



普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学同步指导

刘雅妹 王霞◎编著



科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学同步指导

刘雅妹 王霞 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书为同济大学数学系编写的《高等数学（第七版）》（高等教育出版社出版）的配套辅导教材，共分12章，章节的划分与《高等数学（第七版）》教材完全一致。每章内容由六部分组成：基本概念、性质与结论，典型例题分析，疑难问题解答，同步训练题，自测题，以及参考答案与提示。

本书结构严谨、条理清晰、综合性强，并有较强的针对性和可操作性，深入浅出，便于自学。

本书可作为高等院校理工科“高等数学”课程学习的辅导读物，也可作为教师教学的参考书，同时也是一本同步指导与训练教程，还可作为学生考研的系统复习与基础训练用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学同步指导/刘雅妹，王霞编著. —北京：科学出版社，2018.8
（普通高等教育“十三五”规划教材）
ISBN 978-7-03-058620-9

I. ①高… II. ①刘… ②王… III. ①高等数学—高等学校—数学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第194743号

责任编辑：宋 丽 袁星星 / 责任校对：马英莉
责任印制：吕春珉 / 封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
<http://www.sciencep.com>

三河市荣展印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018年8月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2018年8月第一次印刷 印张：25

字数：585000

定价：62.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈荣展〉）

销售部电话 010-62136230 编辑部电话 010-62135120-2047

版权所有，侵权必究

举报电话：010-64030229；010-64034315；13501151303

前 言

本书共分 12 章, 每章由六部分组成: 第一部分基本概念、性质与结论, 主要对本章内容进行归纳, 既简洁又翔实. 第二部分典型例题分析, 对每节内容的知识点进行逐个剖析, 同时注重方法技巧的指导和归纳. 精心选编和命制的例题, 题型多, 覆盖面广, 基本涵盖了本章各节典型的重、难点题目, 旨在让读者深化对数学知识的理解, 增长见识, 并把它们内化成自己的解题能力. 第三部分疑难问题解答, 对每个章节的疑难问题给出了详细的解答. 第四部分同步训练题, 针对《高等数学(第七版)》(同济大学数学系编, 高等教育出版社出版)的部分章节进行同步训练, 旨在帮助读者通过训练, 巩固基础, 掌握本节的基本知识、解题方法与技巧. 建议读者独立完成这些精选的试题, 这样既可检验自己的学习成果, 又可培养自己独立的解题能力. 其中带“*”的习题多为综合试题和近年来的考研试题, 供学有余力和有志于考研的读者练习使用, 旨在帮助他们在学习的同时备战考研, 达到考研的能力和要 求. 第五部分自测题, 重在覆盖面, 基本涵盖了本章的每一个重要知识点, 难度略高于期中、期末试题, 这样有助于检验读者对本章内容的掌握情况, 且能够查漏补缺, 从而为完成全部课程的学习奠定基础. 第六部分参考答案与提示, 包括同步训练题和自测题的答案或提示, 较难的试题给出了解题的思路及方法.

本书可作为高等院校理工科本科生学习“高等数学”课程的辅导读物和同步训练教程. 对青年教师来说, 本书是一本较好的教学参考书; 对报考研究生的大学生来说, 本书也是一本较好的系统复习用书和基础训练教程.

本书由河南城建学院刘雅妹和郑州轻工业大学王霞主持编著, 参加编著工作的还有赵玲玲、李春、邢培旭、郭卫华. 在编著的过程中, 编者融入了许多近年来的教育教学研究成果, 并博采众家之长, 汲取了多本参考书的精华, 在此向各位作者表示感谢.

由于时间仓促, 编者水平有限, 本书不足之处在所难免, 殷切希望读者提出宝贵意见, 以便改进和修正.

目 录

第一章 函数、极限与连续	1
一、基本概念、性质与结论.....	1
二、典型例题分析.....	3
三、疑难问题解答.....	21
四、同步训练题.....	24
五、自测题.....	36
六、参考答案与提示.....	38
第二章 导数与微分	43
一、基本概念、性质与结论.....	43
二、典型例题分析.....	45
三、疑难问题解答.....	57
四、同步训练题.....	59
五、自测题.....	65
六、参考答案与提示.....	66
第三章 微分中值定理与导数的应用	69
一、基本概念、性质与结论.....	69
二、典型例题分析.....	73
三、疑难问题解答.....	95
四、同步训练题.....	98
五、自测题.....	105
六、参考答案与提示.....	106
第四章 不定积分	109
一、基本概念、性质与公式.....	109
二、典型例题分析.....	110
三、疑难问题解答.....	123
四、同步训练题.....	125
五、自测题.....	131
六、参考答案与提示.....	132
第五章 定积分	136
一、基本概念、性质与结论.....	136
二、典型例题分析.....	138
三、疑难问题解答.....	150
四、同步训练题.....	152
五、自测题.....	158

