高等学校 - 教材 ②特殊函数 - 高等学校 - 教材 IV.

① O175.24 ② O174.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 134572 号

策划编辑 李冬莉 责任编辑 李冬莉 封面设计 张楠 版式设计 杜微言
插图绘制 黄云燕 责任校对 刘丽娴 责任印制 刁毅

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印 刷	天津文林印务有限公司		http://www.hepmall.com
开 本	787 mm × 1092 mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印 张	12.25	版 次	2019 年 9 月第 1 版
字 数	300 千字	印 次	2019 年 9 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	38.00 元
咨询电话	400-810-0598		

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 52203-00

前言

18世纪,微积分产生之后,人们利用极限的思想对力学、物理学中的一些问题和规律进行了深入的探索,如研究质点的位移与时间的变化之间的关系,电流电压随变化着的时间而改变的规律,总结出描绘这类现象内在规律的数学模型——常微分方程。在科学技术日新月异发展的过程中,用只含有一个自变量的常微分方程,描述人们所研究的所有问题显然不行。例如,流动的物质,其内部的温度、密度等物理量不仅与时间有关,同时还和其所处的空间位置有关,因此要用含有多个自变量的函数来描述这类物理现象。这样,偏微分方程的理论就逐渐产生了。

数学物理方程的研究对象是具有物理背景的偏微分方程(组),而本书主要是对波动方程、热传导方程、调和方程等三类具有典型意义的数学物理方程进行剖析,阐明了偏微分方程的基本理论、典型解法以及它们在工程实际问题中的应用。在研究具体问题时,先建立描绘物理现象的数学模型,然后提供模型的求解方法,进而研究客观问题变化发展的一般规律。

本书是哈尔滨工程大学的“三海一核”特色系列教材,注重把物理规律、数学方法与工程实际这三者有机地结合在一起,希望在有限的学时内,通过初步的训练与有效的引导,培养工科学子应用数学工具解决复杂工程问题的能力。将建模思想、化归思想融入教学内容中,引导学生透过现象本身所蕴含的客观规律,寻找数学方法诞生的源泉,力求塑造一条合理的探索与发现之路。在满足传统的理工科教学基本要求的同时,还要满足新形势下的教学需求。

本书编写时,还注意与大学数学基础课程内容的衔接,考虑大学数学系列课程体系上的统一,保持方法叙述和符号含义的一

致,在读者熟悉的环境里展开新的讨论。针对工科学生的特点,在文字和内容上,我们力求理论脉络尽可能清晰,解题方法尽可能丰富,数学推演尽可能简洁。为了达到易教易学的目的,本书不追求理论体系的完整性,而是注重内容的可读性与实用性。我们对许多基本理论采取述而不证的方式或者粗线条直观的分析,着重于探讨和阐明理论概念和方法技巧的渊源与作用,在介绍经典理论的同时,适当地介绍一些现代的数学物理研究方法。

读者只要具备高等数学、线性代数的基本知识,就能轻松地阅读本书。我们将部分涉及较深理论的内容以及对正文的注释、补充等用小字编排,读者阅读时可以适当选择,或者略去,或者借助于相关参考资料进行系统的学习。在课后习题中,我们列举了几个专题问题,表面上是较长的习题,实质上是对某些具体问题较为系统的研究,是对正文内容的补充和扩展,其结果有一定价值或涉及相关的应用。

本书的编写得到了哈尔滨工程大学本科院的大力支持,对此表示衷心的感谢。还要感谢课堂上那些踊跃提问的同学,他们智慧的火花点亮了我们写作的方向。特别要感谢廖振鹏院士、苏景辉教授,和他们关于数学物理问题多次有趣的探讨,使我们受益匪浅。本书的出版得到高等教育出版社的鼎力支持,作者在此表示感谢。

