普通高等教育"十三五"规划教材

现代应用数学基础

（第二版）

李忠艳　蒋艳杰　编著

科学出版社

(O-7772.31)

科学出版社互联网入口

高教数理出版分社：(010)64033634 销售：(010)64031535
E-mail:mph@mail.sciencep.com

销售分类建议：现代应用数学

www.sciencep.com

ISBN 978-7-03-062016-3

定价：59.00 元

普通高等教育“十三五”规划教材

现代应用数学基础

(第二版)

李忠艳　蒋艳杰　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

在科学技术及数学自身飞速发展的今天，现代数学作为其他学科的基础、语言、工具和手段，其地位日益提高. 本书旨在打造一本适合高校理工类研究生学习现代数学基础理论与方法的基本教材，使研究生能在较短的时间内尽可能多地了解现代数学的基本概念、基本理论和基本方法，提升现代数学素养，增强运用现代数学知识分析问题和解决问题的能力. 本书信息量大、深入浅出、循序渐进，具体内容包括集合与映射、代数结构与抽象空间、测度与积分、泛函分析、Sobolev 空间、微分流形、小波分析与粗糙集简介. 另外，本书还配有电子课件供老师教学使用.

本书可作为高等院校理工类研究生(或工科博士生)学习现代数学基础和方法的教材，也可作为高年级本科生及科技工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

现代应用数学基础/李忠艳，蒋艳杰编著. —2 版. —北京：科学出版社，2019.8

普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-03-062016-3

Ⅰ.①现… Ⅱ.①李… ②蒋… Ⅲ.①应用数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 163141 号

责任编辑：王胡权／责任校对：杨聪敏
责任印制：张 伟／封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中科印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 5 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2019 年 8 月第 二 版 印张：14 1/2
2019 年11月第二次印刷 字数：293 000

定价：59.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

第二版前言

《现代应用数学基础》自 2011 年在科学出版社出版以来, 一直作为华北电力大学博士研究生开设的公共基础课 “现代数学基础与方法” 的教材使用. 本次再版, 编者更正了教材中存在的一些问题和不足, 吸取了研究生在学习过程中提出的宝贵建议, 并结合一些新的教学心得和体会, 从语言上、结构上和内容上对本书进行了修订和提升.

语言上, 力求表达精准, 修正了多处相关内容的表述, 这里不一一列举.

结构上, 对不少章节内部的逻辑关系进行了优化调整, 如将原来 6.3 节进行了优化调整, 将 6.3.1 和 6.3.2 两小节合并为 6.3 节临界点理论, 将原来的 6.3.3 和 6.3.4 两小节调整为 6.4 节微分动力系统和 6.5 节微分流形理论在经济学中的应用, 力求更为严谨.

内容上, 着重对后几章节的内容调整、修正和补充, 具体如下:

(1) 在定理 5.1.1 前面增加了对于广义函数子空间 $W^{-m,q}(\Omega)$ 中泛函的具体形式的论述.

(2) 在 6.2 节中扩充了可微映射的微分的性质.

(3) 在 7.1 节中增加了 Fourier 变换的内容, 包含一维和高维的 Fourier 变换的基础知识, 这部分内容与一维和高维小波变换的内容相呼应.

(4) 将原来 7.5 节的内容修正为 7.5 节正交小波包和 7.6 节多框架小波两节内容. 这样就理顺了该章先介绍单小波理论, 再介绍多框架小波理论的内容结构, 并且增加吸收了该部分内容的最新研究思想方法和成果. 同时增加了 7.7 节高维小波的内容. 而原来的该章只介绍一维小波框架理论.

(5) 在原来 7.6 节中增加了二维小波变换在图像处理中的应用的内容.

(6) 第 8 章中增加了 8.4 节粗糙集模型的算法.

(7) 修正了部分习题, 并且为了读者便于查阅, 增加了名词索引.

(8) 对本书配套电子课件做了比较完整的修订.

本书的出版得到了华北电力大学研究生院研究生优质课程建设教改项目资助和科学出版社的支持, 同时吸收了国家自然科学基金项目 (编号: 11571107) 的部分最新研究成果. 本书配套电子课件由郭燕和殷云星修订完善. 在此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平有限, 书中难免存在疏漏及不妥之处, 敬请各位读者不吝赐教.

