



新世纪高等学校规划教材·数学系列

模糊集引论

(第3版) 上册

罗承忠 于福生 曾文艺◎编著

MOHUJI YINLUN



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社



新世纪高等学校规划教材·数学系列

模糊集引论

(第3版) 上册

罗承忠 于福生 曾文艺◎编著

MOHUI YINLUN



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社



图书在版编目(CIP)数据

模糊集引论. 上册/罗承忠, 于福生, 曾文艺编著. —3 版.
—北京: 北京师范大学出版社, 2019. 5
新世纪高等学校规划教材. 数学系列
ISBN 978-7-303-23969-6

I. ①模… II. ①罗… ②于… ③曾… III. ①模糊集引论-高等学校-教材 IV. ①O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 167330 号

营销中心电话 010-62978190 62979006
北师大出版社科技与经管分社 www.jswsbook.com
电子邮箱 jswsbook@163.com

出版发行: 北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京市海淀区新街口外大街 19 号
邮政编码: 100875

印 刷: 北京玺诚印务有限公司
经 销: 全国新华书店
开 本: 787 mm×1092 mm 1/16
印 张: 22.25
字 数: 440 千字
版 次: 2019 年 5 月第 3 版
印 次: 2019 年 5 月第 1 次印刷
定 价: 55.00 元

策划编辑: 刘风娟 责任编辑: 刘风娟
美术编辑: 刘 超 装帧设计: 刘 超
责任校对: 赵非非 黄 华 责任印制: 赵非非

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话: 010-62978190
北京读者服务部电话: 010-62979006-8021
外埠邮购电话: 010-62978190

本书如有印装质量问题, 请与印制管理部联系调换。
印制管理部电话: 010-62979006-8006

内容简介

本书是在汪培庄先生编著的《模糊集合论及其应用》的基础上，参考国内外的有关著作，结合作者的教学实践总结编写的。全书共分上、下两册。上册包括模糊集合的基本概念、模糊模式识别、模糊关系与聚类分析、扩展原理及应用、模糊映射与模糊变换、模糊关系方程、模糊规划、模糊逻辑、模糊推理与模糊控制等九章内容，每章后面都配备了习题。

本书是模糊数学的基础教材，可供大专院校有关专业选用，也可作为数学专业研究生基础课教材，同时还可供模糊数学工作者及有关科技工作者参考。

北京师范大学数学科学学院简介

北京师范大学数学系成立于1922年，其前身为1915年创建的北京高等师范学校数理部，1983年成立数学与数学教育研究所，2004年成立数学科学学院。学院现有教师78人，其中教授36人，副教授31人；有博士学位的教师占96%。特别地，有中国科学院院士2人，第三世界科学院院士1人，国家千人计划2人，青年千人计划1人，全国高校教学名师奖1人，教育部长江学者奖励计划特聘教授3人（青年学者1人）和讲座教授1人，国家杰出（优秀）青年基金获得者3人（2人），入选新世纪百千万人才工程国家级人选2人。现有全日制在校生1225人，其中本科生913人，硕士研究生221人，博士研究生91人。

数学科学学院1981年获基础数学、概率论与数理统计博士学位授予权，1986年获应用数学博士学位授予权。1988年，基础数学、概率论与数理统计被评为国家重点学科。1990年建立了北京师范大学第一个博士后流动站。1996年，数学学科成为国家211工程重点建设的学科。1997年成为国家基础科学人才培养基金基地。1998年获数学一级学科博士学位授予权。2001年概率论方向被评为国家自然科学基金创新群体。2005年进入“985工程”科技创新基础建设平台。2007年数学被评为一级学科国家重点学科。2008年数学与应用数学专业师范教育方向获第一批高等学校特色专业建设点。2009年教育部数学与复杂系统重点实验室挂牌，分析类课程教学团队被评为国家级优秀教学团队，调和分析与流形的几何方向被评为教育部创新团队。2012年在高校第3轮数学一级学科评估中排名第5名。2017年9月，数学学科进入世界一流建设学科名单。2017年10月，数学学科在美国新闻与世界报道(US News)联合汤森路透公司发布的2018世界最佳大学学科前100排名榜中列45位(2017年，2016年，2015年分列30，29，40位)，在内地高校中排名第3位。学院还有6个硕士点，8个教研室和《数学通报》杂志编辑部。