由于作者水平有限,难免有不妥之处,欢迎读者批评指正。

编者

2018年8月29日

目 录

第 1 章 典型方程的推导及基本概念	1	第 5 章 行波法与积分变换法	111
1.1 波动方程与定解条件	1	5.1 一阶线性偏微分方程的特征线法	111
1.2 热传导方程与定解条件	6	5.2 一维波动方程的初值问题	114
1.3 调和方程与定解条件	11	5.3 延拓法求解半无限长弦的振动问题	123
1.4 基本概念与叠加原理	12	5.4 高维波动方程的初值问题	127
1.5 二阶偏微分方程的分类	17	5.5 积分变换法	133
习题 1	24	习题 5	138
第 2 章 分离变量法	26	第 6 章 格林函数	140
2.1 固有值与固有函数	26	6.1 δ 函数	140
2.2 有界弦的自由振动	31	6.2 无界域中的格林函数	142
2.3 有易弦的强迫振动	40	6.3 格林公式与有界域上的格林函数	143
2.4 有限长杆上的热传导问题	51	6.4 格林函数的应用	146
2.5 二维拉普拉斯方程	58	习题 6	151
习题 2	67	第 7 章 变分法及应用	152
第 3 章 贝塞尔函数	73	7.1 泛函和泛函极值	152
3.1 贝塞尔方程的求解及贝塞尔函数	73	7.2 变分法在固有值问题中的应用	157
3.2 贝塞尔函数的递推公式及其振荡特性	76	7.3 伽辽金方法	162
3.3 贝塞尔方程的导出	79	7.4 坐标函数的选择	164
3.4 函数按贝塞尔函数系展开	81	第 8 章 数学物理中的近似解法	166
3.5 贝塞尔函数的应用	86	8.1 解析近似解	166
* 3.6 圆柱冷却问题	91	8.2 数学物理方程的差分解法	170
习题 3	93	附录一 双调和方程	177
第 4 章 勒让德多项式	96	附录二 探讨定解问题适定性的方法 ——能量积分法	181
4.1 勒让德方程的导出	96	部分习题答案与提示	188
4.2 勒让德方程的求解	98	参考文献	189
4.3 勒让德多项式	99		
4.4 函数展开成勒让德多项式的级数	102		
4.5 连带的勒让德多项式	107		
习题 4	109		

第1章 典型方程的推导及基本概念

数学物理方程是一个以物理规律为基础,以数学方法为工具来研究实际问题的数学分支,它的主要研究对象为来自数学物理问题中的偏微分方程.本章首先从具体的物理模型推导出三类典型的数学物理方程,以及相关的定解条件;然后介绍偏微分方程的基本概念及二阶线性偏微分方程的分类.

1.1 波动方程与定解条件

用微分方程描述工程实际问题,实质就是从物理问题导出数学物理方程.首先,我们分析实际问题遵循的物理规律,并用数学概念表达相关的物理量,再运用数学方法推导出数学物理方程.数学上可采用两种不同的推导方法,即局部微元法和整体积分法.

局部微元法是指在所研究的物体中,任取一个微元,在其上建立相应物理量的平衡关系,然后令微元的直径趋向于零,使微小的体积紧缩成一个点,则得到区域内任意一点的数学物理方程.整体积分法是在物体内部任取一个子区域,在其上建立相应物理量的平衡关系,得到一个积分等式,根据积分区域的任意性,通过被积表达式就可得到数学物理方程.这两种方法本质上是相同的.下面,我们通过推导波动方程引入这些具体内容.

1.1.1 方程的导出

考虑如下问题:一根线密度为 ρ 、长为 l 的均匀细弦,拉紧之后使它在平衡位置作振幅微小的横振动,求弦上各点的位移随时间变化的规律.

本问题是现实生活中弦乐器的弦振动现象的简化.弦振动是一个复杂的物理过程,在建立描述弦振动过程的数学模型时,为了便于讨论,必须忽略一些次要因素,作一些合理的假设与近似.

我们考虑一根理想化的柔软细弦,其横截面的直径与弦的长度相比非常小,因此可以把弦看作质点的一维分布;柔软意味着整个弦可以任意变形,反抗弯曲所产生的力矩可以忽略不计,其内部的张力总是沿着弦的切线方向.

