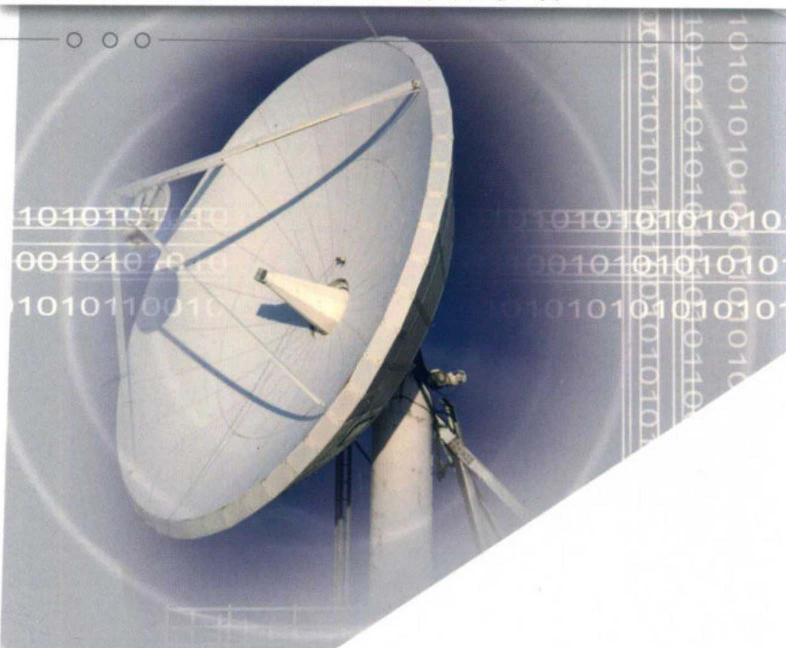
● 普通高等教育“十三五”规划教材
● 普通高等院校数学精品教材



# 高等数学简明教程


主　编　刘　俊　廖毕文
副主编　张　敏　胡杨子



華中科技大学出版社
http://www.hustp.com

普通高等教育"十三五"规划教材
普通高等院校数学精品教材

# 高等数学简明教程

主　编　刘　俊　廖毕文
副主编　张　敏　胡杨子

华中科技大学出版社
中国·武汉

## 内容提要

本书是作者根据教学一线多年的实践，以“必需、够用、适度拓展”为原则而编写的，本书注意衔接中学数学知识，适当把握教学内容的深度和广度，旨在培养学生良好的思维能力、创新能力和学习能力，为后续专业课程服务. 其主要内容有预备知识、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、向量代数与空间解析几何等八章.

本书具有逻辑清晰，推导简化等特点，可作为高职高专院校的数学通用教材或自学参考书.

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学简明教程/刘俊，廖毕文主编. —武汉：华中科技大学出版社，2018.10
ISBN 978-7-5680-4660-2

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①刘…　②廖…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 235255 号

**高等数学简明教程**
Gaodeng Shuxue Jianming Jiaocheng

刘　俊　廖毕文　主编

策划编辑：周芬娜
责任编辑：周芬娜
封面设计：刘　卉
责任校对：李　弋
责任监印：赵　月
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)　　电话：(027)81321913
武汉市东湖新技术开发区华工科技园　　邮编：430223
录　　排：武汉市洪山区佳年华文印部
印　　刷：武汉科源印刷设计有限公司
开　　本：710mm×1000mm　1/16
印　　张：9.5
字　　数：200 千字
版　　次：2018 年 10 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：29.00 元

# 前　言

近年来，随着科学技术的飞速发展，数学作为基础学科得到了长足的进步. 一方面数学的分支学科越来越细化，另一方面数学与其它学科的融合也是你中有我、我中有你. 这一切都突破了传统观念的束缚，数学变得更深刻、更有用. 但是，相比于数学学科日新月异的变革，高职高专院校的数学教学似乎没有什么变化，其主要表现是教师在课堂上讲得很辛苦，但是学生仍然听不懂、学不会，而这种状态是与我们教育的初衷背道而驰的.