103年来，数学科学学院已毕业全日制本科生8466人（不含辅仁大学数学系毕业生）。30多年来，已授予博士学位447人，硕士学位1852人，研究生班毕业209人。据不完全统计，在博士毕业生中：有2人当选为中国科学院院士和1人当选为第三世界科学院院士，2人获全国高校教学名师奖，1人入选万人计划教学名师，3人任教育部长江学者特聘教授，1人获中国科学院百人计划，6人获国家杰出青年基金，4人获国家自然科学奖，3人获国家科技进步奖，2人获国家级有突出贡献的中青年专家称号，2人入选新世纪百千万人才工程国家级人选，2篇博士学位论文入选全国百篇优秀博士学位论文，5篇博士学位论文获全国百篇优秀博士学位论文提名奖。

李仲来执笔

第3版修订说明

《模糊集引论》自出版至今已经过多次修订,得到广泛使用,根据多年的教学实践及使用经验,进行这次修订。作为北京师范大学十二五规划教材,修订后的版本具有一些新特点,主要体现在如下几方面。

1. 关联性

为使每一章的内容在关联性方面更加突出,对一些章节作了比较大的调整,如将列在原第2章中的关于隶属函数建立方法的内容调到第1章(模糊集的基本概念);将列在原第7章(模糊规划)中的LR模糊数调到第4章;同时,将某些节次进行合并,如将原第3章中的二元对比排序及标定内容组成新的一节“模糊关系的建立方法”。

2. 紧凑性

为使本书更加便于阅读,将原来版本中所有单列为节的有关定理的证明,全部分拆到相应的节次中,以更突出主要内容,便于使用,这主要体现在第1章、第3章、第6章。

3. 突出性

为了更加突出某些内容的重要性,对某些章节的题目作了修改,例如,为充分突出集合套在本书中的地位和作用,在第1章单列一节介绍此内容;为体现模糊关系和聚类分析的关系及其重要性,将原第3章的题目“模糊关系”改为“模糊关系与聚类分析”,其中的节标题亦作了相应改动。

4. 结构性

为体现本书的结构性,便于将来的进一步修订,对章、节、段、公式、图表、定理等采用了新的编排方法,这也有助于本书的阅读和使用;同时,在每章开始处增加了一段,介绍本章内容的背景、研究状况等,以便于读者更好地掌握该章内容。

5. 简洁性

在原版本中,经典集合、关系、映射等对象通常用一个字母表示,模糊集合、关系、映射等对象则通过在字母上(或下)加“ $\sim$ ”以示区别。为了简洁,除了极个别地方,此次修订统一用一个字母去表示经典和模糊集合、关系、映射等对象,区别的方法是说明对象的来源或出处。

此次修订的时间较紧,虽改正了原有的一些错误,但也有可能产生一些新的错误,敬请谅解并指正。

罗承忠 于福生 曾文艺
2019年4月

第2版前言

1915年北京高等师范学校成立数理部,1922年成立数学系。2005年适逢数理部诞辰90周年,也是北京师范大学数学科学学院建院1周年。经过90年的风风雨雨,数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验。将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的。

1980年,北京师范大学出版社成立,给教材的出版提供了一个很好的契机。我院教师编著的数十种教材已先后在这里出版。除了北京师范大学现代数学丛书外,就大学教材而言,共有5种版本。第一种是列出编委会的高等学校教学用书,这是在20世纪80年代初期,北京师范大学出版社王文湧先生约请北京师范大学数学与数学教育研究所所长严士健教授等组成编委会,计划编写出版一套数学系本科生教材和非数学专业高等数学教材。在出版社的大力支持下,这一计划完全实现,满足了当时教学的需要。第二种是标注高等学校教学用书,但未列编委会的教材。第三种是(北京师范大学)面向21世纪课程教材。第四种是北京师范大学现代数学课程教材。第五种是未标注高等学校教学用书,但实际上是高等学校教学用书。在这些教材中,除再次印刷外,已经有5部教材进行了修订或出版了第二版。

