

数学实验

M A T H E M A T I C A

主编 孙旭东 干国胜



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

数学实验

M A T H E M A T I C A

主 编 孙旭东 干国胜
副主编 李 波 刘学才 占晓军 张 洋



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学实验/孙旭东,干国胜主编.—武汉:武汉大学出版社,2019.8
ISBN 978-7-307-21049-3

I.数… II.①孙… ②干… III.高等数学—实验 IV.O13-33

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第148235号

责任编辑:杨晓露 责任校对:汪欣怡 版式设计:马佳

出版发行:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮箱:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)

印刷:湖北民政印刷厂

开本:787×1092 1/16 印张:11.25 字数:267千字 插页:1

版次:2019年8月第1版 2019年8月第1次印刷

ISBN 978-7-307-21049-3 定价:36.00元

版权所有,不得翻印;凡购买我社的图书,如有质量问题,请与当地图书销售部门联系调换。

前 言

在知识经济时代，数学知识和数学应用知识都不可或缺。数学被广泛应用到各行各业，经济学家、地质学家、工程师、生物学家等都可能运用数学知识进行数模和模拟。作为生活在一个比以前更加趋向于数学化、数量化的数形世界中的人们，而学生却正逐渐丧失对数学学习的兴趣。究其原因，其一是学生几乎花了八成的时间用于数字计算，然而数学不等于计算，数学是一门远远比计算更为广泛的学科；其二是缺少图形和可视化，而缺少图形和可视化将使学习微积分的学生在理解数学概念方面遇到困难。

Mathematica 是一款科学计算软件，界面美观友好，其图形和可视化是它的重要功能之一；它还具有强大的数值计算和符号计算能力，支持相当多的编程范式、过程式、函数式、元编程等，能使学生在学习数学的过程中潜移默化地掌握计算思维。

微积分是人类文明发展史上理性智慧的精华，自其诞生后的三百多年来，每一世纪都证明了微积分在阐明和解决来自数学、物理学、工程科学以及经济学、管理科学、社会学和生物科学各领域问题中的强大威力。正因为如此，微积分成为培养人才重要的必须掌握的内容。

本书的特色是：第一，突出以计算思维解决数学问题导向，因为计算思维将是未来的一个标志性特征，也是未来职业成功的关键。第二，用图形、可视化和数值化化解学生学习抽象数学概念的困惑。第三，让学生从繁琐的计算中解脱出来，学生能潜心探究如何用数学来解决现实生活中的问题，并亲手实践数学，感受数学之美。

此外，书末附录中的 Mathematica 操作命令一览表，可供学生学习时查阅、参考，更多的命令或命令详细说明可查阅软件的系统帮助。

全书由孙旭东、干国胜担任主编，参加本书编写的还有李波、张洋、占晓军、陈巧灵、刘学才、姜秋明、黄琳、刘奇志、王妍婷、杜军等。其中，孙旭东主要负责本书第 1~4 章的编写工作，第 5~7 章及附录由于国胜编写，其余人完成了对本书的修订工作。

本书的编写得到了武汉城市职业学院、湖北工业职业技术学院、华中师范大学等多所学校的大力支持与帮助，武汉大学出版社对本书的顺利出版提供了很多支持，在此一并表示衷心的感谢。

由于时间仓促，编者水平有限，书中难免有不足之处，热忱希望有关专家、读者批评指正！

目 录

| | |
|---------------------------|----|
| 第 1 章 函数与极限 | 1 |
| 1.1 Mathematica 简介 | 1 |
| 1.1.1 Mathematica 入门 | 1 |
| 1.1.2 Mathematica 界面简介 | 2 |
| 1.2 Mathematica 在初等数学中的应用 | 5 |
| 1.2.1 Mathematica 的基本运算 | 5 |
| 1.2.2 函数图形与性质 | 7 |
| 习题 1.2 | 18 |
| 1.3 极限 | 19 |
| 1.3.1 极限模型 | 19 |
| 1.3.2 求极限 | 20 |
| 习题 1.3 | 28 |
| 1.4 用 Mathematica 做回归分析 | 29 |
| 1.4.1 线性回归分析 | 29 |
| 1.4.2 非线性回归分析 | 30 |
| 习题 1.4 | 32 |
| 第 2 章 导数及其应用 | 34 |
| 2.1 导数与微分 | 34 |
| 2.1.1 导数模型 | 34 |
| 2.1.2 函数的导数 | 34 |
| 习题 2.1 | 40 |
| 2.2 导数的应用 | 41 |
| 2.2.1 微分中值定理模型 | 41 |
| 2.2.2 泰勒公式 | 42 |
| 2.2.3 曲线的切线和法线 | 44 |
| 2.2.4 函数图形的形状 | 49 |
| 习题 2.2 | 55 |
| 第 3 章 积分 | 57 |
| 3.1 积分 | 57 |