我们根据高职高专的人才培养方案，着眼学生知识能力和素质发展的基本要求，以培养高素质人才为目标，编写了此书. 我们以基础性、实用性和针对性为出发点，坚持“以学为主，学用结合”的教学理念，尊重学生个体差异，充分考虑学生的基础现状和认知特点，适当降低理论的系统性，弱化对定理的论证和计算要求，把侧重点放在对学生数学应用能力的培养上. 通过典型例子的分析和学生的自主探究活动，学生应能了解数学概念的形成过程，体验数学发现和创造的历程，体会蕴含在其中的思想方法，培养他们的创新能力.

本书由陆军工程大学军械士官学校基础部的刘俊、廖毕文任主编，陆军工程大学军械士官学校基础部的张敏和华中科技大学数学与统计学院的胡杨子任副主编. 在撰写、修改和出版过程中，正是各位同志的大力支持，才使本书得以面世，在此一并表示感谢.

由于编者水平有限，同时时间仓促，书中难免存在不妥之处，恳请读者批评指正.

编　者

2018 年 6 月

# 目 录

# 第1章　预 备 知 识

集合论是现代数学中的一个重要分支，它的基本知识已被运用于数学的各个领域．函数是数学中一个极其重要的概念，是学习高等数学、应用数学和其它科学技术必不可缺少的基础．本章将要介绍关于集合的一些重要概念、常用符号和简单运算，然后阐述函数的概念和有关的一些基本知识．

## 第1节　集合的概念

### 一、集合的意义

在日常生活中，人们往往把具有某种特定性质的对象作为一个整体加以研究，例如：

(1) 某校某区队的全体学员．

(2) 某军械仓库的全部加农炮．

(3) 美军的所有B-2轰炸机．

这里所用的“全体”“全部”都是指具有某种特定性质的对象的总体．

我们把具有某种特定性质的对象组成的总体称为集合，简称集，把组成集合的各个对象称为这个集合的元素．

例如，上面例子中的(1)是由这个学校某区队全体学员组成的集合，该区队的每一个学员都是这个集合的元素；(2)是由这个军械仓库的全部加农炮组成的集合，该库中的每一门加农炮都是这个集合的元素；(3)是由美军的全部B-2轰炸机组成的集合，美军的每一架B-2轰炸机都是这个集合的元素．

习惯上，我们用大写字母$A,B,C,\cdots$表示集合，用小写字母$a,b,c,\cdots$表示集合中的元素．如果$a$是集合$A$的元素，就记为“$a\in A$”，读作“$a$属于$A$”；如果$a$不是集合$A$的元素，就记为“$a\notin A$”，读作“$a$不属于$A$”．

由点组成的集合称为点集，而由数组成的集合称为数集，数集由以下的符号来表示．

| 数　集 | 自然数集 | 整数集 | 有理数集 | 实数集 |
|---|---|---|---|---|
| 记　号 | **N** | **Z** | **Q** | **R** |

如果数集中的元素都是正数，就在集合记号的右上角标以“+”号；如果数集中的元素都是负数，就在集合记号的右上角标以“-”号. 例如，正整数集用 $\mathbf{Z}^{+}$ 表示，负实数集用 $\mathbf{R}^{-}$ 表示.

一个“给定集合”的含义是指这个集合的元素是确定的，也就是说，根据集合的元素所具有的特定性质，可以判断出哪些对象是集合的元素，哪些不是集合的元素，不能模棱两可. 例如，身材很高的人、紧俏的商品，都不能构成集合，而对于自然数集 $\mathbf{N}$，依据自然数的特定性质可以判断出：$2\in\mathbf{N},\sqrt{2}\notin\mathbf{N},\frac{1}{2}\notin\mathbf{N}$.

## 二、集合的表示法

**1. 列举法**

就是把属于某个集合的元素一一列举出来，写在花括号{}内，每个元素仅写一次，不考虑顺序.

**2. 描述法**

就是把属于某个集合的元素所具有的特定性质描述出来，写在花括号{}内.