前一段时间,王建华老师和王琦老师分别搜集了我院本科生的所有教材和研究生12门基础课教材的使用情况,李仲来教授汇总了我院教师在北京师范大学出版社出版的全部著作,由李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦主任进行了沟通和协商,准备对数学科学学院教师目前使用或誉印(出版社已经没有存书的教材)的北京师范大学出版社出版的部分教材进行修订后再版。计划用几年时间,出版数学和应用数学、数学教育、数学学科硕士研究生3个系列的主要课程教材。

本套教材可供高等院校本科生、教育学院数学系、函授(数学专业)及在职中学教师等使用和参考。

北京师范大学数学科学学院

2005年8月8日

第1版编者的话

《模糊集引论》是在汪培庄先生《模糊集合论及其应用》(上海科技出版社)的基础上,参考 D. Dubois、H. Prade《FUZZY SETS AND SYSTEMS》及浅居喜代治《模糊系统理论入门》(北京师范大学出版社),结合作者的教学实践总结编写的. 本书采用“集合套”观点来解释模糊集,因而使一些概念直观易懂,同时使得理论严密系统、便于与经典数学联系,具有适合教学的特点. 由于“集合套”理论只适用 Zadeh 算子($\vee, \wedge$),具有局限性,因此也介绍了其他广义算子($\vee^*, \wedge^*$).

本书是模糊数学基础教材,可用作大专院校有关专业基础课或选修课教材(适当选择部分章节),也可用作数学专业研究生基础课教材,还可供模糊数学工作者及有关科技工作者参考. 考虑到不同读者数学基础的差异,本书内容分基础部分与选读部分. 前六章中不带“*”号内容是基础(删去“*”号内容不影响其他部分的讲授),内容较通俗易懂,一般工科院校学生可以接受,讲授 30 课时左右可以完成. 对工科院校,还可以选讲第 7、9、11 等章节中不带“*”号有关内容. 这里初步介绍了模糊规划、模糊控制、模糊系统、模糊概率与信息等联系实际的内容. 第 8 章模糊逻辑的一些基本概念是学习模糊诊断的基础,也可供选用. 书中带“*”号内容涉及的数学基础知识与基本训练较多,在数学上有一定难度,一般工科院校可以删去. 对数学专业,本科生可讲授前 6 章包括带“*”内容,然后酌情选讲模糊规划、模糊控制等联系实际内容. 第 12 章到第 16 章可列入数学专业研究生课程. 第 12 章给出 L-Fuzzy 集理论,第 13、14、15、16 等章给出可能性理论、Fuzzy 测度与积分、Fuzzy 拓扑、Fuzzy 群与 Fuzzy 范畴等理论基础,其中 Fuzzy 测度与积分主要参照国内王震源先生的科研成果, Fuzzy 拓扑参考了国内蒲保明、刘应明先生的工作. 这部分内容是模糊数学理论工作基础,数学专业研究生尽量选用.

由于作者水平所限,书中一定存在不少缺点,恳请批评指正.

罗承忠

1986 年 12 月

目 录

绪 论	(1)
第 1 章 模糊集合的基本概念	(2)
§ 1.1 预备知识	(2)
§ 1.2 模糊子集的定义及运算	(11)
§ 1.3 模糊集截集和集合套	(15)
§ 1.4 分解定理与表现定理	(19)
§ 1.5 模糊集与集合套	(26)
§ 1.6 模糊集运算的其他定义	(31)
§ 1.7 隶属函数的建立方法	(36)
习 题	(44)
第 2 章 模糊模式识别	(48)
§ 2.1 模式识别直接方法	(48)
§ 2.2 贴适度与择近原则	(50)
§ 2.3 贴适度其他定义	(54)
§ 2.4 模式识别应用举例	(59)
习 题	(63)
第 3 章 模糊关系与聚类分析	(69)
§ 3.1 模糊关系	(69)
§ 3.2 模糊关系的合成	(73)
§ 3.3 模糊等价关系与聚类分析	(78)
§ 3.4 模糊相似关系与聚类分析	(82)
§ 3.5 模糊拟序关系与聚类分析	(91)
§ 3.6 基于模糊划分的聚类分析	(96)
§ 3.7 模糊图与聚类分析	(101)
§ 3.8 模糊关系的建立方法	(109)
习 题	(116)
第 4 章 扩展原理及应用	(121)
§ 4.1 一元扩展原理	(121)
§ 4.2 多元扩展原理	(126)
§ 4.3 $[0, 1]$ 上的模糊数及其逻辑运算	(131)

