

舰艇武器控制中的 随机过程应用基础

卢发兴 刘树衍 贾正荣 编著



科学出版社

舰艇武器控制中的随机 过程应用基础

卢发兴 刘树衍 贾正荣 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书重点分析军事领域常见随机过程的重要概念和公式。全书内容包括随机过程的分布律和概率特性、相关函数属性、随机过程连续性、平稳和广义平稳随机过程、随机函数的谱密度和谱分解、几类重要的随机过程、随机过程的导数、积分线性运算、随机序列等随机过程的基础知识,连续和离散线性动态系统输出端上随机过程的概率特性,平稳正态随机过程的仿真算法,随机穿越,随机场,连续和离散线性最优动态系统,随机线性系统最优控制参数,随机非线性系统线性化,随机过程统计分析等。

本书可作为高等院校理工科专业高年级本科生及研究生的教材,也可供相关专业的教师及工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

舰艇武器控制中的随机过程应用基础 / 卢发兴等编著. —北京: 科学出版社, 2019.3

ISBN 978-7-03-058775-6

I. ①舰… II. ①卢… III. ①军用船-武器装备-随机过程-控制-研究 IV. ①E925

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 209319 号

责任编辑: 魏英杰 罗 娟 / 责任校对: 郭瑞芝

责任印制: 吴兆东 / 封面设计: 铭轩堂

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京中石油彩色印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 3 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5

2019 年 3 月第一次印刷 印张: 25 1/4

字数: 507 000

定价: 168.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

随机过程是研究随机现象的一门基础学科,应用广泛,海军装备认证、研制、维修保障、作战等都需要随机过程应用理论,只有熟悉掌握随机过程的基本理论和分析方法,才能更好地研究和探索舰艇武器控制领域的新技术和新方法。

本书根据军事领域应用的特点,以舰艇武器控制领域为例,力求内容的广度和深度均能满足舰艇武器控制领域应用的需求;重点强调如何使用定理和公式,不追求数学上的严格性;对一些重要概念和公式的理解,采用实例分析和案例应用的形式,力求兼顾随机过程的基本理论和工程应用两个方面。

全书共 10 章。第 1 章介绍随机过程的基础知识,包括随机过程的分布律和概率特性,相关函数属性,随机过程连续性,平稳随机过程和广义平稳随机过程,随机函数的谱密度和谱分解,几类重要随机过程,随机过程的导数、积分线性运算的概率特性,随机序列等,重点分析一些基本概念的运用,为随机过程基本理论在舰艇武器控制领域的应用打下基础。第 2 章介绍连续和离散线性动态系统输出端随机过程的概率特性,包括输出端随机过程过渡态和稳态方程的求解方法,以及相应的概率特性、输出端随机过程的谱密度和谱分解、输出端为多个随机过程的求解方法等,并通过相应的实例分析,使读者掌握相应的方法。第 3 章在介绍两种平稳正态随机过程仿真算法的基础上,给出舰艇武器控制中典型随机过程的仿真实例。第 4 章介绍随机穿越的基本概念,以及相应的概率特性计算公式,并通过实例分析给出相应计算公式的使用步骤。第 5 章介绍随机场的概念、概率特性和谱密度,并给出相应的实例。第 6 章介绍线性动态系统最优化准则、维纳-霍普夫积分方程、线性动态系统最优脉冲过渡函数和传递函数的两种求解方法及其使用步骤;同时介绍利用频域法确定最优系统传递函数,给出典型结构最优调节器的求解方法;最后通过应用案例,完整地分析该方法的使用步骤。第 7 章介绍离散线性最优动态系统,包括求解最优传递函数算法、离散线性系统有限记忆滤波器用于最优脉冲过渡函数和最优参数估计的求解方法。第 8 章通过实例介绍解析法和随机法确定随机线性系统最优控制参数的步骤;同时重点介绍非梯度随机搜索法,并通过一个应用案例给出确定最优控制参数的思路和步骤。第 9 章简单介绍舰艇武器控制中常用的随机非线性系统线性化方法,包括直接线性化法、统计线性化法和统计谐波线性化法。第 10 章介绍随机过程的统计理论,包括非平稳随机过程的概率特性估计、各态历经平稳随机过程的概率特性估计、平稳随机