只含有有限个元素的集合称为有限集合，有限集合中仅含有一个元素的称为单元素集，含有无限多个元素的集合称为无限集合，不含有任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$. 把至少含有一个元素的集合称为非空集.

## 三、子集、真子集和集合相等

**1. 子集**

对于两个集合 $A$ 和 $B$，如果集合 $A$ 的任何一个元素都是集合 $B$ 的元素，则集合 $A$ 称为集合 $B$ 的子集，记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作“$A$ 包含于 $B$”或“$B$ 包含 $A$”.

依照上述定义，有

(1) $A\subseteq A$　（任何一个集合都可以看作它本身的子集）；

(2) $\Phi\subseteq A$　（空集可看成是任何集合 $A$ 的子集）.

**2. 真子集**

如果集合 $A$ 是集合 $B$ 的子集，并且 $B$ 中至少有一个元素不属于 $A$，那么集合 $A$ 称为集合 $B$ 的真子集，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作“$A$ 真包含于 $B$”或“$B$ 真包含 $A$”.

例如，设 $A=\{1,2\}$，$B=\{1,2,3\}$，由观察可知，$A$ 是 $B$ 的子集，且 $3\in B$，但 $3\notin A$，所以 $A$ 又是 $B$ 的真子集，即 $A\subset B$. 显然，$A\subset B\Rightarrow A\subseteq B$.

根据真子集的定义，还可知道空集是任何非空集合的真子集.

**例 1**　求集合 $A=\{1,2,3\}$ 的子集和真子集.

**解**　集合 $A$ 的子集是：$\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}$.

集合 $A$ 的真子集是：$\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$.

**3. 集合相等**

如果两个集合中的元素完全相同,则称两个集合相等,记为$A=B$.

**例 2** 说出以下两个集合之间的关系:

(1) $A=\{2,4,5,7\}, B=\{2,5\}$;

(2) $P=\{x \mid x^2=1\}, Q=\{-1,1\}$;

(3) $C=\{奇数\}, D=\{整数\}$.

**解** (1) $B \subset A$;(2) $P=Q$;(3) $C \subset D$.

## 四、集合的运算

**1. 交集**

已知集合$A=\{1,2,3,6\}$与$B=\{1,2,5,6\}$,这两个集合的所有公共元素可以构成一个新的集合$\{1,2,6\}$.

一般地,对于两个给定的集合$A,B$,由既属于$A$又属于$B$的所有元素所构成的集合称为$A$与$B$的交集,记为$A \cap B$,读作"$A$交$B$".例如,$\{1,2,3,6\} \cap \{1,2,5,6\}=\{1,2,6\}$.

交集有如图 1-1 所示四种情形.

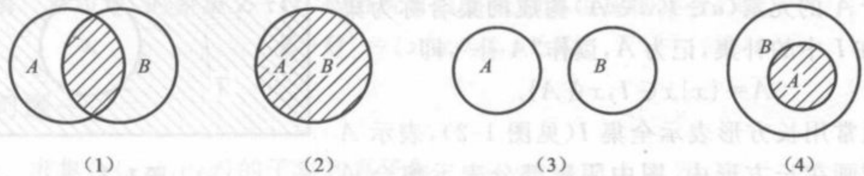



**图 1-1**

对任意两个集合$A,B$,有:

(1) $A \cap B=B \cap A$;

(2) $(A \cap B) \cap C=A \cap (B \cap C)$;

(3) $A \cap A=A, A \cap \varnothing=\varnothing \cap A=\varnothing$;

(4) $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$.

**例 3** 已知$A=\{(x,y) \mid 4x+y=6\}, B=\{(x,y) \mid 3x+2y=7\}$,求$A \cap B$.

**解** $A \cap B=\left\{(x,y) \,\middle|\, \begin{cases} 4x+y=6 \\ 3x+2y=7 \end{cases}\right\}=\{(1,2)\}$.

**2. 并集**

已知集合$A=\{2,3,4\}$与$B=\{1,2,3,5\}$,这两个集合的所有元素合在一起可以组成一个新的集合$\{1,2,3,4,5\}$.