§ 4.4 模糊数及其运算	(135)
§ 4.5 L - R 型模糊数	(146)
§ 4.6 模糊黎曼积分	(148)
习 题	(150)
第 5 章 模糊映射与模糊变换	(154)
§ 5.1 模糊关系的投影与截影	(154)
§ 5.2 模糊映射	(158)
§ 5.3 模糊变换	(162)
§ 5.4 广义扩展原理	(165)
§ 5.5 综合评判数学模型	(173)
§ 5.6 综合评判数学模型的改进及应用实例	(176)
习 题	(182)
第 6 章 模糊关系方程	(187)
§ 6.1 模糊关系方程相容性条件及最大解	(187)
§ 6.2 有限集上模糊关系方程	(190)
§ 6.3 模糊关系方程极小解的筛选	(196)
§ 6.4 无限集上模糊关系方程	(206)
§ 6.5 广义模糊关系方程	(213)
§ 6.6 (最大, 乘积)型模糊关系方程	(215)
§ 6.7 模糊含度方程	(218)
习 题	(220)
第 7 章 模糊规划	(223)
§ 7.1 模糊极值	(223)
§ 7.2 模糊规划	(225)
§ 7.3 可能性测度与 Fuzzy 积分	(228)
§ 7.4 多目标或多约束的模糊规划	(231)
§ 7.5 单目标模糊线性规划	(235)
§ 7.6 多目标模糊线性规划	(248)
§ 7.7 带有模糊系数的模糊线性规划	(254)
习 题	(258)
第 8 章 模糊逻辑	(261)
§ 8.1 普通命题与逻辑演算	(261)
§ 8.2 模糊命题与逻辑演算	(267)
§ 8.3 模糊逻辑公式的化简	(275)
§ 8.4 模糊逻辑公式与组合回路	(283)
§ 8.5 演绎推理	(287)
§ 8.6 一类模糊诊断的数学模型	(292)

习 题	(297)
第 9 章 模糊推理与模糊控制	(300)
§ 9.1 自然语言的集合描述	(300)
§ 9.2 判断句、推理句及模糊逻辑推理	(303)
§ 9.3 推理句“若 x 是 a , 则 y 是 b ”及其集合表示	(310)
§ 9.4 似然推理	(315)
§ 9.5 条件语句与多段条件语句	(324)
§ 9.6 一种模糊控制的数学模型	(330)
习 题	(338)

一个概念有其内涵与外延,所谓内涵是指符合此概念的对象所具有的共同属性,而外延是指符合此概念的对象所组成的集合.集合可以表现概念,集合的运算和变换可以表现判断与推理.因此,建立在集合论基础上的现代数学成为可以描述和表现各门学科的形式化语言 and 系统.

但是经典集合论要求一个对象对于一个集合来说,要么属于,要么不属于,两者必居其一且仅居其一.这样就限制了经典集合只能表现确切的概念,只能表现“非此即彼”的现象.

一个模糊的概念没有明确的外延.例如“老人”就是一个模糊概念.对一个人来说,他是否属于“老人集”无法明确回答,它具有“亦此亦彼”的模糊性.因此,模糊概念不能用经典集合来刻画.于是,便产生了模糊集合论.它是由扎德(L. A. Zadeh)于 1965 年创立的,是经典集合论的扩充.这种扩充如同数系中有理数域扩充到实数域一样,既有现实背景,又有严密的理论基础.

模糊数学在近代科学发展中有着积极的作用,它为经济管理、人工智能、生物、医学、数学等提供了数学语言与工具.模糊数学的发展可以使计算机模仿人脑对复杂系统进行识别判断,提高自动化水平.

概率论的产生把数学的应用范围从必然现象领域扩大到了随机现象领域.模糊数学的产生则把数学的应用范围从随机现象领域扩大到了模糊现象领域.