振幅微小,不仅指振动的幅度很小,同时认为切线的倾斜角也很小;横振动是指振动发生在一个平面内,且弦上各点的运动方向垂直于平衡位置.

我们以弦的平衡位置为 x 轴建立坐标系,弦的一端置于坐标原点,用函数 $u(x,t)$ 描述时刻 t 、弦上横坐标为 x 的点在纵轴 u 方向上的位移.

下面,我们先采用局部微元法推导弦作微小横振动的数学规律.在振动过程的任一时刻 t ,弦的形状是一条曲线,在弦上任选一小段弦 MM' ,其上每一点的位置如图 1-1 所示. 其中, M 点处的张力为 T ,其大小表示为 T ,它与 x 轴的夹角为 α , $\tan \alpha = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, M' 点处的张力为 T' ,其大小表示为 T' ,它与 x 轴的夹角为 α' , $\tan \alpha' = \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x}$,记弦段 MM' 的长度为 ds .

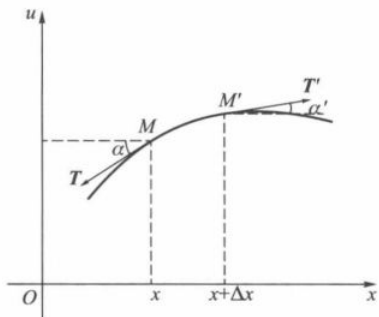


图 1-1

现在建立位移 $u(x,t)$ 所应满足的方程.首先,我们将弦段 MM' 上的运动近似看作是一个质点的运动,它满足牛顿运动定律: $F = ma$.

首先,由于是微小的振动,所以 $\alpha \approx \alpha' \approx 0$,则

$$\sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad \sin \alpha' \approx \tan \alpha' = \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x},$$

$$ds = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2} dx \approx \Delta x.$$

这样我们可以认为弦线没有伸长,也就是说,弦在 x 轴方向没有位移.

在 x 轴方向,弦段 MM' 受力总和为

$$F_x = -T \cos \alpha + T' \cos \alpha'.$$

因为弦只在 x 轴的垂直方向作横振动,在 x 轴方向没有位移,因此合力为 0,即

$$-T \cos \alpha + T' \cos \alpha' = 0. \quad (1.1.1)$$

又由于是微小振动,因此 α, α' 近似为 0,有

$$\cos \alpha \approx \cos \alpha' \approx 1.$$

代入(1.1.1)可以得到

$$T = T'.$$

这表明,弦上各点处张力相等,是一个常数.

在 u 轴方向上,弦段 MM' 受力的总和为

$$F_u = -T \sin \alpha + T' \sin \alpha' - \rho g ds,$$

其中, ρ 为弦的线密度, g 为重力加速度.同时,弦段 MM' 在 t 时刻沿 u 方向运动的加速度近似为

$\frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial t^2}$, 其中 \bar{x} 为弦段 MM' 的质心横坐标,位于点 $x, x + \Delta x$ 之间.于是成立

$$-T \sin \alpha + T' \sin \alpha' - \rho g ds = \rho ds \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial t^2},$$

即

$$T' \tan \alpha' - T \tan \alpha - \rho g ds = \rho ds \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial t^2}.$$

$$T \left[\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] - \rho g \Delta x = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial t^2}.$$

由微分中值定理可得

$$T \left[\frac{\partial^2 u(x + \theta \Delta x, t)}{\partial x^2} \right] \Delta x - \rho g \Delta x = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial t^2}.$$

令 $\Delta x \rightarrow 0$, 则有 $x + \theta \Delta x \rightarrow x$, $\bar{x} \rightarrow x$, 得到

$$\rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho g,$$

即

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + g = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}.$$

通常情况下, 弦绷得很紧, 张力较大, 导致弦振动速度变化很快, 即 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 比 g 远远大得多, 所以 g 可以略去. 令 $a^2 = \frac{T}{\rho}$, 得到

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}. \quad (1.1.2)$$

称方程(1.1.2)为弦振动方程, 未知函数 u 只含有两个变量 x, t , 其中 t 表示时间, x 表示空间位置. 表示空间位置的变量只有一个, 因此该方程又称为一维波动方程.