过程的光谱特性估计和平稳随机过程相关函数的参数估计。

本书的出版得到军队“2110工程”建设项目和海军重点建设课程项目的支持，同时得到许多同仁和研究生的帮助，在此一并表示衷心的感谢！

限于作者水平，书中不足之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

作 者

2018年8月

目 录

前言

第 1 章 随机过程基础	1
1.1 随机过程的分布律和概率特性	1
1.1.1 一维随机过程的分布律和概率特性	1
1.1.2 多维随机过程的分布律和概率特性	4
1.2 相关函数属性	8
1.3 随机过程的连续性	13
1.4 平稳随机过程和广义平稳随机过程	15
1.4.1 平稳随机过程	15
1.4.2 广义平稳随机过程	17
1.5 随机函数的谱密度和谱分解	18
1.5.1 随机函数的谱密度	18
1.5.2 拉普拉斯变换	21
1.5.3 随机函数的谱分解	24
1.5.4 实例分析	27
1.6 几类重要随机过程	32
1.6.1 正态随机过程	32
1.6.2 马尔可夫随机过程	34
1.6.3 独立增量随机过程	35
1.6.4 独立随机过程	38
1.6.5 实例分析	40
1.7 随机过程的导数、积分线性运算的概率特性	42
1.7.1 导数线性运算的概率特性	42
1.7.2 积分线性运算的概率特性	49
1.7.3 实例分析	53
1.8 随机序列	62
1.8.1 随机序列的基本概率特性	62
1.8.2 平稳随机序列	63
1.8.3 随机序列微积分计算	65

1.8.4	随机序列的谱密度	67
1.8.5	实例分析	70
第 2 章	线性动态系统输出端随机过程的概率特性	73
2.1	连续线性系统	73
2.1.1	输出端随机过程的求解及概率特性	73
2.1.2	输出端随机过程的谱密度及谱分解	79
2.1.3	输出端为多个随机过程的求解	88
2.1.4	实例分析	92
2.2	离散线性系统	100
2.2.1	输出端随机序列的求解及谱密度	100
2.2.2	实例分析	104
第 3 章	平稳正态随机过程的仿真算法	110
3.1	通用仿真算法	110
3.2	典型平稳正态随机过程的仿真	122
3.2.1	实例 1	122
3.2.2	实例 2	124
3.2.3	实例 3	130
3.2.4	实例 4	134
3.3	成型滤波器的仿真算法	138
第 4 章	随机穿越	142
4.1	随机穿越的概率特性	142
4.2	随机穿越的分布规律	150
4.3	实例分析	158
第 5 章	随机场	166
5.1	随机场的概率特性	166
5.2	随机场的谱密度	169
5.3	多维随机场特性	172
5.4	实例分析	176
第 6 章	连续线性最优动态系统	181
6.1	线性动态系统最优化准则	181
6.2	维纳-霍普夫积分方程	182
6.3	最优脉冲过渡函数和传递函数的第一种求解方法	188
6.4	最优脉冲过渡函数和传递函数的第二种求解方法	196
6.5	两种求解方法实例分析	207