绪论

模糊数学是研究和处理模糊性现象的数学. 所谓模糊性, 主要是指客观事物在差异的中间过渡时所呈现的“亦此亦彼”性.

一个概念有其内涵与外延, 所谓内涵是指符合此概念的对象所具有的共同属性; 而外延是指符合此概念的对象所组成的集合. 集合可以表现概念, 集合的运算和变换可以表现判断与推理. 因此, 建立在集合论基础上的现代数学成为可以描述和表现各门学科的形式语言和系统.

但是经典集合论要求一个对象对于一个集合来说, 要么属于、要么不属于, 两者必居其一且仅居其一. 这样就限定了经典集合只能表现确切的概念, 只能表现“非此即彼”的现象.

一个模糊的概念没有明确的外延, 例如“老人”就是一个模糊概念, 对一个人来说, 他是否属于“老人集”无法明确回答, 他具有“亦此亦彼”的模糊性. 因此, 模糊概念不能用经典集合来刻画, 于是, 便产生了模糊集合论, 它是由扎德(L. A. Zadeh)于1965年创立的, 是经典集合论的扩充. 这种扩充如同数系中有理数域扩充到实数域一样, 既有现实背景, 又有严密的理论基础.

模糊数学在近代科学发展中有着积极的作用: 它为经济管理、人工智能、心理、教育、医学等提供了数学语言与工具. 模糊数学的发展可以使计算机模仿人脑对复杂系统进行识别判决, 提高自动化水平.

概率论的产生把数学的应用范围从必然现象领域扩大到了随机现象领域, 模糊数学的产生则把数学的应用范围从精确现象领域扩大到了模糊现象领域.

第1章 模糊集合的基本概念

本章首先对所涉及的基础知识(经典集合定义及运算、格及代数系统)作了简要介绍,接着介绍了扎德(L. A. Zadeh)所给的模糊子集的定义及运算.在讨论了模糊集截集和集合套的基础上,给出了模糊集理论的两大基本定理:分解定理和表现定理.接下来,详细地阐述了模糊集与集合套之间的关系,这有助于读者更好地理解模糊集.针对扎德(L. A. Zadeh)定义的模糊集运算(主要是并、交运算)存在利用信息不充分的情形,本章讨论了一般化模糊算子及常见形式.最后介绍了模糊集理论中的一个核心问题:隶属函数的确定方法.

§ 1.1 预备知识

1.1.1 经典集合及其运算

集合论是现代数学的基础,集合可以表现概念.当讨论一个具体问题时,总是把议题限制在一定的范围内.例如讨论“男子”这一概念,可以把议题限制在“人”这个范围内,从人的集合 X 中挑选出所有男子,构成 X 的一个子集 A , A 便是“男子”这个概念的外延,即“男子”这个概念的集合表现.

给定论域 X (讨论范围), 设 α 为某一概念, 它的外延是 X 的一个子集 A , 对于 X 中的任一元素 x (讨论对象) 来说,

$$x \text{ 符合概念 } \alpha \Leftrightarrow x \in A.$$

按照经典集合论要求, 元素 x 与集合 A 之间, $x \in A$ 与 $x \notin A$ 两者必居其一且仅居其一. 因而 x 对于概念 α 来说, “ x 符合概念 α ” 与 “ x 不符合概念 α ” 二者必居其一且仅居其一. 称这种概念为确切的.

给定论域 X , 子集 A 可由其特征函数 χ_A 唯一确定. (见图 1.1.1)

$$\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\}$$

$$x \mapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in A, \\ 0, & \text{当 } x \notin A. \end{cases}$$

令 $\mathcal{P}(X)$ 是 X 的所有子集组成的集合(称为 X 的幂集), $A, B \in \mathcal{P}(X)$.

当且仅当对任意 $x \in X$, 都有 $x \in B \Rightarrow x \in A$ 时, 则称 A 包含 B (记作 $A \supseteq B$).