| | |
|---------------------------|------------|
| 3.1.1 积分模型 | 57 |
| 3.1.2 求积分 | 58 |
| 习题 3.1 | 64 |
| 3.2 定积分的应用 | 65 |
| 3.2.1 求曲线的弧长 | 65 |
| 3.2.2 求面积 | 67 |
| 3.2.3 求体积 | 73 |
| 习题 3.2 | 76 |
| 第 4 章 常微分方程 | 78 |
| 4.1 微分方程 | 78 |
| 4.1.1 微分方程模型 | 78 |
| 4.1.2 解常微分方程 | 79 |
| 习题 4.1 | 83 |
| 4.2 微分方程数值解与斜率场 | 84 |
| 4.2.1 微分方程的数值解 | 84 |
| 4.2.2 斜率场 | 86 |
| 习题 4.2 | 89 |
| 第 5 章 向量代数与空间图形的绘制 | 91 |
| 5.1 向量及其运算 | 91 |
| 5.1.1 向量模型 | 91 |
| 5.1.2 向量运算 | 91 |
| 习题 5.1 | 95 |
| 5.2 空间图形的绘制 | 96 |
| 5.2.1 绘制空间曲面 | 96 |
| 5.2.2 绘制空间曲线 | 108 |
| 习题 5.2 | 110 |
| 第 6 章 多元函数微积分 | 111 |
| 6.1 多元函数 | 111 |
| 6.1.1 多元函数模型 | 111 |
| 6.1.2 定义多元函数 | 112 |
| 6.1.3 多元函数的求导运算 | 115 |
| 6.1.4 空间曲线的切线与法平面 | 119 |
| 6.1.5 曲面的切平面与法线 | 120 |
| 6.1.6 梯度与方向导数 | 121 |
| 6.1.7 多元函数的极值 | 124 |

| | |
|---------------------------------------|------------|
| 习题 6.1 | 126 |
| 6.2 多元函数的积分运算 | 129 |
| 6.2.1 重积分模型 | 129 |
| 6.2.2 重积分计算 | 129 |
| 6.2.3 重积分的应用 | 132 |
| 习题 6.2 | 136 |
| 6.3 曲线积分与曲面积分 | 137 |
| 6.3.1 曲线积分 | 137 |
| 6.3.2 曲面积分 | 139 |
| 习题 6.3 | 141 |
| 第 7 章 无穷级数 | 143 |
| 7.1 无穷级数 | 143 |
| 7.1.1 级数模型 | 143 |
| 7.1.2 级数及其运算 | 143 |
| 习题 7.1 | 147 |
| 7.2 幂级数与傅立叶级数 | 148 |
| 7.2.1 幂级数 | 148 |
| 7.2.2 傅立叶级数 | 153 |
| 习题 7.2 | 156 |
| 附录 Mathematica 软件常用的操作命令 | 157 |
| 一、基本操作 | 158 |
| 二、数学函数 | 159 |
| 三、公式处理 | 163 |
| 四、解方程 | 163 |
| 五、微积分 | 165 |
| 六、图形绘制 | 167 |
| 参考文献 | 174 |

第 1 章 函数与极限

1.1 Mathematica 简介

1.1.1 Mathematica 入门

Mathematica 是一款科学计算软件，它是由美国 Wolfram 公司研究开发的，其语法规则简单，操作语言与人们的日常语言非常接近，该软件很好地结合了数值和符号计算引擎、图形系统、编程语言、文本系统以及与其他应用程序的高级连接。它也是目前使用最广泛的数学软件之一，除数值计算外，由于 Mathematica 能给出问题的解析符号解，从而使得用户能用该软件方便地处理微积分、微分方程、线性代数和规划优化等各类问题。Mathematica 软件已在工程、科研、教学等各个领域被广泛使用。

Mathematica 的启动和运行方式如下：

双击 Wolfram 系统图标（或开始菜单），启动 Wolfram 系统，在屏幕上显示的是 Mathematica 笔记本窗口，开始使用图形界面，系统暂时取名“未命名-1”，直到用户保存时重新命名为止。