6.6 频域法确定最优系统传递函数	223
6.6.1 求解最优系统传递函数	223
6.6.2 典型结构最优调节器	229
6.6.3 应用实例	231
第7章 离散线性最优动态系统	247
7.1 求解最优传递函数算法	247
7.2 离散线性系统有限记忆滤波器	251
7.2.1 最优脉冲过渡函数	251
7.2.2 最优参数估计	256
第8章 随机线性系统最优控制参数	261
8.1 解析法确定随机线性系统最优控制参数	261
8.1.1 随动系统输出误差	261
8.1.2 无约束随动系统参数优化	264
8.1.3 有约束随动系统参数优化	265
8.1.4 随机特性变化下的随动系统参数优化	267
8.2 非梯度随机搜索法确定随机系统的最优控制参数	269
8.2.1 随机系统参数优化问题	269
8.2.2 非梯度随机搜索法	271
8.2.3 应用实例	282
第9章 随机非线性系统线性化	287
9.1 直接线性化法	287
9.2 统计线性化法	288
9.2.1 统计方差等效线性化法	288
9.2.2 统计相关等效线性化法	288
9.2.3 统计平均线性化法	291
9.2.4 统计折合线性化法	291
9.2.5 统计频谱等效线性化法	291
9.3 统计谐波线性化法	292
第10章 随机过程统计分析	294
10.1 非平稳随机过程的概率特性估计	294
10.1.1 不相关样本下的估计	296
10.1.2 相关样本下的估计	300
10.1.3 一个样本下的估计	311
10.1.4 实例分析	317

10.2	各态历经平稳随机过程的概率特性估计	323
10.2.1	广义上的稳定随机过程概率特性估计通式	323
10.2.2	各态历经性随机过程概率特性估计	324
10.2.3	概率分布密度估计	337
10.2.4	实例分析	340
10.3	平稳随机过程的光谱特性估计	349
10.3.1	谱密度、谱密度函数和单向谱密度	350
10.3.2	谱密度估计	352
10.3.3	谱密度的估计平滑	363
10.4	平稳随机过程相关函数的参数估计	367
10.4.1	近似相关函数	367
10.4.2	第一种近似相关函数的参数估计	369
10.4.3	第二种近似相关函数的参数估计	377
10.4.4	实例分析	384
参考文献		394

第 1 章 随机过程基础

在舰艇武器控制中,很多研究对象的参数都是随机变量。例如,舰艇在海浪中的俯仰角和倾斜角,导弹在扰动作用下的空中飞行位置和角度,雷达站对运动目标的测量误差等,这些都是连续型随机过程的例子。连续时间的离散型随机过程的典型例子是生灭过程,广泛用于舰艇防空、武器系统保障、器材库存等排队系统中。为了研究这些随机过程的特性,本章首先给出随机过程的基本概念和理论。

没有特别说明时,全书自变量 t 认为是连续的。这样,随机过程就是随机函数 $X(t)$ 。本书将注意力集中在连续型随机过程的理论研究和实际运用上,一些共同的结论将推广到连续时间的离散型随机过程中。

1.1 随机过程的分布律和概率特性

1.1.1 一维随机过程的分布律和概率特性

在自变量 t 取任意固定值时,随机过程 $X(t)$ 就是随机变量,概率分布函数 $F(x)$ 用于描述随机变量 X 的特性。对于随机过程 $X(t)$, 概率分布函数能像概率事件 $(X < x)$ 一样被确定,通过 $F_1(x; t)$ 来标识,称作一维概率分布函数,即

$$F_1(x; t) = P[X(t) < x] \quad (1.1)$$

自变量 t 可以取任意值。因此,对于随机过程 $X(t)$, 一维概率分布函数取决于 x 和 t 。

对于连续型随机过程 $X(t)$, 它在自变量 t 取固定值时是连续随机变量。一维概率分布函数 $F_1(x; t)$ 是连续且对全部或者几乎全部的 x 都是可微的。这个随机过程的一维概率分布密度 $f_1(x; t)$ 的求取类似于随机变量的概率分布密度,对概率分布函数的 x 求一阶偏导,即

$$f_1(x; t) = \frac{\partial F_1(x; t)}{\partial x} \quad (1.2)$$

在已知概率分布密度时,对于随机过程 $X(t)$, 可以求出一维特征函数 $E_1(u; t)$ 。根据这个函数的定义,可以得到下式,即

$$E_1(u; t) = M[e^{iux(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f_1(x; t) dx \quad (1.3)$$