当且仅当 $A \supseteq B$ 且 $B \supseteq A$ 时, 称 A, B 相等(记作 $A = B$),

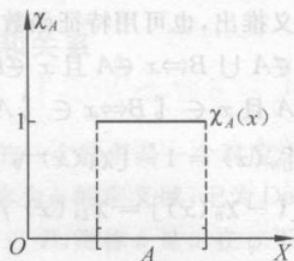


图 1.1.1 集合 A 的特征函数

当且仅当 $A \supseteq B$ 且 $A \neq B$ 时,称 A 真包含 B(记作 $A \supset B$).

用特征函数来表示,有

$$A \supseteq B \Leftrightarrow \chi_A(x) \geq \chi_B(x), \forall x \in X,$$

$$A = B \Leftrightarrow \chi_A(x) = \chi_B(x), \forall x \in X,$$

$$A \supset B \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X, \chi_A(x) \geq \chi_B(x), \\ \text{且 } \exists x_0 \in X, \chi_A(x_0) > \chi_B(x_0). \end{cases}$$

设 $A, B \in \mathcal{P}(X)$, 规定

$$A \cup B \stackrel{d}{=} \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$

$$A \cap B \stackrel{d}{=} \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$

$$\complement A \stackrel{d}{=} \{x | x \notin A\}.$$

$A \cup B, A \cap B$ 和 $\complement A$ 分别叫作 A 与 B 的并集、交集及 A 的余集. 显然它们的特征函数满足

$$\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) \vee \chi_B(x),$$

$$\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x),$$

$$\chi_{\complement A}(x) = 1 - \chi_A(x).$$

此处“ $\vee$ ”表示上确界“sup”, “ $\wedge$ ”表示下确界“inf”.

上述运算具有下列性质:

(1) 幂等律: $A \cup A = A, A \cap A = A.$

(2) 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$

(3) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

(4) 吸收律: $A \cap (A \cup B) = A, A \cup (A \cap B) = A.$

(5) 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

(6) X 与 $\emptyset$ (空集) 满足: $A \cap X = A, A \cup X = X, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup \emptyset = A.$

(7) 复原律: $\complement(\complement A) = A.$

(8) 补余律: $A \cup \complement A = X, A \cap \complement A = \emptyset.$

(9) 对偶律(De Morgan 律):

$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B, \complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B.$$

这些性质可直接从 $\cup$, $\cap$, $\complement$ 的定义推出,也可用特征函数证明.例如对偶律的证明:

$$\begin{aligned}\text{证法 1 } x \in \complement(A \cup B) &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ 且 } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \text{ 且 } x \in \complement B \Leftrightarrow x \in \complement A \cap \complement B.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{证法 2 } \chi_{\complement(A \cup B)}(x) &= 1 - \chi_{A \cup B}(x) = 1 - [\chi_A(x) \vee \chi_B(x)] \\ &= [1 - \chi_A(x)] \wedge [1 - \chi_B(x)] = \chi_{\complement A}(x) \wedge \chi_{\complement B}(x) \\ &= \chi_{\complement A \cap \complement B}(x).\end{aligned}$$

集合的并、交运算可推广到任意多个集合的并、交运算:

$$\bigcup_{t \in T} A^{(t)} \stackrel{d}{=} \{x | x \in X, \exists t \in T, \text{使 } x \in A^{(t)}\},$$

$$\bigcap_{t \in T} A^{(t)} \stackrel{d}{=} \{x | x \in X, \forall t \in T, \text{恒有 } x \in A^{(t)}\}.$$

它们的特征函数是:

$$\chi_{\bigcup_{t \in T} A^{(t)}}(x) = \bigvee_{t \in T} \chi_{A^{(t)}}(x),$$

$$\chi_{\bigcap_{t \in T} A^{(t)}}(x) = \bigwedge_{t \in T} \chi_{A^{(t)}}(x).$$

易证

$$A \cap \left(\bigcup_{t \in T} A^{(t)}\right) = \bigcup_{t \in T} (A \cap A^{(t)}),$$

$$A \cup \left(\bigcap_{t \in T} A^{(t)}\right) = \bigcap_{t \in T} (A \cup A^{(t)}).$$

$$\complement \left(\bigcup_{t \in T} A^{(t)}\right) = \bigcap_{t \in T} \complement(A^{(t)}),$$

$$\complement \left(\bigcap_{t \in T} A^{(t)}\right) = \bigcup_{t \in T} \complement(A^{(t)}).$$

除了 $\cup$, $\cap$, $\complement$ 运算,集合的运算还有差运算和对称差运算.