一般地,对于两个给定的集合$A,B$,把它们所有的元素合在一起构成的集合称为$A$与$B$的并集,记作$A \cup B$,读作"$A$并$B$".例如,$\{2,3,4\} \cup \{1,2,3,5\}=\{1,2,3,$

$4,5\}$.

**注意**:用列举法表示集合时,每个元素只列举一次.

由并集的定义容易知道,对任意两个集合 $A,B$,有

(1) $A\cup B=B\cup A$;

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

(3) $A\cup A=A, A\cup\varnothing=A$;

(4) $A\subseteq A\cup B, B\subseteq A\cup B$.

**例 4**　设 $A=\{x\mid(x-1)(x+2)=0\}, B=\{x\mid x^2-4=0\}$,求 $A\cup B$.

**解**　因为
$$A=\{x\mid(x-1)(x+2)=0\}=\{1,-2\},$$
$$B=\{x\mid x^2-4=0\}=\{2,-2\},$$
所以
$$A\cup B=\{1,-2\}\cup\{2,-2\}=\{-2,1,2\}.$$

**3. 全集与补集**

我们在研究集合与集合之间的关系时,在某些情况下,这些集合都是某一给定集合的子集,这个给定的集合称为全集,用符号 $I$ 表示.

例如,在研究数集时,我们常常把实数集 $\mathbf{R}$ 作为全集.

如果 $A$ 是全集 $I$ 的一个子集,由 $I$ 中的所有不属于 $A$ 的元素($a\in I, a\notin A$)构成的集合称为集合 $A$ 在 $I$ 中的补集,记为 $\overline{A}$,读作"$A$ 补",即
$$\overline{A}=\{x\mid x\in I, x\notin A\}.$$

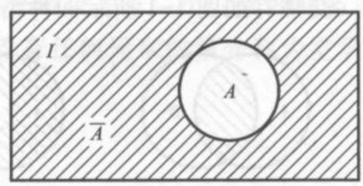


**图 1-2**

通常用长方形表示全集 $I$(见图 1-2),表示 $A$ 的区域画在长方形内,图中阴影部分表示集合 $A$ 在 $I$ 中的补集.

由补集的定义知道,$A\cup\overline{A}=I, A\cap\overline{A}=\varnothing, \overline{\overline{A}}=A$.

**例 5**　设 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}, A=\{1,3,5\}, B=\{2,4,6\}$,求证:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

**证**　因为
$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\},$$
$$\overline{A\cup B}=\{7,8,9,10\};$$
又因为
$$\overline{A}=\{2,4,6,7,8,9,10\},$$
$$\overline{B}=\{1,3,5,7,8,9,10\},$$
所以
$$\overline{A}\cap\overline{B}=\{7,8,9,10\},$$
因此
$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}.$$

**4. 差集**

先看下面的例子:

设 $A=\{1,2,3,4\}, B=\{3,4,5,7\}$,属于集合 $A$ 而不属于集合 $B$ 的所有元素组成的一个集合 $C=\{1,2\}$.

对于这样的集合，给出下面的定义：

**定义** 设 $A$ 和 $B$ 是两个集合，把属于 $A$ 而不属于 $B$ 的所有元素组成的集合称为 $A$ 和 $B$ 的差集，记为 $A-B$，读作"$A$ 减 $B$"，即

$$A-B=\{x \mid x\in A, x\notin B\}.$$

差集 $A-B$ 和差集 $B-A$ 分别用图1-3(1)和(2)的阴影部分表示.

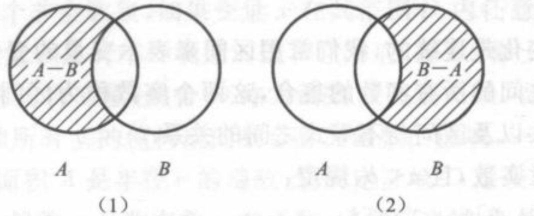



图 1-3

由图还可看出：$A-B=A-(A\cap B)$，$B-A=B-(A\cap B)$，如果 $A\subseteq B$，根据差集定义可知 $A-B=\varnothing$.