对于离散型随机过程 $X(t)$, 自变量 t 取任意固定值时, 有 n 个可能的状态, 即 $x_k(t)$ ($k=1, 2, \dots, n$)。此时, 其一维概率分布函数为

$$F_1(x; t) = \sum_{k=1}^n P[X(t) = x_k(t)] \varepsilon[x - x_k(t)] \quad (1.4)$$

其中, $\varepsilon(z)$ 是阶跃函数, 即

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ 1, & z > 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

在这种情况下, 一维概率分布密度为

$$f_1(x; t) = \sum_{k=1}^n P[X(t) = x_k(t)] \delta[x - x_k(t)] \quad (1.6)$$

其中, $\delta(z)$ 是狄拉克函数, 并且

$$\delta(z) = \varepsilon'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izt} dt = \begin{cases} \infty, & z = 0 \\ 0, & z \neq 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

其一维特征函数具有如下形式, 即

$$E_1(u; t) = \sum_{k=1}^n P[X(t) = x_k(t)] e^{iux_k(t)} \quad (1.8)$$

对于整数随机过程 $X(t)$, 它的可能函数值是 $0 \sim n$ 的非负整数, 可以用函数 $G_1(u; t)$ 来代替 $E_1(u; t)$, 即

$$G_1(u; t) = M[u^{X(t)}] = \sum_{k=0}^n P[X(t) = k] u^k \quad (1.9)$$

当随机过程 $X(t)$ 是混合型随机变量时, 一维概率分布函数可以表示为式(1.1)和式(1.4)的函数之和, 而其一维概率分布密度可表示为式(1.2)和式(1.6)的函数之和。

知道了一维分布律, 下面分析随机过程 $X(t)$ 的一维概率特性, 即随机过程的数学期望 $\bar{x}(t) = M[X(t)]$ 、方差 $D[X(t)] = M\{[X(t) - \bar{x}(t)]^2\}$ 、 s 阶原点矩 $m_s[X(t)] = M\{[X(t)]^s\}$ 和 s 阶中心矩 $\mu_s[X(t)] = M\{[X(t) - \bar{x}(t)]^s\}$ 。

在已知一维概率分布密度 $f_1(x; t)$ 时, 随机过程 $X(t)$ 的 s 阶原点矩为

$$M\{[X(t)]^s\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f_1(x; t) dx \quad (1.10)$$

如果一维特征函数 $E_1(u;t)$ 为已知, 则

$$M\{[X(t)]^s\} = (-i)^s \frac{\partial^s E_1(u;t)}{\partial u^s} \bigg|_{u=0} \quad (1.11)$$

根据这些表达式, 当 $s=1$ 时, 可以得到随机过程 $X(t)$ 的数学期望 $\bar{x}(t)$ 的计算公式, 即

$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x;t) dx \quad (1.12)$$

$$\bar{x}(t) = -i \frac{\partial E_1(u;t)}{\partial u} \bigg|_{u=0} \quad (1.13)$$

对于整数随机过程 $X(t)$, 其数学期望为

$$\bar{x}(t) = \frac{\partial G_1(u;t)}{\partial u} \bigg|_{u=1} \quad (1.14)$$

当随机过程 $X(t)$ 的数学期望 $\bar{x}(t)$ 不为 0 时, 在实际应用中常常将其进行变换, 变换为零均值随机过程 $\overset{0}{X}(t)$, 即

$$\overset{0}{X}(t) = X(t) - \bar{x}(t) \quad (1.15)$$

在已知一维概率分布密度时, $X(t)$ 的 s 阶中心矩为

$$M\{[\overset{0}{X}(t)]^s\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \bar{x}(t)]^s f_1(x;t) dx \quad (1.16)$$

s 阶中心矩可用不超过 s 阶的原点矩表示。

二阶中心矩是随机过程 $X(t)$ 的方差, 即

$$D[X(t)] = M\{[\overset{0}{X}(t)]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \bar{x}(t)]^2 f_1(x;t) dx \quad (1.17)$$