在振动过程中, 如果弦上还受到一个与振动方向平行的外力, t 时刻弦上 x 点处的外力密度为 $F(x, t)$, 方向垂直于 x 轴, 则在上述推导过程之中, 弦段 MM' 在 u 轴方向上所受的合力为

$$F_u = -T \sin \alpha + T' \sin \alpha' - \rho g ds + F(x, t) ds,$$

即

$$T' \sin \alpha' - T \sin \alpha - \rho g ds + F(x, t) ds = \rho ds \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial t^2},$$

则得到描述弦受外力强迫振动的方程

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (1.1.3)$$

式中 $f(x, t) = \frac{1}{\rho} F(x, t)$, 表示 t 时刻单位质量的弦在 x 点处所受的外力.

方程中与函数 $u(x, t)$ 无关的项 $f(x, t)$ 又称为自由项. 含有非零自由项 $f(x, t)$ 的方程称为非齐次方程, 若 $f(x, t) = 0$, 则称之为齐次方程. 因此方程(1.1.2)称为齐次一维波动方程, 方程(1.1.3)称为非齐次一维波动方程.

下面我们运用整体积分法作一个简单的推导,学习一下这个方法的思想及具体应用.为此,我们在弦上任选一段 MM' , 其在 x 轴上投影为 $[x_1, x_2]$, 在 u 轴方向上, 惯性力

$$F = ma = \int_{x_1}^{x_2} d(ma) = \int_{x_1}^{x_2} (dm)a = \int_{x_1}^{x_2} (\rho ds)a = \int_{x_1}^{x_2} \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} ds.$$

已经证明弦线没有伸长且张力 T 为常量, 故弦段 MM' 的张力在 u 轴方向的分量是

$$\begin{aligned} T \sin \alpha' - T \sin \alpha &\approx T \tan \alpha' - T \tan \alpha = T \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_2} - T \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_1} \\ &= T [u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t)] = T \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx, \end{aligned}$$

因此, 弦段 MM' 上力的平衡关系为

$$T \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx + \rho g ds = \int_{x_1}^{x_2} \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} ds,$$

则对一切弦段 MM' 成立

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[-\rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \rho g \right] dx = 0,$$

故可得

$$-\rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \rho g = 0.$$

经过整理及合理的假设, 略去 g , 得到偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}.$$

如果我们研究外力作用下平面薄膜的微小振动, 则会得到二维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t).$$

同样的分析方法, 我们可以得到描述外力作用下弦振动的三维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t).$$

方程(1.1.2)是一个重要的偏微分方程, 各种弹性振动, 如建筑物的剪切振动、潮汐波、地震波等都可以用这个方程来描述, 这些物理现象的共同特征是振动产生波的传播. 该方程于 1752 年由达朗贝尔(d'Alembert)首先建立, 后来, 欧拉(Euler, 1759年)和伯努利(Bernoulli, 1762年)在对声波的研究过程中, 分别推广建立了二维波动方程和三维波动方程.

1.1.2 定解条件

当学习后续内容后, 我们会了解到不同长度的杆的纵振动、电磁波沿同轴线传播等问题, 都可归结为方程(1.1.2)描述的数学模型. 为了得到具体问题所蕴含的变化规律, 还须考虑物理现象所处的特定环境及历史演变. 所谓的特定环境, 实质就是实际问题通过边界和外部环境发生的关

系,这种关系的数学描述就称之为**边界条件**.历史演变就是要知道物理现象从何种状态转移到如今的状态,这就需要了解问题变化刚开始的状态,对这种状态的描述称之为**初始条件**.**定解条件**即是初始条件和边界条件的统称.