设 $A, B \in \mathcal{P}(X)$, 规定

$$A - B \stackrel{d}{=} \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\} = A \cap \complement B$$

$$A \triangle B \stackrel{d}{=} (A - B) \cup (B - A)$$

$A - B$ 和 $A \triangle B$ 分别称为 A 与 B 的差集和对称差集.

本小节最后给出集合的笛卡儿积(卡氏积)运算.

n 个集合 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的卡氏积 $\prod_{i=1}^n A_i$ (或 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$) 定义为

$$\prod_{i=1}^n A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

特别地, n 个相同的集合 A 的卡氏积记为 A^n .

卡氏积的概念可以推广到任意多个集合中去.

1.1.2 映射、代数运算和关系

1. 映射

设 A, B 是两个集合, A 到 B 的一个映射是一个对应法则 φ , 在该法则下, A 中的每个元素都对应 B 中的唯一一个元素, A 称为 φ 的定义域, 记为 $\text{Dom } \varphi = A$, $\text{Ran } \varphi$ 称为 φ 的值域. $\forall a \in A$, 若与之对应的是 $b = \varphi(a) \in B$, 则称 b 是 a 在 φ 下的象, a 是 b 在 φ 下的原象.

设 φ 是 A 到 B 的一个映射, 如果 $a \neq b$ 有 $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ ($\forall a, b \in A$), 则称 φ 是 A 到 B 的单射; 如果 $\forall b \in B, \exists a \in A$ 使 $b = \varphi(a)$, 则称 φ 是 A 到 B 的满射, 如果 φ 既是单射又是满射, 则称 φ 是 A 到 B 的双射(一一映射).

2. 代数运算

设 A 是一个非空集合, n ($n > 0$) 是自然数, A 的一个 n 元代数运算指的是 A^n 到 A 的一个映射, 带有若干个(n 元)运算的非空集合 A 称为一个代数系统.

常见的一元运算有实数集合 $\mathbf{R}$ 上的求相反数运算, $\mathcal{P}(X)$ 上的集合求余运算等; 常见的二元运算有实数集合 $\mathbf{R}$ 上的加、减、乘运算, $\mathcal{P}(X)$ 上的集合的并、交运算等.

按照上述定义, 集合 A 上的一个二元运算是 $A \times A$ 到 A 的一个映射 $\varphi, \forall a, b \in A$, 有 $c = \varphi(a, b)$. 为了方便, 将运算用“ $\circ$ ”“ $*$ ”“ $\cdot$ ”等代替, 且将 $\varphi(a, b)$ 记为 $a \circ b, a * b, a \cdot b$ 等. 代数系统通常记为 $(A, \circ), (A, \circ, *), (A, \circ, *, \cdot)$ 等.

设“ $\circ$ ”是 A 的一个二元运算, 如果 $\forall a \in A$, 有 $a \circ e = e \circ a = a$, 则 $e \in A$ 称为“ $\circ$ ”的单位元; 如果 $\forall a \in A$, 有 $a \circ \theta = \theta \circ a = \theta$, 则 $\theta \in A$ 称为“ $\circ$ ”的零元.

设 $(A, \circ, *)$ 是一个代数系统, $\circ, *$ 均为二元运算, 下面给出 $\circ, *$ 可能满足的运算性质及含义 ($\forall a, b, c \in A$):

(1) 幂等律: $a \circ a = a, a * a = a$.

(2) 交换律: $a \circ b = b \circ a, a * b = b * a$.

(3) 结合律: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), (a * b) * c = a * (b * c)$.

(4) 吸收律(要求 $\circ, *$ 满足交换律):

$$(a \circ b) * a = a = (a * b) \circ a.$$

(5) 分配律(运算 $\circ$ 对运算 $*$ 可分配):

$$a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c),$$

$$(b * c) \circ a = (b \circ a) * (c \circ a).$$

(6) 无限分配律:(运算 $\circ$ 对运算 $*$ 可无限分配, $\forall t \in T, b \in A$).

$$a \circ (\ast_{i \in T} b_i) = \ast_{i \in T} (a \circ b_i),$$

$$(\ast_{i \in T} b_i) \circ a = \ast_{i \in T} (b_i \circ a).$$

3. 关系

n 个集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n > 0$) 为自然数) 间的一个 n 元关系 R 是 $\prod_{i=1}^n A_i$ 的一个子集, 即

$R \subseteq \prod_{i=1}^n A_i$. 当 $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R$ ($a_i \in A_i$) 时, 称 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 具有关系 R , 否则称为不具有

关系 R .