第一次启动 Wolfram 语言时，它会显示一个空的带有闪烁光标的笔记本。用户可以开始文字输入了，Wolfram 语言会自动诠释用户的文字输入。在笔记本中输入 Wolfram 语言命令，然后按下 **SHIFT**+**ENTER** 键使 Wolfram 语言处理用户的输入。用户可以使用图形界面的标准编辑特点输入一行或多行命令。按下 **SHIFT**+**ENTER** 键“告诉”Wolfram 语言已输入完毕。如果用户的键盘有数字键盘，也可以使用小键盘的 ENTER 键。

Wolfram 语言处理输入后，将用“ $\text{In}[n]:=$ ”标记输入，并用“ $\text{Out}[n]=$ ”标记输出。标签是自动添加的。

首先输入“ $2+3$ ”，然后按下 **SHIFT**+**ENTER** 键或按右边小键盘的 **ENTER** 键，这时系统开始计算并输出计算结果，并给输入和输出附上次序标识 $\text{In}[1]$ 和 $\text{Out}[1]$ ，注意 $\text{In}[1]$ 和 $\text{Out}[1]$ 是计算后才出现的；再输入第二个表达式，要求系统在区间 $[0, 2\pi]$ 上画出函数 $y=\sin x+\cos 3x$ 的图形，按 **SHIFT**+**ENTER** 键输出计算结果后，系统分别将其标识为 $\text{In}[2]$ 和 $\text{Out}[2]$ ，每次执行完计算（或操作）以后，建议栏会提供下一步计算（或操作）的建议，如图 1-1 所示。

在 Mathematica 的笔记本窗口，可以用这种交互方式完成各种运算，如函数作图、求极限、解方程等，在数学运算中可以使用标准符号，用小括号（不是中括号或大括号）显

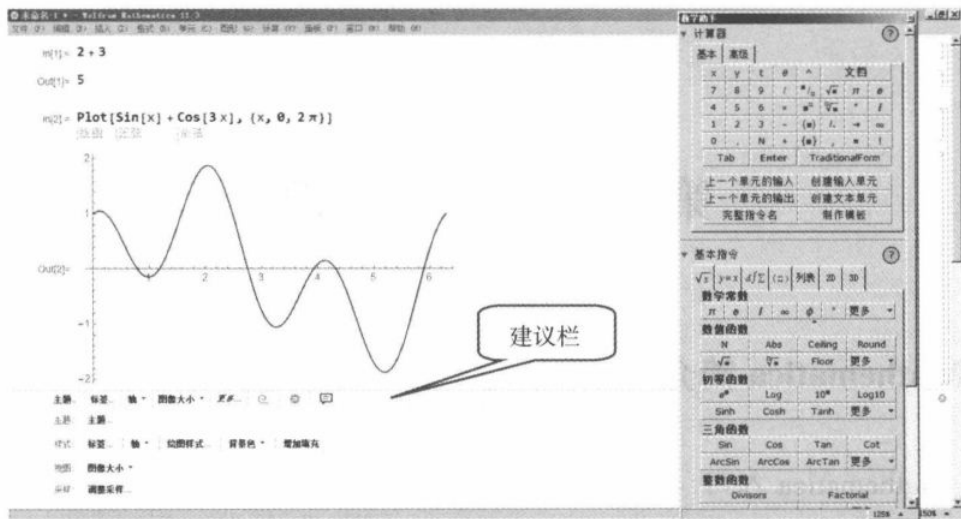


图 1-1

示不同层次的组合，用逗号分隔内置函数的参数，并将其置于方括号内。

必须注意的是：①Mathematica 严格区分大小写，一般地，内建函数的首写字母必须大写，有时一个函数名是由几个单词构成的，则每个单词的首写字母也必须大写，如：求局部极小值函数 FindMinimum[f[x], {x, x₀}]等。②在 Mathematica 中，函数名和自变量之间的分隔符是用方括号“[]”，而不是一般数学书上用的圆括号“()”。

完成各种计算后，点击“文件”→“退出”退出系统，如果文件未存盘，系统提示用户存盘，文件名以“.nb”作为后缀，称为笔记本文件。以后想使用本次保存的结果时可以通过“文件”→“打开”菜单读入，也可以直接双击它，系统自动调用 Mathematica 将它打开。

1.1.2 Mathematica 界面简介

本书使用 Mathematica 11.3 简体中文版，图 1-2 所示界面由笔记本界面、数学助手面板和主菜单组成。

1. 笔记本界面

在图 1-2 中，从简单计算到完整的排版文档和高级的动态界面，以及与 Wolfram 系统的标准交互界面，这一切都可以在该界面中完成。该系统详细设计了类似文字处理的过程，是一个强大的计算文档，它支持动态计算、任意的动态界面、完整的排版输入、图像输入、自动代码注释，是一个完整的高级程序界面，通过数千个精心组织的函数和选项来实现。