编　者

2019 年 3 月

第一版前言

在科学技术飞速发展的今天, 数学作为其他学科的基础、语言、工具和手段, 其研究生教育基础课程的地位日益提高. 与此同时, 数学自身也取得了很大的进展, 数学的分支日益增多. 开设一门综合性课程能够使研究生在较短的时间内尽可能多地了解现代数学的基本概念和基本理论, 提高数学素养, 增强运用数学知识分析问题和解决问题的能力, 以适应现代科学技术发展的需要, 就显得十分必要.

本书特点如下:

(1) 起点较低、信息量大、易读, 针对普通工科研究生数学基础的实际情况, 只需具备一般大学数学的基础知识就可读懂. 在内容安排上由浅入深、循序渐进, 尽可能用熟悉的例子引入新概念和新理论. 内容涉及面广, 重点放在对基本概念和基本方法的理解与运用上, 尽量避免烦琐冗长的证明. 为便于教学和学生复习, 每章后都配备了适量习题.

(2) 各章节内容既统一又独立. 本书将现代数学研究的各种对象抽象为集合, 用在集合上建立结构的观点将现代数学的几个重要分支统一成一个整体, 这样可以看到各不同分支之间的区别与内在联系. 此外, 各个结构之间又相对独立, 教学时可根据实际情况的需求适当取舍.

本书原稿是编者在华北电力大学为博士研究生开设的公共基础课"现代数学基础与方法"的讲义, 前 4 章由蒋艳杰执笔, 后 4 章由李忠艳执笔, 全书由蒋艳杰统稿. 在讲授过程中, 历届博士研究生给编者提出过许多中肯的意见和建议. 华北电力大学研究生院对本书的出版给予了大力支持和帮助, 编者在此一并表示衷心感谢.

限于编者的水平, 书中难免存在疏漏及不妥之处, 敬请读者不吝赐教.

编 者
2011 年 1 月

目　　录

第1章 集合与映射

1.1 集 合

1.1.1 集合的概念

一般认为, 现代数学以 Cantor(康托尔) 于 1874 年建立集合论为起点. 因为现代数学是将各种研究对象抽象为集合, 通过在集合上建立不同的结构研究其各种关系, 所以集合是现代数学中一个基本的概念.

任何一个理论体系都包含一些不加定义而直接引入的基本概念, 集合就是集合论中的这样一个基本概念. Cantor 对集合概念曾做过如下的描述: "把一些明确的 (确定的)、彼此有区别的、具体的或想象中抽象的东西看作一个整体, 便称为集合."

一般将集合理解为: 一定范围内一些确定的、不同对象的全体. 集合中的对象称为集合的*元素*. 通常用大写的英文字母 $A, B, C, \cdots$ 表示集合, 用小写的英文字母 $a, b, c, \cdots$ 表示集合中的元素. 若 a 是集合 A 中的元素, 则说 a 属于 A, 记作 $a \in A$; 若 a 不是集合 A 中的元素, 则说 a 不属于 A, 记作 $a \notin A$(或 $a \bar{\in} A$). 给定一个集合, 即明确了集合中所有的元素, 或者说能够判定一个元素是否属于该集合. 注意, 一个集合中的元素必须是彼此互异的.

习惯上, 用**N, Z, Q, R, C** 分别表示正整数、整数、有理数、实数、复数的全体组成的集合. 在实际问题中, 有时不能保证一个集合中至少含有一个元素 (例如, 由某一给定方程根的全体组成的集合), 因此, 引入空集的概念是合理的. 称不包含任何元素的集合为*空集*, 记为 $\varnothing$.

常用给出集合的方法有两种.

枚举法 列举出集合中的所有元素, 元素之间用逗号隔开, 然后用大括号括起来. 一般形式为 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$, 如 $A = \{2, 4, \cdots, 100\}$, 枚举法一般用于表示有限个元素组成的集合.

描述法 用集合中元素所满足的性质描述出集合所包含的元素. 一般形式为 $A = \{x | x$ 满足性质 $P\}$, 即具有性质 P 的所有元素组成的集合, 如$\mathbf{N} = \{n | n$ 为正整数$\}$.

例 1.1.1 两类常见的集合.