特别地,当 $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ 时,称 $R(\subseteq \prod_{i=1}^n A_i)$ 为 A 上的关系,用得最多的是 A 上的二元关系 $R: R \subseteq A \times A, (a, b) \in R$ 又常记为 aRb ,称二元关系 $\emptyset, A \times A, I = \{(a, a) \mid \forall a \in A\}$ 分别是 A 上的空关系、全关系和恒等关系. 不难看出: A 到 B 的一个映射是 A 到 B 的一个特殊关系. 因此,关系是比映射更广泛的概念.

设 R 是集合 A 上的一个二元关系, R 可能具有一些特殊的性质,这些性质常见的有 $(a, b, c \in A)$:

(1) 自反性(反身性): $aRa (\forall a \in A)$.

(2) 对称性: 若 aRb , 则 bRa .

(3) 反对称性: 若 aRb 且 bRa , 则 $a = b$.

(4) 传递性: 若 aRb 且 bRc , 则 aRc .

同时具有多条上述性质的关系往往比较重要,如等价关系,同时具有自反性、对称性和传递性;偏序关系同时具有自反性、反对称性和传递性.

1.1.3 格

1. 偏序集

设 L 是集合,“ $\leq$ ”是 L 上的二元关系. 如果“ $\leq$ ”是偏序关系,称 $(L, \leq)$ 为偏序集;如果“ $\leq$ ”还满足可比较性, $\forall \alpha, \beta \in L, \alpha \leq \beta$ 与 $\beta \leq \alpha$ 必有一成立,则偏序集 $(L, \leq)$ 称为全序集(线性序集). 易知 $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ 是偏序集; $(\mathbf{R}, \leq)$ 是偏序集($\mathbf{R}$ 为实数集,“ $\leq$ ”是实数的“小于等于”关系); $(\mathbf{Z}^+, |)$ 是偏序集($\mathbf{Z}^+$ 是正整数集,“ $|$ ”是整数的“整除”关系);而 $(\mathbf{R}, <)$ 则不是偏序集(“ $<$ ”是实数的“小于”关系).

设 $(L, \leq)$ 是一个偏序集, $A \subseteq L$, 若对任意 $\alpha \in A$, 均有 $\alpha \leq \gamma$, 则称 γ 为 A 的一个上界. 若 γ_0 是 A 的上界中的最小者, 则称 γ_0 为 A 的上确界. 记作

$$\gamma_0 = \sup\{\alpha \mid \alpha \in A\},$$

若对任意 $\alpha \in A$, 均有 $\gamma \leq \alpha$, 则称 γ 为 A 的一个下界. 若 γ_0 是 A 的下界中的最大者, 则称 γ_0 为 A 的下确界, 记作

$$\gamma_0 = \inf\{\alpha \mid \alpha \in A\}.$$

2. 格

格有两种不同的定义方法,其定义如下:

定义 1.1.1 如果 $\forall \alpha, \beta \in L$, 集合 $\{\alpha, \beta\}$ 的上、下确界都存在, 称偏序集 $(L, \leq)$ 为格.

定义 1.1.2 如果运算“ $\vee$ ”“ $\wedge$ ”满足幂等律、交换律、结合律、吸收律, 称代数系统 $(L, \vee, \wedge)$ 为格.

这两种定义是等价的,其等价性由下面的两个定理予以证明.

定理 1.1.1 设 $(L, \leq)$ 为格, 在 L 中定义二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 如下:

$$\alpha \vee \beta = \sup\{\alpha, \beta\}, \alpha \wedge \beta = \inf\{\alpha, \beta\}, (\forall \alpha, \beta \in L)$$

则 $(L, \vee, \wedge)$ 作成格.