因为 $A\subseteq A$，所以 $A-A=\varnothing$，$A-\varnothing=A$.

**例 6** 求 $\mathbf{Z}-\mathbf{Q}^+$.

**解** $\mathbf{Z}$ 和 $\mathbf{Q}^+$ 的差集 $\mathbf{Z}-\mathbf{Q}^+$ 是由所有负整数和零组成的集合，即

$$\mathbf{Z}-\mathbf{Q}^+=\{x \mid x\leqslant 0, x\in \mathbf{Z}\}.$$

**习题一**

1. 求集合 $\{a,b,c,d\}$ 的子集和真子集.
2. 已知 $A=\{1,2,4,5,9\}$，$B=\{3,6,9,10\}$，求：
(1) $A\cap B$； (2) $A\cup B$； (3) $A-B$； (4) $B-A$.
3. 已知全集 $I=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,2\}$，$B=\{4,5\}$，求 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$.

# 第2节 函 数

函数是数学中一个很重要的概念. 应用数学知识来解决各种问题，经常要用到函数知识，本节我们将学习有关函数的一些基本知识.

## 一、常量、变量和区间

我们在研究问题时，常常会遇到两种不同的量，其中一种量在某一变化过程中，始终保持不变，这种量称为常量. 然而，事物总是发展变化的，所以我们往往遇到更多的是变化的量，这种量称为变量.

但是，我们必须注意，常量和变量对某一过程来说是相对的. 同一个量在某个场

合是常量，在另一场合就可能是变量. 例如，物体作匀速运动时，速度是常量，位移和时间是变量；但在变速直线运动中，在同一时间内，研究位移和速度的关系时，时间是常量，位移和速度是变量.

任何一个变量，总有一定的变化范围. 例如，某一天的最高温度是 28 ℃，最低温度是 16 ℃，那么，这一天温度 $T$ 的变化范围是 16 ℃到 28 ℃，即变量 $T$ 的变化范围是 16 到 28.

如果变量的变化是连续的，我们常用区间来表示变量的变化范围. 所谓区间就是指介于两个实数之间的所有实数的集合，这两个实数称为区间的端点. 下面，我们介绍几种区间的记法以及区间与不等式之间的关系.

设 $a,b$ 为任意实数，且 $a<b$，规定：

(1) 闭区间：$[a,b]\Leftrightarrow a\leqslant x\leqslant b$；

(2) 开区间：$(a,b)\Leftrightarrow a<x<b$；

(3) 左开区间：$(a,b]\Leftrightarrow a<x\leqslant b$；

(4) 右开区间：$[a,b)\Leftrightarrow a\leqslant x<b$；

(5) $[a,+\infty)\Leftrightarrow x\geqslant a$；

(6) $(a,+\infty)\Leftrightarrow x>a$；

(7) $(-\infty,b]\Leftrightarrow x\leqslant b$；

(8) $(-\infty,b)\Leftrightarrow x<b$；

(9) $(-\infty,+\infty)\Leftrightarrow -\infty<x<+\infty$ 或 $x\in\mathbf{R}$.

在这里，记号“$\infty$”读作无穷大，它不表示某个确定的实数，只表明某个变量在变化时，它的绝对值无限增大，没有止境. “$+\infty$”表示某个变量沿正方向无限增大，“$-\infty$”表示某个变量沿负方向绝对值无限增大.

## 二、函数的概念

**1. 函数的定义**

在事物的变化过程中，往往同时有几个变量在变化着，这些变量并不是孤立地在变，而是相互联系并按一定规律进行变化. 为了研究同一过程中各个变量之间的变化关系，这样就产生了函数的概念. 下面，我们就两个变量的情形看几个例子.

**例 1** 圆的面积 $A$ 和半径 $r$ 之间的关系是

$$A=\pi r^2.$$

当半径 $r$ 在 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上式就可确定圆的面积 $A$ 的相应数值.

**例 2** 某种书的单价为 12 元，购买书的本数 $x$ 和购买书的钱数 $y$ 之间的变化关系是

$$y=12x\ (元).$$

当给定买书的本数时，通过上式就可算出买书所需的钱数.