方差可用二阶原点矩和数学期望表示, 即

$$D[X(t)] = M\{[X(t)]^2\} - [\bar{x}(t)]^2 \quad (1.18)$$

对于零均值随机过程 $\overset{0}{X}(t)$, 一维特征函数为

$$\overset{0}{E}_1(u;t) = M[e^{iu\overset{0}{X}(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu[x - \bar{x}(t)]} f_1(x;t) dx \quad (1.19)$$

即

$$\overset{0}{E}_1(u;t) = e^{-iu\bar{x}(t)} E_1(u;t) \quad (1.20)$$

借助这个函数, s 阶中心矩可以根据下式求出, 即

$$M\{[\overset{0}{X}(t)]^s\} = (-i)^s \frac{\partial^s \overset{0}{E}_1(u;t)}{\partial u^s} \bigg|_{u=0} \quad (1.21)$$

其中, 随机过程的方差为

$$D[X(t)] = -\frac{\partial^2 \overset{0}{E}_1(u;t)}{\partial u^2} \bigg|_{u=0} = -\frac{\partial^2 \overset{0}{E}_1(u;t)}{\partial u^2} \bigg|_{u=0} - [\bar{x}(t)]^2 \quad (1.22)$$

对于整数随机过程 $X(t)$, 其方差为

$$D[X(t)] = \frac{\partial^2 G_1(u;t)}{\partial u^2} \bigg|_{u=1} + \bar{x}(t) - [\bar{x}(t)]^2 \quad (1.23)$$

1.1.2 多维随机过程的分布律和概率特性

当固定随机过程 $X(t)$ 的自变量取两个不同值 t 和 t' 时, $\{X(t), X(t')\}$ 为二维随机变量, 其二维概率分布函数是 $[X(t) < x, X(t') < x']$ 事件的概率。应用到随机过程 $X(t)$, 这个函数可以用符号 $F_2(x, x'; t, t')$ 标记, 称作二维概率分布函数, 即

$$F_2(x, x'; t, t') = P[X(t) < x; X(t') < x'] \quad (1.24)$$

显然, 事件 $X(t') < \infty$ 的概率为 1, 于是有

$$F_2(x, \infty; t, t') = F_1(x; t) \quad (1.25)$$

通常情况下, 二维概率分布函数取决于 x 、 x' 、 t 和 t' 。对于连续型随机过程, 这个函数对于 x 和 x' 是连续的, 并且对于这些自变量几乎全部是可微的。随机过程 $X(t)$ 的二维概率分布密度可通过对 x 和 x' 的二阶混合偏导确定, 即

$$f_2(x, x'; t, t') = \frac{\partial^2 F_2(x, x'; t, t')}{\partial x \partial x'} \quad (1.26)$$

因此有

$$f_1(x; t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x, x'; t, t') dx' \quad (1.27)$$

其二维特征函数为

$$E_2(u, v; t, t') = M[e^{iuX(t)+ivX(t')}] = \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux+ivx'} f_2(x, x'; t, t') dx dx' \quad (1.28)$$

对于零均值随机过程 $\overset{0}{X}(t)$, 其二维特征函数为

$$\overset{0}{E}_2(u, v; t, t') = M[e^{iu\overset{0}{X}(t)+iv\overset{0}{X}(t')}] = e^{-iu\bar{x}(t)-iv\bar{x}(t')} E_2(u, v; t, t') \quad (1.29)$$