2. 数学助手面板

该面板从主菜单中的“面板”菜单中调出，由一系列分组集成的按钮组成。用鼠标单击一个按钮，就可以将它表示的符号输入当前的用户窗口中。该面板的基本指令集中，包括“数学常数和函数”“代数指令”“微积分指令”“矩阵指令”“表格、列表和向量指令”“2D 绘

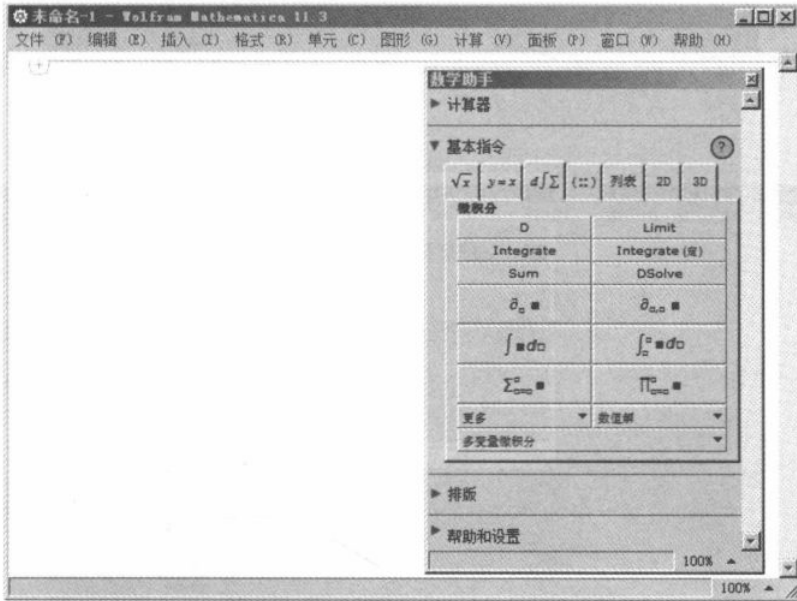


图 1-2

图指令”和“3D 绘图指令”，这些指令在高等数学学习和实验中会经常用到。利用面板输入，为输入提供了很大的便利。

3. 主菜单

位于图 1-2 上方的是主菜单。主菜单共 10 项，这里只介绍一些实用的菜单项。

1) “文件”菜单

单击主菜单中的“文件”菜单项，打开“新建”菜单项，再单击“笔记本”菜单项，新建一个用户窗口，如图 1-3 所示。

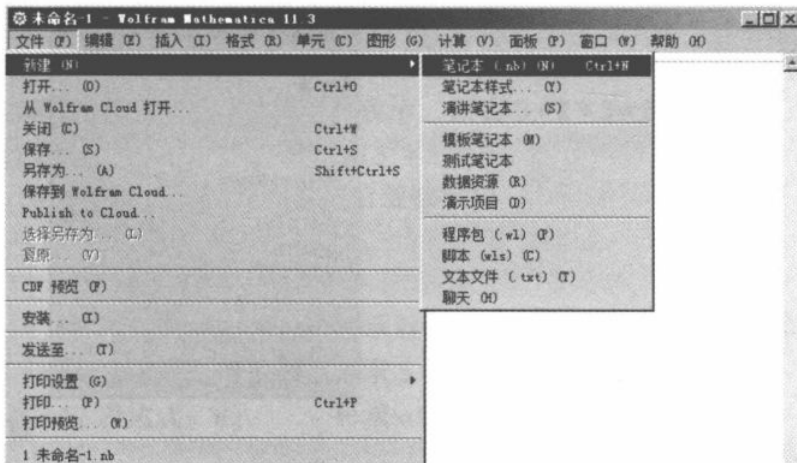


图 1-3

2) “面板”菜单

单击主菜单中的“面板”菜单项，再单击“数学助手”菜单项，打开“数学助手”面板，如图 1-4 所示。

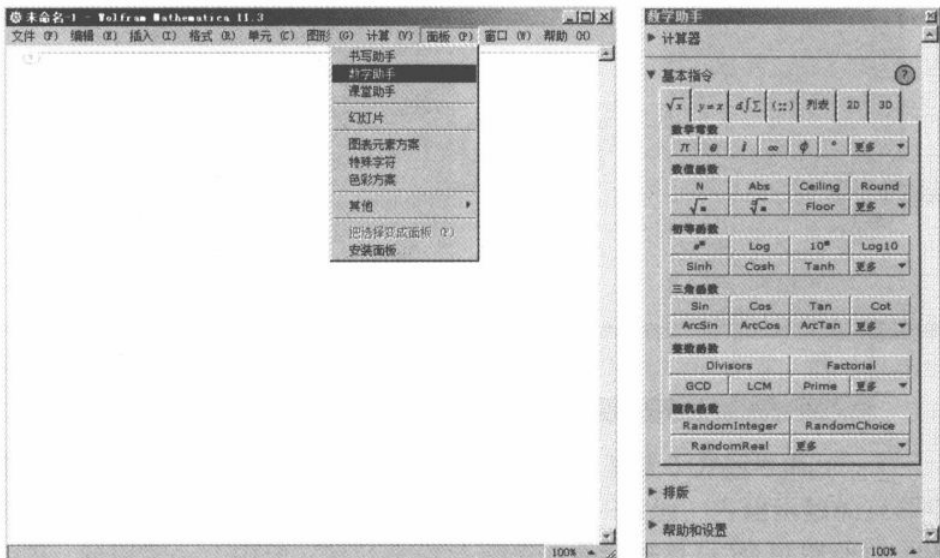


图 1-4

3) “帮助”菜单

单击主菜单中的“帮助”菜单项，再单击“Wolfram 参考资料”菜单项(图 1-5)或者按 F1 键，打开“Wolfram 语言与系统参考资料中心”首页，用户可以从参考资料中探索全部的函数，该语言有 5000 多个内置函数，如图 1-6 所示。

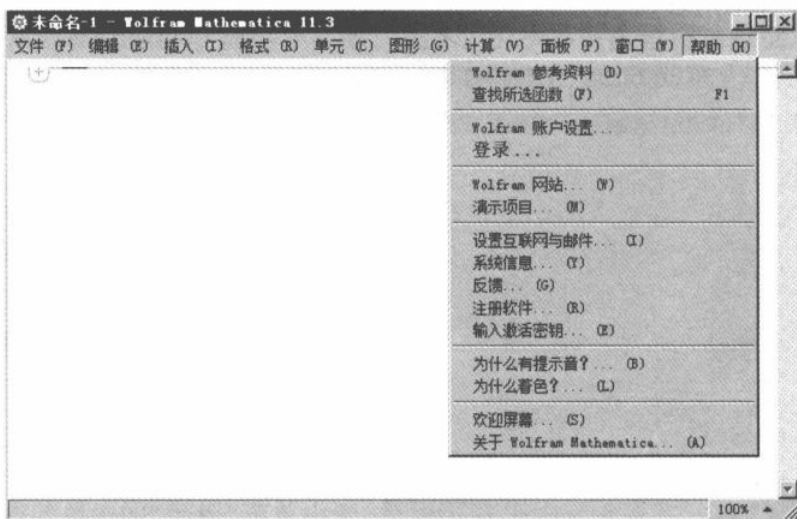


图 1-5



图 1-6