抛开上面两个例子中的实际意义，它们都表明两个变量之间存在一种变化关系，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，依据这种关系，就可得到另一变量的一个确定的数值.

对变量的这种关系，我们给出函数的定义：

**定义** 设 $D$ 是一个非空数集，如果变量 $x$ 在其范围 $D$ 内任意取一个数值时，按照某一对应法则 $f$，变量 $y$ 总有唯一确定的值和它对应，那么，称 $y$ 是定义在 $D$ 上关于 $x$ 的函数，其中 $x$ 称为自变量，集合 $D$ 称为函数 $y$ 的定义域. 当 $x$ 取遍 $D$ 中的一切数值时，与 $x$ 对应的所有 $y$ 的值构成的集合称为函数的值域，一般用 $M$ 表示.

例如，在例 1 中，面积 $A$ 是半径 $r$ 的函数，它的定义域 $D$ 是 $\{r|r\geqslant 0\}$，值域 $M$ 是 $\{A|A>0\}$；在例 2 中，钱数 $y$ 是购书数 $x$ 的函数，它的定义域 $D$ 是非负整数集，值域 $M$ 是非负整数集.

**2. 函数、函数值的记号**

"$y$ 是 $x$ 的函数"，我们用 $y=f(x)$，$y=g(x)$，$y=\varphi(x)$ 等符号来表示. 其中，括号里的 $x$ 表示自变量，$f$、$g$、$\varphi$ 表示 $y$ 和 $x$ 之间的对应关系. 在同一问题中，讨论几个不同的函数时，为区别起见，我们要用不同的函数符号来表示这些函数. 对于函数 $y=f(x)$，当自变量 $x$ 在定义域 $D$ 内取定值 $x_0$ 时，和 $x_0$ 对应的 $y$ 的值称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的函数值，记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

**例 3** 求函数 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+1}$ 在点 $x_1=0$ 和点 $x_2=-1$ 处的函数值，并比较函数值 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 的大小.

**解**
$$f(x_1)=f(0)=\frac{2\times 0-1}{0^2+1}=-1,$$
$$f(x_2)=f(-1)=\frac{2\times(-1)-1}{(-1)^2+1}=-\frac{3}{2}.$$

所以
$$f(x_1)>f(x_2).$$

**例 4** 已知函数
$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\leqslant 0 \\ (x-1)^2, & 0<x<2, \\ x-1, & x\geqslant 2 \end{cases}$$
求 $f(2)$，$f(-3)$，$f(1)$ 和 $f(\sqrt{5})$ 的值.

**解** $f(2)=2-1=1$；

$f(-3)=(-3)+1=-2$；

$f(1)=(1-1)^2=0$；

$f(\sqrt{5})=\sqrt{5}-1$.

类似本例，在不同的定义域范围内，函数的表达式不同，这类函数称为分段函数.

## 三、函数的两要素和函数定义域的求法

**1. 函数的两要素**

抓住事物的本质特征，是人们研究问题的重要方法之一. 由函数的定义可知，当函数的定义域和函数的对应关系确定以后，这个函数就完全确定了. 因此，我们常把函数的定义域和对应关系称为函数的两要素，只有当两个函数的定义域和对应关系完全相同时，这两个函数才被认为是相同的. 例如，函数 $y=\sqrt{x^2}$ 和 $y=(\sqrt{x})^2$，虽然它们的对应关系相同，但它们的定义域不同，所以这两个函数是不同的.

**2. 函数定义域的求法**

既然函数的定义域是确定函数的两要素之一，那么在研究函数时我们要注意，只有在函数定义域内进行研究才有意义.

在实际问题中，函数的定义域是根据所研究问题的实际意义来确定的. 如例 2 中，只有当 $x$ 取非负整数时，函数 $y=12x$ 才有意义.

对于用数学式子来表示的函数，如果不考虑问题的实际意义，那么，函数的定义域是指能使这个式子有意义的所有实数的集合，使式子有意义一般要考虑以下几个方面：

(1) 在分式中，分母不能为零；

(2) 在根式中，负数不能开偶次方.