显然, 式(1.30)和式(1.31)总是成立的, 即

$$E_2(u, 0; t, t') = E_1(u; t) \quad (1.30)$$

$$\overset{0}{E}_2(u, 0; t, t') = \overset{0}{E}_1(u; t) \quad (1.31)$$

如果随机过程 $X(t)$ 是离散型随机过程, 那么其二维概率分布函数、概率分布密度和特征函数为

$$F_2(x, x'; t, t') = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n P[X(t) = x_k(t); X(t') = x_j(t')] \varepsilon[x - x_k(t)] \varepsilon[x' - x_j(t')] \quad (1.32)$$

$$f_2(x, x'; t, t') = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n P[X(t) = x_k(t); X(t') = x_j(t')] \delta[x - x_k(t)] \delta[x' - x_j(t')] \quad (1.33)$$

$$E_2(u, v; t, t') = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n P[X(t) = x_k(t); X(t') = x_j(t')] e^{iu x_k(t) + iv x_j(t')} \quad (1.34)$$

对于整数随机过程 $X(t)$, 二维特征函数可以用 $G_2(u, v; t, t')$ 代替 $E_2(u, v; t, t')$, 即

$$G_2(u, v; t, t') = M[u^{X(t)} v^{X(t')}] = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n P[X(t) = k; X(t') = j] u^k v^j \quad (1.35)$$

对于这个函数, 式(1.36)总是成立的, 即

$$G_2(u, 1; t, t') = G_1(u; t) \quad (1.36)$$

在已知二维分布律时, 可以求出随机过程 $X(t)$ 的二维概率特性。阶数为 (s, r) 的二维原点矩和中心矩可由式(1.37)和式(1.38)求出, 即

$$M\{[X(t)]^s [X(t')]^r\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^s x'^r f_2(x, x'; t, t') dx dx' = (-i)^{s+r} \frac{\partial^{s+r} E_2(u, v; t, t')}{\partial u^s \partial v^r} \Big|_{u=v=0} \quad (1.37)$$

$$\begin{aligned} M\{[\overset{0}{X}(t)]^s [\overset{0}{X}(t')]^r\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - \bar{x}(t)]^s [x' - \bar{x}(t')]^r f_2(x, x'; t, t') dx dx' \\ &= (-i)^{s+r} \frac{\partial^{s+r} \overset{0}{E}_2(u, v; t, t')}{\partial u^s \partial v^r} \Big|_{u=v=0} \end{aligned} \quad (1.38)$$

对于两个随机变量 (X, Y) , 二阶混合中心矩 $k_{x,y} = M(\overset{0}{X}\overset{0}{Y})$ 是重要的数字特性, 称为相关矩。对于随机过程 $X(t)$, 相关矩可用符号 $K_x(t, t')$ 表示, 称为自相关函数, 即

$$K_x(t, t') = M[\overset{0}{X}(t)\overset{0}{X}(t')] = M\{[X(t) - \bar{x}(t)][X(t') - \bar{x}(t')]\} \quad (1.39)$$

可以转换为

$$K_x(t, t') = M[X(t)X(t')] - \bar{x}(t)\bar{x}(t') \quad (1.40)$$

在已知二维概率分布密度时, 自相关函数可以按式(1.41)确定, 即

$$K_x(t, t') = \int \int_{-\infty}^{\infty} xx' f_2(x, x'; t, t') dx dx' - \bar{x}(t)\bar{x}(t') \quad (1.41)$$

当已知随机过程 $X(t)$ 或者 $X(t)$ 的二维特征函数时, 自相关函数为

$$K_x(t, t') = - \frac{\partial^2 E_2(u, v; t, t')}{\partial u \partial v} \Big|_{u=v=0} = - \frac{\partial^2 E_2(u, v; t, t')}{\partial u \partial v} \Big|_{u=v=0} - \bar{x}(t)\bar{x}(t') \quad (1.42)$$