所以,一根弦线的特定振动状态还依赖于弦初始时刻的状态和通过弦线两端所受外界的影响.为了确定一个具体的弦振动的规律,除了列出方程外,还需要给出它满足的定解条件,即初始条件和边界条件:

初始条件,即初始时刻 $t = 0$ 时,弦上各点的位移和速度:

$$u(x, t) \Big|_{t=0} = \varphi(x) \quad (0 < x < l), \quad (1.1.4)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x) \quad (0 < x < l), \quad (1.1.5)$$

式中, $\varphi(x), \psi(x)$ 为已知函数,当 $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ 时,称之为**齐次初始条件**.

边界条件,即弦的端点所满足的条件.由物理学可知,弦在振动时,其端点(以 $x = l$ 表示这个端点)所受的约束情况通常有以下三种.

① **固定端**.即弦在振动过程中,该端点始终固定不动,位移是 0.对应于这种状态的边界条件为

$$u(x, t) \Big|_{x=l} = 0 \text{ 或 } u(l, t) = 0.$$

更一般的情况是,弦的端点不固定,而是按照某种规律 $w(t)$ 运动,则边界条件为

$$u(x, t) \Big|_{x=l} = w(t),$$

这样的边界条件称为**第一类边界条件**.

② **自由端**.即弦的这个端点可以在垂直于 x 轴的轨道上自由滑动,不受垂直方向的外力的作用,从而该端点在位移方向上的张力为零.由前述推导过程可知对应于这种状态的边界条件为

$$T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0,$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0.$$

一般情况下,若此端点受垂直方向的外力的作用,假设 t 时刻外力大小为 $g(t)$,则有

$$T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = g(t).$$

整理.令 $\mu(t) = \frac{g(t)}{T}$,有

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = \mu(t).$$

这样的边界条件称为**第二类边界条件**.

③ **弹性支承端**.即弦的一个端点固定在弹性支承上,弹性支承的伸缩符合胡克(Hooke)定律,如果弹性支承初始位移为 $u = 0$,则 $u \Big|_{x=l}$ 表示弹性支承在该点的伸长.此时弦对支承的拉力在垂直方向的分量为

$$T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l},$$

大小应该等于 $ku|_{x=l}$, 即

$$T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = -ku \Big|_{x=l}$$

或

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma u \right) \Big|_{x=l} = 0.$$

式中, $\sigma = k/T$, k 为劲度系数.

一般情况下, 弦的端点还受垂直方向的外力, t 时刻外力大小为 $g(t)$, 则有

$$T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = -ku \Big|_{x=l} - g(t).$$

令 $\mu(t) = -\frac{g(t)}{T}$, $\sigma = \frac{k}{T}$, 有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma u \right) \Big|_{x=l} = \mu(t).$$

这样的边界条件称为**第三类边界条件**.

我们不考虑具体的物理模型, 从数学的角度出发, 将描述一维波动方程的边界条件抽象推广为用于描述任意现象的边界条件.

若在边界 Γ 上直接给出未知函数 u 的数值, 即

$$u|_{\Gamma} = \mu_1(t),$$

这种形式的边界条件称为**第一类边界条件**.

若在边界 Γ 上直接给出未知函数 u 沿 Γ 的外法线方向 \mathbf{n} 的方向导数, 即

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} = \mu_2(t),$$

这种形式的边界条件称为**第二类边界条件**.

同样, 我们称如下形式的边界条件为**第三类边界条件**:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma u \right) \Big|_{\Gamma} = \mu_3(t).$$

若 $\mu_i(t) = 0 (i = 1, 2, 3)$, 则称这种边界条件为**齐次边界条件**, 否则就称之为**非齐次边界条件**.

1.2 热传导方程与定解条件

众所周知, 如果空间某物体 G 内各点处的温度不同, 热量就会从温度较高的点向温度较低的点流动, 这种现象就叫**热传导**. 由于热量的传导过程表现为温度随时间和点的位置的不同而变化, 因此热传导问题实质上就是要求出物体内部温度分布的函数.