在我们将要学习的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数中，还有：

(3) 在对数式中，真数要大于零；

(4) 在三角函数和反三角函数中，要符合它们定义域；

(5) 如果函数表达式中含有这样的两种或两种以上的情形，则应取各部分定义域的交集.

**例 5**　求下列函数的定义域：

(1) $y=2x^2$；　(2) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-x-6}$；

(3) $y=\sqrt{x-2}$；　(4) $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{2x-1}$.

**解**　(1) 对于任意实数，$2x^2$ 都有意义，所以 $y=2x^2$ 的定义域为实数集 $\mathbf{R}$，用区间表示，则为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) 因为 $x^2-x-6\neq0$，即 $x\neq-2$ 且 $x\neq3$ 时，$\dfrac{x^2-1}{x^2-x-6}$ 都有意义，所以 $y=$

$\frac{x^2-1}{x^2-x-6}$的定义域为 $x\neq3$ 且 $x\neq-2$ 的所有实数集,用区间表示为$(-\infty,-2)\cup(-2,3)\cup(3,+\infty)$.

(3) 因为 $x-2\geqslant0$,即 $x\geqslant2$ 时,$\sqrt{x-2}$才有意义,故 $y=\sqrt{x-2}$的定义域是$[2,+\infty)$.

(4) 使$\sqrt{x-2}$有意义的实数 $x$ 的集合是$[2,+\infty)$,使$\frac{1}{2x-1}$有意义的实数 $x$ 的集合是$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$,所以此函数的定义域是$[2,+\infty)$.

## 四、函数的奇偶性和单调性

### 1. 函数的奇偶性

**定义**　如果函数 $y=f(x)$的定义域关于原点对称,且对于定义域内的任意 $x$,都有:

(1) 如果 $f(-x)=-f(x)$,那么 $f(x)$称为奇函数;

(2) 如果 $f(-x)=f(x)$,那么 $f(x)$称为偶函数.

如果 $f(x)$既不是奇函数也不是偶函数,那么 $f(x)$称为非奇非偶函数.

根据定义,奇函数的图象关于原点对称,偶函数的图象关于 $y$ 轴对称,如图 1-4 所示.

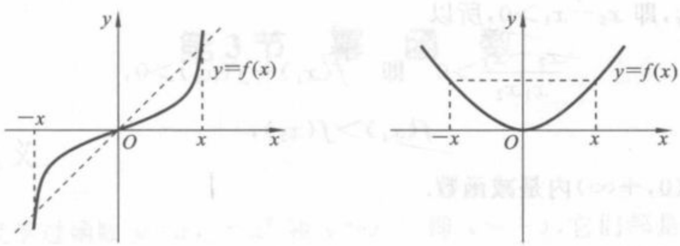



图 1-4

应该注意的是,无论是奇函数还是偶函数,它们的定义域必须关于原点对称. 如果一个函数的定义域不关于原点对称,那么它一定是非奇非偶函数.

### 2. 函数的单调性

**定义**　如果函数 $f(x)$在$(a,b)$内随着 $x$ 的增大而增大,即对于$(a,b)$内任意两点 $x_1$ 及 $x_2$,当 $x_1<x_2$ 时 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在$(a,b)$内是单调递增的,$(a,b)$称为 $f(x)$的单调递增区间,其图象如图 1-5 所示.

如果函数 $f(x)$在$(a,b)$内随着 $x$ 的增大而减小,即对于$(a,b)$内任意两点 $x_1$ 及 $x_2$,当 $x_1<x_2$ 时 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在$(a,b)$内是单调递减的,$(a,b)$称为 $f(x)$的单调递减区间,其图象如图 1-6 所示.