如果 $X(t)$ 是整数随机过程, 那么在确定自相关函数时, 可以用到如下表达式, 即

$$K_x(t, t') = \frac{\partial^2 G_2(u, v; t, t')}{\partial u \partial v} \Big|_{u=v=1} - \bar{x}(t)\bar{x}(t') \quad (1.43)$$

当随机过程 $X(t)$ 的自变量 t 取任意给定的 n 个不同值 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 时, 假定 $X_j = X(t_j) (j=1, 2, \dots, n)$, 由此得到的由 n 个随机变量构成的系统 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 也完全可以用概率分布函数进行描述。这个概率分布函数就是事件 $(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n)$ 的概率。对于随机过程 $X(t)$, 这个函数称为 n 维概率分布函数, 即

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P[X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, \dots, X(t_n) < x_n] \quad (1.44)$$

数值 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 可以任意选择, 通常情况下, n 维概率分布函数取决于 $2n$ 个自变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 和 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 。若式(1.44)的 n 个自变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 中的任意 m 个自变量等于无穷, 则这个概率分布函数降为 $n-m$ 维。

知道了 n 维概率分布函数, 就可以按式(1.45)求出随机过程 $X(t)$ 的 n 维概率分布密度, 即

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \quad (1.45)$$

当已知概率分布密度时, 可以计算出 n 维特征函数, 即

$$\begin{aligned} E_n(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n) &= M \left\{ \exp \left[i \sum_{j=1}^n u_j X(t_j) \right] \right\} \\ &= \int \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \sum_{j=1}^n u_j x_j} f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \end{aligned} \quad (1.46)$$

借助 n 维分布律可得到随机过程 $X(t)$ 的 n 维任意阶 $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ 原点矩。这些概率特性的计算公式类似于 n 维随机变量系统相应原点矩的公式, 即

$$\begin{aligned}
 & M\{[X(t_1)]^{s_1}[X(t_2)]^{s_2}\cdots[X(t_n)]^{s_n}\} \\
 &= \int \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{s_1} x_2^{s_2} \cdots x_n^{s_n} f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\
 &= (-i)^{\sum_{j=1}^n s_j} \left. \frac{\partial^{\sum_{j=1}^n s_j} E_n(u_1, u_2, \cdots, u_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \cdots \partial x_n^{s_n}} \right|_{u_1=u_2=\cdots=u_n=0}
 \end{aligned} \quad (1.47)$$

类似式(1.38), 可得随机过程 $X(t)$ 的 n 维任意阶 $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 中心矩, 并且零均值随机过程 $X(t)$ 的 n 维特征函数的计算公式类似于式(1.29)。

某些情况应用的不仅仅是一个随机过程 $X(t)$, 而是两个互相联系的随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的集合 $\{X(t), Y(t)\}$ 。可以在固定时刻 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 研究这个系统的第一个分量, 而在其他时刻 $t'_1, t'_2, \cdots, t'_m$ 研究第二个分量。类似于式(1.44), 对于集合 $\{X(t), Y(t)\}$, 可得 (n, m) 维概率分布函数, 即

$$\begin{aligned}
 & F_{n,m}(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_m; t_1, \cdots, t_n; t'_1, \cdots, t'_m) \\
 &= P[X(t_1) < x_1, \cdots, X(t_n) < x_n, Y(t'_1) < y_1, \cdots, Y(t'_m) < y_m]
 \end{aligned} \quad (1.48)$$

当 $m=0$ 时, 这个函数与 $X(t)$ 的 n 维概率分布函数吻合; 当 $n=0$ 时, 这个函数与 $Y(t)$ 的 m 维概率分布函数吻合。如果自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中任意的 n_1 个自变量和自变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 中任意的 m_1 个自变量取无穷, 那么式(1.48)变为 $(n-n_1, m-m_1)$ 维概率分布函数。