(1) 次数不超过 $n-1$ 的实系数多项式的全体:

$$\varPi_n=\left\{\sum_{k=0}^{n-1}a_kx^k|a_k\in\mathbf{R}\right\},\quad n=0,1,2,\cdots;$$

(2) 闭区间 $[a,b]$ 上具有直到 n 阶连续导数的实函数的全体:

$$C^n[a,b]=\{f(x)|f^{(n)}(x)\text{在}[a,b]\text{上连续}\},\quad n=0,1,2,\cdots.$$

当 $n=0$ 时, 记 $C^0[a,b]=C[a,b]$, 表示闭区间 $[a,b]$ 上连续实函数的全体.

定义 1.1.1 设 A, B 为两个集合, 若 $\forall x\in A$, 有 $x\in B$, 则称 A 是 B 的子集, 记为 $A\subset B$(A 包含于 B), 或 $B\supset A$(B 包含 A).

规定, 空集是任何集合的子集.

定义 1.1.2 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$, 则称集合 A 与 B相等, 记为 $A=B$. 若 $A\subset B$, 且 $A\neq B$, $A\neq\varnothing$, 则称 A 是 B 的真子集.

例如, 正整数集 $\mathbf{N}$ 是整数集 $\mathbf{Z}$ 的真子集, 整数集 $\mathbf{Z}$ 是实数集 $\mathbf{R}$ 的真子集.

定义 1.1.3 设 A 是一个集合, 称由 A 的所有子集为元素构成的集合为 A 的幂集, 记为 2^A(或 $P(A)$), 即 $2^A=\{B|B\subset A\}$.

定义 1.1.4 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个集合, 称集合

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

为集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积集(笛卡儿积或直积), 其中 x_i 称为元素 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在集合 A_i 上的投影(projection), 记为 $\mathrm{pr}_{A_i}(x_1,\cdots,x_n)=x_i$, $i=1,\cdots,n$. 当 $A_1=A_2=\cdots=A_n=A$ 时, 记 $A^n=\overbrace{A\times A\times\cdots\times A}^{n\text{个}}$.

例如, 实平面 $\mathbf{R}^2$ 可以看作两条实直线 $\mathbf{R}$ 的积集: $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$.

1.1.2 集合的运算

定义 1.1.5 设 A, B 为两个集合, 称集合

$$A\bigcup B=\{x|x\in A\text{或}x\in B\},$$

$$A\bigcap B=\{x|x\in A\text{且}x\in B\},$$

$$A-B=\{x|x\in A\text{且}x\notin B\},$$

分别为集合 A 与 B 的并、交、差.

并与交的运算可以推广到任意多个集合的情形: 设 $\{A_i|i \in I\}$ 为一个集族, 其中 I 为一非空指标集合, 则

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x|\exists i \in I, x \in A_i\},$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x|\forall i \in I, x \in A_i\}.$$

定理 1.1.1　集合的并与交满足下面的分配律:

$$A \bigcup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \bigcup B_i), \tag{1.1.1}$$

$$A \bigcap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \bigcap B_i). \tag{1.1.2}$$

证明　只证式 (1.1.1), 式 (1.1.2) 的证明类似.

若 $x \in A \bigcup \left(\bigcap\limits_{i \in I} B_i \right)$, 则 $x \in A$ 或者 $x \in \bigcap\limits_{i \in I} B_i$. 当 $x \in A$ 时, $\forall i \in I, x \in A \bigcup B_i$, 则 $x \in \bigcap\limits_{i \in I} (A \bigcup B_i)$; 当 $x \in \bigcap\limits_{i \in I} B_i$ 时, $\forall i \in I$, $x \in B_i$, $x \in A \bigcup B_i$, 则 $x \in \bigcap\limits_{i \in I} (A \bigcup B_i)$, 即 $\left(A \bigcup \left(\bigcap\limits_{i \in I} B_i \right) \right) \subset \left(\bigcap\limits_{i \in I} (A \bigcup B_i) \right)$.

反之, 若 $x \in \bigcap\limits_{i \in I} (A \bigcup B_i)$, 则 $\forall i \in I, x \in A \bigcup B_i$, 即 $x \in A$ 或者 $\forall i \in I, x \in B_i$. 当 $x \in A$ 时, $x \in A \bigcup \left(\bigcap\limits_{i \in I} B_i \right)$; 当 $\forall i \in I, x \in B_i$ 时, $x \in \bigcap\limits_{i \in I} B_i$, 则 $x \in A \bigcup \left(\bigcap\limits_{i \in I} B_i \right)$, 即 $\left(A \bigcup \left(\bigcap\limits_{i \in I} B_i \right) \right) \supset \left(\bigcap\limits_{i \in I} (A \bigcap B_i) \right)$.