1.2 Mathematica 在初等数学中的应用

1.2.1 Mathematica 的基本运算

例 1.2.1 计算 $5^2 \times 2 - 10 \div (8 - 3)$.

解: `In[1]:=52×2-10/(8-3)`

`Out[1]=48`

说明: (1)乘法还可以用“*”和空格表示,如 $2 \times 3 = 2 * 3 = 2\ 3 = 6$.

(2)乘方还可以用“^”表示,如 $5^2 = 5^2$.

例 1.2.2 求 π^2 的近似值(保留 6 位有效数字).

解: `In[1]:=N[π2,6]`

`Out[1]=9.86960`

说明: (1)`N[]` 在 Mathematica 中表示近似运算, `N[]` 的语法格式及意义如下:

`N[表达式]` 可求 5 位有效数字的近似值;
`N[表达式, n]` 可求 n 位有效数字的近似值.

(2) Mathematica 中定义了一些常见的数学常数, 这些数学常数都是精确数, 表示的意义如下:

Pi 表示 $\pi = 3.14159 \dots$

| | |
|-----------|--------------------------|
| E | 自然对数的底 $e=2.71828\cdots$ |
| Degree | 1 度, $\pi/180$ 弧度. |
| I | 虚数单位 i . |
| Infinity | 无穷大 ∞ . |
| -Infinity | 负无穷大 $-\infty$. |

例 1.2.3 计算多项式 $3x^2-5x-2$ 和 x^2-4 的和、差、积、商.