对 (n, m) 维概率分布函数的自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_m$, 求 $n+m$ 阶混合偏导, 可得两个随机过程集合 $\{X(t), Y(t)\}$ 的 (n, m) 维概率分布密度, 即

$$\begin{aligned}
 & f_{n,m}(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_m; t_1, \cdots, t_n; t'_1, \cdots, t'_m) \\
 &= \frac{\partial^{n+m} F_{n,m}(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_m; t_1, \cdots, t_n; t'_1, \cdots, t'_m)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n \partial y_1 \cdots \partial y_m}
 \end{aligned} \quad (1.49)$$

利用这个概率分布密度, 根据通用公式可以求出两个随机过程集合 $\{X(t), Y(t)\}$ 不同阶数的 (n, m) 维原点矩和中心矩。这个集合的数学期望可由式(1.50)和式(1.51)求出, 即

$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{1,0}(x; t) dx \quad (1.50)$$

$$\bar{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{0,1}(y; t) dy \quad (1.51)$$

自相关函数 $K_x(t, t')$ 和 $K_y(t, t')$ 可以根据式(1.41)确定。对于随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$, 其互相关函数为

$$\begin{aligned}
 K_{x,y}(t,t') &= M\{[X(t) - \bar{x}(t)][Y(t') - \bar{y}(t')]\} \\
 &= \int \int_{-\infty}^{\infty} [x - \bar{x}(t)][y - \bar{y}(t')] f_{1,1}(x, y; t, t') dx dy
 \end{aligned} \quad (1.52)$$

或者

$$K_{x,y}(t,t') = \int \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{1,1}(x, y; t, t') dx dy - \bar{x}(t) \bar{y}(t') \quad (1.53)$$

通常情况下, 为了完全描述随机过程 $X(t)$, 必须知道当 $n=1, 2, \dots$ 时, 任意 n 维的分布律。对于两个随机过程的集合 $\{X(t), Y(t)\}$, 必须知道当 $n+m \geq 1$, 在每一个 $n > 0$ 和 $m > 0$ 时的 (n, m) 维分布律。

对于那些常用的随机过程, 任意 n 维概率分布函数可以完全由基本的概率特性确定, 这些基本的概率特性就是数学期望 $\bar{x}(t)$ 和自相关函数 $K_x(t, t')$ 。对于某些随机过程, 任意 $n \geq 2$ 维的分布律可以通过一维或者二维分布律表示。这样, 这些随机过程的多维概率特性可以通过相应的一维和二维概率特性确定。

1.2 相关函数属性

在解决实际问题时, 在很多情况下, 只使用随机过程 $X(t)$ 的基本概率特性, 如数学期望 $\bar{x}(t)$ 和自相关函数 $K_x(t, t') = M[\overset{0}{X}(t) \overset{0}{X}(t')]$ 。对于随机过程的集合 $\{X(t), Y(t)\}$, 除了数学期望和自相关函数, 还常常应用互相关函数 $K_{x,y}(t, t')$ 。至于随机过程的方差并没有特别指出, 这是因为由式(1.54)可知, 对于随机过程 $X(t)$, 其方差是 $t=t'$ 时自相关函数 $K_x(t, t')$ 的个别情况, 即

$$D[X(t)] = M\{[\overset{0}{X}(t)]^2\} = K_x(t, t) \quad (1.54)$$

显然, 随机过程的均方差为

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D[X(t)]} = \sqrt{K_x(t, t)} \quad (1.55)$$

因为

$$M[\overset{0}{X}(t) \overset{0}{X}(t')] = M[\overset{0}{X}(t') \overset{0}{X}(t)] \quad (1.56)$$

所以

$$K_x(t, t') = K_x(t', t) \quad (1.57)$$

因此, 在随机过程 $X(t)$ 的自相关函数 $K_x(t, t')$ 中, 自变量 t 和 t' 是可以互换的。

类似于相关系数 $r_{x,y} = \frac{k_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y}$, 对于随机过程 $X(t)$, 其标准自相关系数为