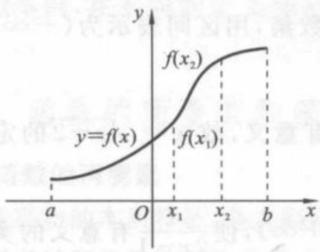



图 1-5

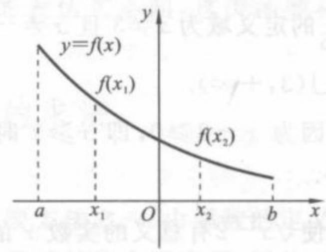



图 1-6

以上定义也适用于闭区间和无限区间的情况.在某一区间内单调递增或单调递减的函数都称为这个区间内的单调函数,该区间称为这个函数的单调区间.

**例 6** 证明 $f(x)=\dfrac{1}{x}$是在区间$(0,+\infty)$内的单调递减的函数.

**证** 设 $x_1>0,x_2>0$,且 $x_1<x_2$,则

$$f(x_1)=\frac{1}{x_1},\quad f(x_2)=\frac{1}{x_2},$$

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2},$$

因为 $x_1>0,x_2>0$,所以

$$x_1\cdot x_2>0;$$

又因为 $x_1<x_2$,即 $x_2-x_1>0$,所以

$$\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}>0\quad 即\quad f(x_1)-f(x_2)>0,$$

所以
$$f(x_1)>f(x_2),$$

$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$内是减函数.

## 五、反函数

**定义** 设函数 $y=f(x)$,如果对于 $y$ 在值域中的每一个值,都有唯一确定的 $x$ 与之对应,于是就构成了一个以 $y$ 为自变量的新函数,称为 $y=f(x)$的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$,它的定义域为 $M$,值域为 $D$.

习惯上,我们常用 $x$ 表示自变量,用 $y$ 表示函数,因此反函数通常用 $y=f^{-1}(x)$来表示.函数 $y=f(x)$的图象与它的反函数的图象关于直线 $y=x$ 对称,如图 1-7 所示.

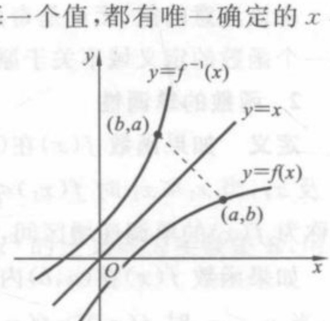



图 1-7

**例 7** 求 $y=3x-6$ 的反函数.

解 由 $y=3x-6$ 可得

$$x=\frac{1}{3}y+2,$$

交换 $x$ 和 $y$,有反函数

$$y=\frac{1}{3}x+2.$$

### 习题二

1. 已知 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0 \\ 2, & x=0 \\ 1-x^2, & x>0\end{cases}$,求 $f(-5)$,$f(0)$,$f(3)$.

2. 求函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{x+2}$; (2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}$;

(3) $y=\log_3(x+4)$; (4) $y=\sqrt[3]{x-4}+\dfrac{1}{2x-3}$.

3. 判断 $y=x^2+1$ 的奇偶性.

4. 判断 $y=x^3$ 的单调性.

5. 求 $y=x^3+1$ 的反函数.

## 第3节 幂 函 数

### 一、定义

我们已经学过函数 $y=x$,$y=x^2$ 和 $y=x^{-1}$(即 $y=\dfrac{1}{x}$),它们都是用变量的整数次幂的形式来表示的.在实际问题中,我们还会遇到用自变量的分数指数幂来表示的函数.

例如,正方形的边长 $l$ 和面积 $A$ 之间的函数关系为 $l^2=A$,即 $l=\sqrt{A}$.

对于这种底数是变量,指数是常数的函数,我们给出下面的定义:

**定义** 函数 $y=x^\alpha$ 称为幂函数,其中指数 $\alpha$ 为常数,它可以为任何实数.

因此,上面所举的函数 $y=x$,$y=x^2$,$y=x^{-1}$ 等都是幂函数.又如 $y=x^{\sqrt{2}}$ 和 $y=x^{-\sqrt{5}}$ 也是幂函数.

本书只讨论 $\alpha$ 为任意有理数的情况.

幂函数 $y=x^\alpha$ 的定义域随指数 $\alpha$ 的值而确定.

例如,函数 $y=x^3$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$;$y=x^{-1}$ 和 $y=x^{-2}$ 的定义域都是