$$\begin{aligned} \text{解: In}[1] := & (3x^2-5x-2)+(x^2-4) \\ & (3x^2-5x-2)-(x^2-4) \\ & (3x^2-5x-2)\times(x^2-4) \\ & (3x^2-5x-2)/(x^2-4) \end{aligned}$$

$$\text{Out}[1] = -6-5x+4x^2$$

$$\text{Out}[2] = 2-5x+2x^2$$

$$\text{Out}[3] = (-4+x^2)(-2-5x+3x^2)$$

$$\text{Out}[4] = \frac{-2-5x+x^2}{-4+x^2}$$

说明: Mathematica 提供一组按不同形式表示代数式的函数, 其命令的语法格式及意义:

| | | |
|--------|--------------------|-------------------------------------|
| 化简: | Simplify[expr] | 把表达式 expr 化为最简形式. |
| 展开: | Expand[expr] | 用来展开表达式 expr 中的乘积和正整数幂. |
| 因式分解: | Factor[poly] | 在整数上对一个多项式 poly 分解因式. |
| 合并同类项: | Collect[expr, x] | 把匹配 x 的对象的不同幂的项组合到一起. |
| 解方程: | Solve[expr, vars] | 求解以 vars 为变量的方程组或不等式组 expr. |
| 约化: | Reduce[expr, vars] | 求解关于 vars 的方程和不等式以及消除量词来约化表达式 expr. |
| 分解分式: | Apart[expr] | 把一个有理式 expr 分解为最简分式的和. |

例 1.2.4 展开多项式 $(-4+x^2)(-2-5x+3x^2)$.

$$\begin{aligned} \text{解: In}[1] := & \text{Expand}[(-4+x^2)(-2-5x+3x^2)] \\ \text{Out}[1] = & 8+20x-14x^2-5x^3+3x^4 \end{aligned}$$

例 1.2.5 对多项式 $3x^2-5x-2$ 因式分解.

$$\begin{aligned} \text{解: In}[1] := & \text{Factor}[3x^2-5x-2] \\ \text{Out}[1] = & (-2+x)(1+3x) \end{aligned}$$

例 1.2.6 解方程(组)和不等式.

$$(1) x^2 + ax + 1 = 0; \quad (2) \begin{cases} ax + y = 7, \\ bx - y = 1; \end{cases} \quad (3) x^2 - 7x - 8 < 0.$$

解: (1) In[1] := Solve[x^2+a x+1==0,x]

$$\text{Out}[1] = \left\{ \left\{ x \rightarrow -\frac{1}{2}(-a-\sqrt{-4+a^2}) \right\}, \left\{ x \rightarrow -\frac{1}{2}(-a+\sqrt{-4+a^2}) \right\} \right\}$$

$$(2) \text{In}[2] := \text{Solve}[\{a x+y==7,b x-y==1\},\{x,y\}]$$

$$\text{Out}[2] = \left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{8}{a+b}, y \rightarrow -\frac{a-7b}{a+b} \right\} \right\}$$

$$(3) \text{In}[3] := \text{Reduce}[x^2 - 7x - 8 < 0, x]$$

$$\text{Out}[3] = -1 < x < 8$$

说明：输入方程时必须用“==”代替“=”。

例 1.2.7 把 $\frac{x+3}{x^2-5x+6}$ 分解为最简分式的和。

$$\text{解：In}[1] := \text{Apart}\left[\frac{x+3}{x^2-5x+6}, x\right]$$

$$\text{Out}[1] = \frac{6}{-3+x} - \frac{5}{-2+x}$$

1.2.2 函数图形与性质

1. 定义的函数

定义函数命令的语法格式及意义：

$f[x_] = \text{expr}$ 函数名为 f ，自变量为 x ， expr 是表达式。在执行时会把 expr 中的 x 都换为 f 的自变量 x (不是 x_0)。

例 1.2.8 定义 $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$ ，计算 $f(3)$ 和 $f\left(\frac{1}{3}\right)$ 。

$$\text{解：In}[1] := f[x_] = -2 - 5x + 3x^2$$

$$\text{Out}[1] = -2 - 5x + 3x^2$$

$$\text{In}[2] := f[x] /. x \rightarrow 3$$

$$\text{Out}[2] = 10$$

$$\text{In}[3] := f\left[\frac{1}{3}\right]$$

$$\text{Out}[3] = -\frac{10}{3}$$

说明：(1) $f[x] /. x \rightarrow x_0$ 或 $f[x_0]$ 表示变量替换运算，即用 x_0 替换 $f(x)$ 中的 x 。

(2) 当用户使用完一个定义函数时，最好清除该函数定义。否则，当在同一 Mathematica 进程的后面使用同名函数，但用于不同的目的时，将会遇到麻烦。用户可以用 $\text{Clear}[f]$ 清除 f 函数或符号的所有定义。