1.2.1 方程的导出

我们在三维空间中建立一个模型,来描述一个均匀的、各向同性物体内部的热传导过程.用 $u(x, y, z, t)$ 表示物体 G 内部某点 $M(x, y, z)$ 在 t 时刻的温度,然后我们利用体积分法,推导温度函数 $u(x, y, z, t)$ 满足的数学物理方程.

热的传播符合傅里叶(Fourier)定律:物体在无穷小时段 dt 内流过一个无穷小面积 dS 的热量 dQ ,与时间 dt 、曲面的面积 dS 以及物体的温度 u 沿曲面 dS 的外法线方向 \mathbf{n} 的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ 三者成正比,即

$$dQ = -k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS dt. \quad (1.2.1)$$

式中, $k = k(x, y, z)$ 称为物体在点 (x, y, z) 处的热传导系数.当物体为均匀且各向同性的导体时, k 取常数.由于热量的流向与温度的梯度方向相反,所以上式中有了一个负号.

在物体 G 内部任取一个小区域记为 Ω ,其边界曲面记为 Σ ,则从时刻 t_1 到时刻 t_2 经过曲面 Σ 流入区域 Ω 的热量为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\oint_{\Sigma} k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS \right] dt. \quad (1.2.2)$$

流入的热量使 Ω 内部的温度发生了变化,在时间间隔 (t_1, t_2) 内,区域 Ω 内部各点的温度由 $u(x, y, z, t_1)$ 变化到 $u(x, y, z, t_2)$,这一过程所需要的热量为

$$Q_2 = \iiint_{\Omega} c\rho [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)] dV, \quad (1.2.3)$$

式中, c 为物体的比热容, ρ 为物体的密度.

如果所考虑的物体内部没有热源,由热量守恒定律可得 $Q_1 = Q_2$,则

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\oint_{\Sigma} k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS \right] dt = \iiint_{\Omega} c\rho [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)] dV. \quad (1.2.4)$$

假设函数 u 关于 x, y, z 具有二阶连续偏导数,关于 t 具有一阶连续偏导数,则利用高斯(Gauss)公式有

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dV \right] dt.$$

Q_2 可以表示为

$$Q_2 = \iiint_{\Omega} c\rho \left[\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt \right] dV = \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_{\Omega} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV \right] dt.$$

于是(1.2.4)式可变为

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_{\Omega} \left[c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dV \right] dt = 0.$$

由于 t_1, t_2 与区域 Ω 是任意选取的,且被积函数是连续的,于是得

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right). \quad (1.2.5)$$

(1.2.5)式称为非均匀的各向同性体内的热传导方程.若物体是均匀的,则 k, c, ρ 均为常数,记 $k/c\rho = a^2$,则(1.2.5)式变成

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (1.2.6)$$

若物体内部有热源,且单位时间内单位体积所产生的热量为 $F(x, y, z, t)$,则相应的热传导方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t), \quad (1.2.7)$$

式中

$$f(x, y, z, t) = \frac{1}{c\rho} F(x, y, z, t).$$

我们称方程(1.2.6)为齐次热传导方程,而称方程(1.2.7)为非齐次热传导方程.在这两个方程中,用 x, y, z 三个变量描述空间位置,所以又被称为三维热传导方程.

当我们考虑的对象是不含热源的一根均匀细杆时,它的侧面绝热,且在同一横截面上的温度分布是相同的.若我们以细杆作为 x 轴,则杆上的温度 u 只与 x, t 有关,所以有

$$u_y = u_z = 0.$$

则(1.2.6)式变为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.2.8)$$

这个方程称为一维热传导方程.

同样,若考虑一个薄片上的热传导问题,其上、下两个侧面绝热,则可得到二维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (1.2.9)$$

在研究由于浓度不均匀而产生的诸如气体的扩散、液体的渗透,半导体材料中杂质扩散等物理过程时,若用 u 表示扩散物质的浓度,则浓度 u 满足的方程在形式上与热传导方程一样.于是,我们也把这类方程称作扩散方程.历史上,傅里叶在其经典名著《热的解析理论》中首先引入和研究了热传导方程.