由集合相等的定义可知 $A \bigcup \left(\bigcap\limits_{i \in I} B_i \right) = \bigcap\limits_{i \in I} (A \bigcup B_i)$. □

在某一问题的讨论中, 当所涉及的集合都是某一 "大" 集合 X 的子集时, 称这个 "大" 集合 X 为全集. 若 $A \subset X$, 称 $X - A$ 为 A 在 X 中的余集 (补集), 记为 A^c.

定理 1.1.2(De Morgan 律)　设 $A_i (i \in I)$ 为集合 X 的子集, 则下面的对偶律成立:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c, \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c.$$

证明　由余集的定义,

$$x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^{\mathrm{c}} \Leftrightarrow \quad x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \quad \forall i \in I, x \notin A_i$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall i \in I, x \in A_i^{\mathrm{c}} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i^{\mathrm{c}}.$$

同理可证 $\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right)^{\mathrm{c}} = \bigcup\limits_{i\in I} A_i^{\mathrm{c}}$. □

1.1.3 集合序列的极限

设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个集合序列, 若满足

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots,$$

则称集合序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为递增的. 若满足

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots,$$

则称集合序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为递减的. 递增的和递减的集合序列统称为单调的集合序列.

显然, 对于任意给定的一个集合序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, 令

$$X_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k, \quad Y_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

则集合序列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为递增的, $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为递减的.

定义 1.1.6　设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是集合序列, 称集合

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$$

为集合序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的上极限. 称集合

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)$$

为集合序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的下极限. 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$, 则称集合序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 并称集合 $A = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 为集合序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限, 记为 $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

由定义不难看出, 对于一般的集合序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有

(1) $x \in \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$ 的充要条件是存在无限多个 A_n 包含 x;

(2) $x \in \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$ 的充要条件是存在正整数 $N, \forall n \geqslant N$ 都有 $x \in A_n$;

(3) $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$.

因此, 对于单调递增的集合序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$; 对于单调递减的集合序列 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k$.

例 1.1.2　设 $A_{2k-1} = \left[0, 2-\dfrac{1}{k}\right)$, $A_{2k} = \left[0, 1+\dfrac{1}{k}\right)$, $k = 1, 2, \cdots$, 求集合序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的上极限和下极限, 并讨论 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是否收敛.

解　先求上极限. 注意到 $\forall x \in [0, 2)$, 都存在一个 $N > 1/(2-x)$, 当 $k \geqslant N$ 时, 有 $0 \leqslant x < 2 - 1/k$, 即 $x \in A_{2k-1}, k = N, N+1, \cdots$. 于是对任意的正整数 n, 都有 $x \in \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, 因此 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$, 即 $[0, 2) \subset \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$. 另一方面, 当 $x \notin [0, 2)$ 时, 对于任意的正整数 n, $x \notin \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, 因此 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n = [0, 2)$.

再求下极限. 对 $\forall x \in [0, 1]$ 和任意的正整数 $k > 1$, 有 $x \in A_k$. 于是对于任意的正整数 $n > 1$, 都有 $x \in \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. 因此 $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$, 即 $[0, 1] \subset \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$. 另一方面, 当 $1 < x < 2$ 时, 存在 $n_x > 1/(x-1)$, 对任意 $m \geqslant n_x$, 有 $x \notin A_{2m}$, 即对任意的正整数 n, 都有 $x \notin \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. 因此 $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = [0, 1]$.

因为 $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = [0, 1] \neq \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n = [0, 2)$, 所以集合序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不收敛.

1.2　映　射

1.2.1　映射的概念

集合与集合之间、集合的元素与元素之间都可以通过映射建立起联系. 映射是现代数学中一个最基本的概念.

定义 1.2.1　设 X, Y 是两个非空集合. 若对于每个 $x \in X$, 按照某种确定的对应法则 f, 都有唯一确定的 $y \in Y$ 与之对应, 则称此对应法则 f 为集合 X 到 Y 的一个**映射**(特别地, 称 X 到 X 的映射为**变换**), 记为 $f: X \to Y$. 称 y 为 x 在映射 f 下的**象**, 记为 $y = f(x)$; 称 x 为 y 的**原象**. 称 X 为映射 f 的**定义域**; 称 Y 的子集 $f(X) = \{f(x) | x \in X\}$ 为映射 f 的**值域**. 若 $A \subset X, B \subset Y$, 称集合