1) 求函数的定义域、值域

(1) 求函数的定义域，其命令的语法格式及意义：

$\text{FunctionDomain}[f, x]$ 求变量为 x 的实函数 f 的最大定义域。

(2) 求函数的值域，其命令的语法格式及意义：

$\text{FunctionRange}[f, x, y]$ 求变量为 x 的实函数 f 的值域，结果以 y 的形式返回。

(3) 绘制数轴图，其命令的语法格式及意义：

NumberLinePlot[pred, x] 绘制数轴图来表明区域 pred.

例 1.2.9 求函数 $y = \frac{\sqrt{3-x}}{2-x}$ 定义域, 并绘制定义域数轴图.

解: In[1] := FunctionDomain[$\frac{\sqrt{3-x}}{2-x}$, x]

NumberLinePlot[% , x, AxesStyle → Arrowheads[0.05]]

Out[1] = $x < 2 \parallel 2 < x \leq 3$

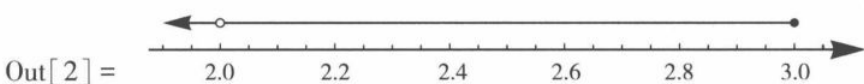


图 1-7

定义域数轴图如图 1-7 所示.

说明: Out[1] 后面的“ \parallel ”表示逻辑“或”.

例 1.2.10 求函数 $y = \frac{x}{1+x^2}$ 的值域.

解: In[1] := FunctionRange[$\frac{x}{1+x^2}$, x, y]

Out[1] = $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$

2) 构造函数

例 1.2.11 已知 $f(x) = x - 1$, $g(x) = x^2$, 求

(1) $f[g(x)]$ 、 $g[f(x)]$; (2) $g(\sin x)$; (3) $2[f(x)]^2 \cdot g(x) - x^4$.

解: In[1] := f[x_] = x - 1

g[x_] = x²

Out[1] = -1 + x

Out[2] = x²

(1) In[3] := f[g[x]]

g[f[x]]

Out[3] = -1 + x²

Out[4] = (-1 + x)²

(2) In[5] := g[Sin[x]]

Out[5] = Sin[x]²

(3) In[6] := 2 (f[x])² * g[x] - x⁴

Out[6] = 2 (-1 + x)² x² - x⁴

In[7] := Expand[2 (-1 + x)² x² - x⁴]

Out[7] = 2 x² - 4 x³ + x⁴

3) 反函数

(1) 求反函数, 其命令的语法格式及意义:

`InverseFunction[f][x]` 表示纯函数 f 的反函数, x 为反函数自变量.

(2) 纯函数是一种没有函数名字的函数, 其命令的语法格式及意义:

`Function[自变量, 函数表达式]` 纯函数常常用缩略式表示, 其中, 用 `&` 代表 `Function`, 用 `#` 代表自变量.

例 1.2.12 已知 $f(x) = \ln x$, 求: (1) 给出 $f(x)$ 的纯函数; (2) $f(x)$ 的反函数; (3) 画出原函数和反函数的图形.

解: `In[1] := f = Log[#] &; InverseFunction[f][x]`

`Out[1] = ex`

`In[2] := Plot[{Log[x], ex, x}, {x, -2., 2.}, PlotRange -> 2, AxesStyle -> Arrowheads
[0.04]]`

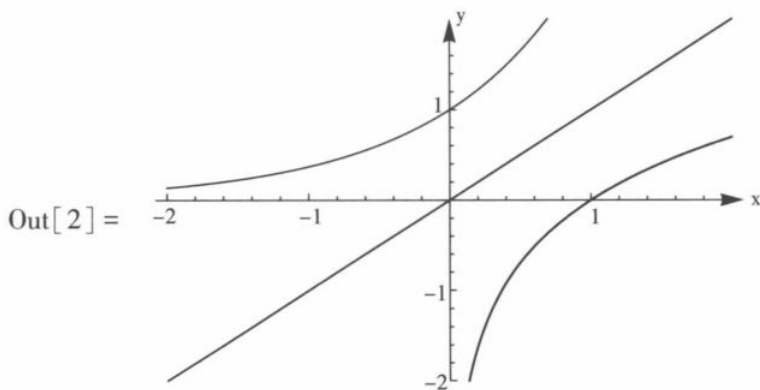


图 1-8

原函数和反函数的图形如图 1-8 所示.