下面,我们运用局部微元法推导一维热传导方程.考虑一根水平放置在 x 轴、长度为 l 的均匀细杆,其端点在 $x=0, x=l$ 处.假设细杆的横截面是均匀的,且侧面绝热.这样,杆内只存在 x 方向的热流.令 $u(x, t)$ 为杆上 x 点处 t 时刻的温度, $e(x, t)$ 为热流密度(单位体积的热能), $\phi(x, t)$ 为热流量(单位时间内沿正方向流过单位面积的热能), $Q(x, t)$ 为热源在单位体积单位时间内产生的热能, $c(x)$ 为比热容, $\rho(x)$ 为密度.在其上任选一小段薄片 $[x, x + \Delta x]$,记细杆的横截面积为 A ,则该薄片的体积为 $A\Delta x$,薄片上的全部热能为 $e(x, t)A\Delta x$.

由于薄片中的热能使薄片的温度由零升高到 $u(x, t)$,所以

$$e(x, t)A\Delta x = c(x)u(x, t)\rho(x)A\Delta x,$$

则成立

$$e(x, t) = c(x)u(x, t)\rho(x). \quad (1.2.10)$$

热能守恒定律表明热能的改变是由于从边界流过的热能以及内部热源,应用到我们选定的

小体积上,则有

$$\frac{\partial}{\partial t}[e(x,t)A\Delta x] = \phi(x,t)A - \phi(x+\Delta x,t)A + Q(x,t)A\Delta x. \quad (1.2.11)$$

依据傅里叶热传导定律,有

$$\phi(x,t) = -K_0 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1.2.12)$$

其中 K_0 称为热导率.傅里叶热传导定律的定量描述就是热从物体内部温度高处流向温度低处,因此,若随着 x 的增加温度也增加,则热能将向 x 减少的方向流动,故傅里叶热传导定律中存在一个负号.

对(1.2.11)式两端同除 $A\Delta x$,并令 $\Delta x \rightarrow 0$,得到

$$\frac{\partial}{\partial t}e(x,t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x,t) - \phi(x+\Delta x,t)}{\Delta x} + Q(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t) + Q(x,t).$$

将(1.2.10)式,(1.2.12)式代入上式,有

$$\frac{\partial}{\partial t}[c(x)u(x,t)\rho(x)] = -\frac{\partial}{\partial x}\left[-K_0 \frac{\partial u}{\partial x}\right] + Q(x,t),$$

则得到热传导方程

$$c(x)\rho(x) \frac{\partial}{\partial t}[u(x,t)] = K_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t).$$

若比热容 $c(x)$ 、密度 $\rho(x)$ 均为常数,上述方程化为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$

其中, $a^2 = \frac{K_0}{c\rho}$ 称为热扩散率, $f(x,t) = \frac{1}{c\rho}Q(x,t)$.

1.2.2 定解条件

对于一个特定的热传导过程,仅知道温度 u 所满足的方程是远远不够的,还需知道研究对象在“初始”时刻的状态和边界上发生的变化,即所谓的初始条件和边界条件.

方程(1.2.6)中的未知函数 u 只含有关于变量 t 的一阶偏导数,所以初始条件显然为

$$u(x,y,z,t) \Big|_{t=0} = \varphi(x,y,z), \quad (1.2.13)$$

式中, $\varphi(x,y,z)$ 为已知函数,表示 $t=0$ 时刻物体内部温度的分布.

至于边界条件,常见的有以下三种基本类型.设所考虑物体 G 的边界曲面为 Γ ,且已知物体表面的温度为 $\mu_1(x,y,z,t)$,则

$$u(x,y,z,t) \Big|_{\Gamma} = \mu_1(x,y,z,t), \quad (1.2.14)$$

式中 $\mu_1(x,y,z,t)$ 为定义在 Γ 上的已知函数,这种边界条件称为第一类边界条件.

若已知物体表面上各点的热流量 μ_0 ,也就是说物体表面上单位时间内流过单位面积的热量是已知的,则由傅里叶热传导定律可得

$$\mu_0 = -k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma},$$

其中 \mathbf{n} 为外法线方向, 则有

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} = \mu_2(x, y, z, t). \quad (1.2.15)$$

式中, $\mu_2(x, y, z, t) = -\frac{\mu_0}{k}$ 为定义在 Γ 上的已知函数. 这种边界条件称为第二类边界条件.

特别的, 若物体表面上各点热流量为 0, 则称之为绝热性边界条件, 即

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} = 0.$$

若物体置于一介质中, 我们只能测得与物体相接触的介质温度 u_1 . 一般情况下, 由于 u_1 与物体表面的温度 u 不同, 因此物体内部和周围的介质通过曲面 Γ 存在热量交换. 由热传导中的牛顿实验定律可知

$$dQ = k_1(u - u_1) dS dt, \quad (1.2.16)$$

式中, k_1 是两种介质之间的热交换系数. 在物体内部无限接近表面 Γ 处, 作一闭曲面 Σ , 由于在 Γ 内侧热量不能积累, 因此在曲面 Σ 上的热流量应等于边界曲面 Γ 上的热流量, 流过曲面 Σ 的热量满足

$$dQ = -k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS dt,$$

流过边界曲面 Γ 的热量满足

$$dQ = k_1(u - u_1) dS dt,$$

所以有关系式

$$-k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} = k_1(u - u_1) \Big|_{\Gamma},$$

即

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha u \right) \Big|_{\Gamma} = \alpha u_1 \Big|_{\Gamma}. \quad (1.2.17)$$

这种边界条件可改写为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha u \right) \Big|_{\Gamma} = \mu_3(x, y, z, t), \quad (1.2.18)$$

式中, $\mu_3(x, y, z, t)$ 为定义在 Γ 上的已知函数, α 为已知正数. 这种类型的边界条件称为第三类边界条件.

当 $\mu_i(x, y, z, t) = 0 (i = 1, 2, 3)$ 时, 相应的边界条件称为齐次边界条件, 否则称为非齐次边界条件.

1.3 调和方程与定解条件

设空间有一静电场,其电荷密度为 $\rho(x,y,z)$,电场强度为 \mathbf{E} .在国际单位制下,静电场的方程组为

$$\begin{cases} \nabla(\varepsilon\mathbf{E}) = \rho, \\ \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (1.3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (1.3.2)$$

式中, ε 是介电常数.

由于静电场具有无旋性,因此电势 $u(x,y,z)$ 与电场强度 $\mathbf{E}(x,y,z)$ 之间有关系式

$$\mathbf{E} = -\nabla u. \quad (1.3.3)$$

将(1.3.3)式代入(1.3.1)式得

$$-\varepsilon \nabla \cdot (\nabla u) = \rho,$$

即

$$\Delta u = -\frac{1}{\varepsilon}\rho. \quad (1.3.4)$$

在直角坐标系下,(1.3.4)式表示为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{\varepsilon}\rho. \quad (1.3.5)$$

称方程(1.3.5)为三维泊松(Poisson)方程.若电荷密度 $\rho = 0$,则方程(1.3.5)为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (1.3.6)$$

称方程(1.3.6)为三维调和方程(又称为拉普拉斯方程).

在1.2节中,我们建立了热传导方程,若导热物体内部热源的分布和边界情况不随时间变化,则经过相当长时间后,物体内部的温度将达到稳定状态,不再随时间变化,因而热传导方程中的

$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$,于是(1.2.6)和(1.2.7)变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (1.3.7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{a^2}f(x,y,z). \quad (1.3.8)$$

这样,我们又得到了拉普拉斯方程和泊松方程.在这里,由不同的物理过程却得到相同的偏微分方程.

对于拉普拉斯方程和泊松方程所描述的具体的物理现象,也需要附加一定的条件.由于它们描述稳定或平衡的物理现象,用于表示该过程的物理量与时间无关,故定解条件只有边界条件而无初始条件.和前面一样,边界条件也分为三类.