例 1.2.13 已知 $f(x) = y = \frac{x+1}{x-1}$, 求 $f^{-1}(x)$.

解: `In[1] := InverseFunction[$\frac{a\#+b}{c\#+d}$ &][x]`

`Out[1] = $\frac{-b+d x}{a-c x}$`

2. 用 Mathematica 作平面曲线

1) 作函数 $y=f(x)$ 的图形

在区间 $x \in (a, b)$ 范围作函数 $y=f(x)$ 的图形的语法格式:

`Plot[f(x), {x, a, b}]`

例 1.2.14 作出函数 $y = \sin x + \cos 3x$ 在区间 $x \in [0, 2\pi]$ 上的图形.

解: `In[1] := Plot[Sin[x] + Cos[3x], {x, -3\pi, 4\pi}, AxesStyle -> Arrowheads[0.05]]`

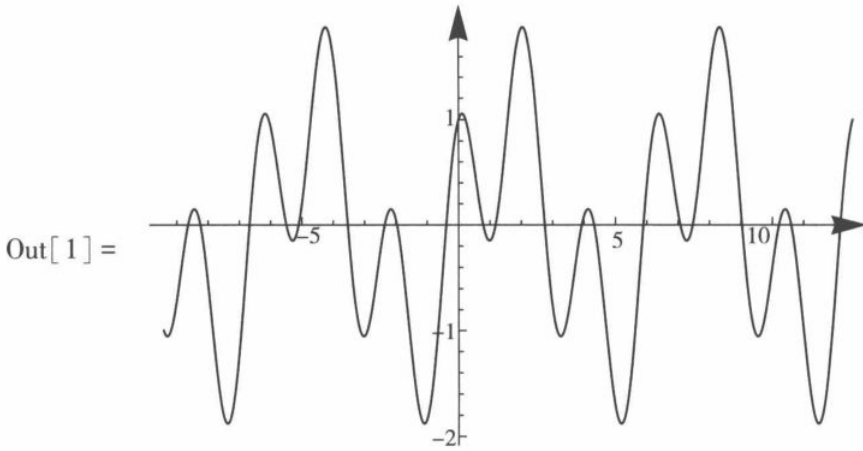


图 1-9

函数在区间 $x \in [0, 2\pi]$ 上的图形如图 1-9 所示.

用传统刻度作所给函数的图形:

```
In[2] := Plot[Sin[x]+Cos[3x], {x, -3π, 4π}, Ticks →
  {Table[i, {i, -3π, 4π, π}], {-2, -1, 0, 1, 2}}, AxesStyle → Arrowheads[0.05]]
```

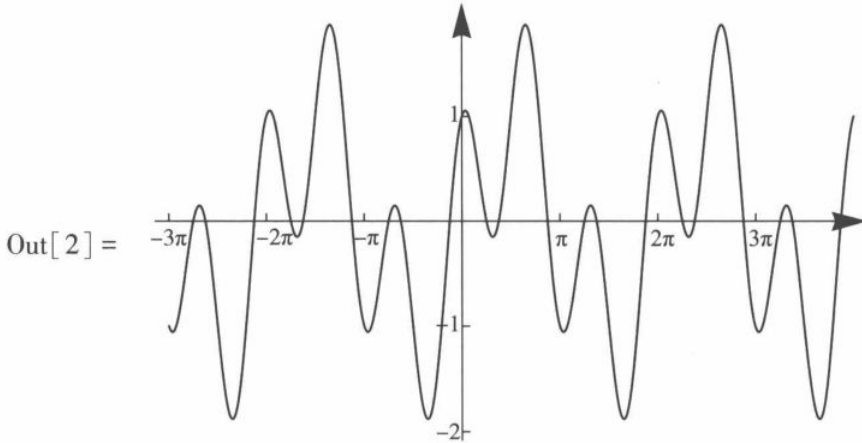


图 1-10

用传统刻度作所给函数图形如图 1-10 所示.

说明: In[2] 中调用了 Ticks 参数和后面要介绍的 Table 命令函数.

2) 作曲线 $F(x, y) = 0$ 的图形.

在 $x \in (a, b)$ 和 $y \in (c, d)$ 范围作曲线 $F(x, y) = 0$ 的图形的语法:

```
ContourPlot[F(x,y)=0, {x,a,b}, {y,c,d}]
```

例 1.2.15 画单位圆: $x^2 + y^2 = 1$, 其中 $x \in (-1, 1)$, $y \in (-1, 1)$.

解: In[1] := ContourPlot[x²+y²=1, {x,-1,1}, {y,-1,1},