六、参考答案与提示	160
第六章 定积分的应用	163
一、基本概念、性质与结论	163
二、典型例题分析	165
三、疑难问题解答	173
四、同步训练题	173
五、自测题	176
六、参考答案与提示	178
第七章 微分方程	180
一、基本概念、性质与结论	180
二、典型例题分析	183
三、疑难问题解答	198
四、同步训练题	199
五、自测题	206
六、参考答案与提示	207
第八章 向量代数与空间解析几何	211
一、基本概念、性质与结论	211
二、典型例题分析	215
三、疑难问题解答	227
四、同步训练题	229
五、自测题	235
六、参考答案与提示	237
第九章 多元函数微分学	240
一、基本概念、性质与结论	240
二、典型例题分析	243
三、疑难问题解答	259
四、同步训练题	262
五、自测题	272
六、参考答案与提示	274
第十章 重积分	280
一、基本概念、性质与结论	280
二、典型例题分析	284
三、疑难问题解答	302
四、同步训练题	303
五、自测题	309
六、参考答案与提示	311

第十一章 曲线积分与曲面积分	314
一、基本概念、性质与结论	314
二、典型例题分析	319
三、疑难问题解答	333
四、同步训练题	336
五、自测题	346
六、参考答案与提示	347
第十二章 无穷级数	351
一、基本概念、性质与结论	351
二、典型例题分析	355
三、疑难问题解答	373
四、同步训练题	375
五、自测题	384
六、参考答案与提示	386
主要参考文献	389

第一章 函数、极限与连续

一、基本概念、性质与结论

1. 函数

(1) 概念

1) 映射：满射、单射和双射；逆映射与复合映射.

2) 函数、分段函数.

3) 反函数、复合函数.

4) 基本初等函数、初等函数.

(2) 性质

1) 有界函数 $f(x)$: 任意 $x \in X \subset D$, 存在 $M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M$.

2) 单调增加 (或单调减少) 函数 $f(x)$: 任意 $x_1, x_2 \in X \subset D$, 当 $x_1 < x_2$ 时,

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ (或 } f(x_1) > f(x_2) \text{)}.$$

3) 奇 (或偶) 函数 $f(x)$: 任意 $x \in D$, D 关于原点对称, 有

$$f(-x) = -f(x) \text{ (或 } f(-x) = f(x) \text{)}.$$

4) 周期函数 $f(x)$: 任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 存在 $T > 0$, 使 $f(x+T) = f(x)$.

2. 极限

(1) 概念

1) 数列极限、函数极限.

2) 无穷小、无穷大及无穷小的阶.

(2) 性质与结论

1) 收敛数列极限的唯一性: 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么它的极限唯一.

2) 收敛数列的有界性: 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

3) 收敛数列的保号性: 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 且 $a > 0$ (或 $a < 0$), 那么存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$).

4) 收敛数列与其子数列的关系: 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 那么它的任一子数列也收敛, 且极限也是 a .

5) 函数极限的唯一性: 如果极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 那么极限唯一.

6) 函数极限的局部有界性: 如果 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$, 那么存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$.

7) 函数极限的局部保号性: 如果 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$, 而且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那么存在常数 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

如果 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0) (A \neq 0)$, 那么存在点 x_0 的某一去心邻域, 在该邻域内, 有 $|f(x)| > \frac{1}{2}|A|$.

8) 函数极限与数列极限的关系: 如果当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 的极限存在, $\{x_n\}$ 为 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列, 且满足 $x_n \neq x_0 (n \in \mathbf{N}^+)$, 那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

9) 极限存在的充要条件: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

10) 夹逼准则:

① 数列形式: 若 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 满足 $y_n \leq x_n \leq z_n$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

② 函数形式: 若在 x_0 的某去心邻域 (或 $|x| > M > 0$) 内, 满足 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 且

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} h(x) = A, \text{ 则 } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = A.$$

11) 单调有界数列必有极限.

(3) 两个重要极限

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

(4) 无穷小的性质

1) 有限个无穷小的和 (或积) 也是无穷小.

2) 有界函数 (或常数) 与无穷小的乘积是无穷小.

3) 无穷小 (不为 0) 的倒数为无穷大, 无穷大的倒数为无穷小.

4) β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为 $\beta = \alpha + o(\alpha)$.

5) 若 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

3. 函数的连续性

(1) 概念

1) 函数在 x_0 处连续的概念: 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一个邻域内有定义, 如果当自变量的增量 $\Delta x = x - x_0 \rightarrow 0$ 时, 对应的函数的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \rightarrow 0$, 即 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续.

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

2) 左、右连续与连续的关系: 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续 \Leftrightarrow 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处左连续且右连续.

3) 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续: $f(x)$ 在 (a, b) 内每一点处连续, 且在 $x = a$ 右连续, 在 $x = b$ 左连续.

4) 函数 $f(x)$ 的间断点的类型: 如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点, 且左极限 $f(x_0^-)$ 及右极限 $f(x_0^+)$ 都存在, 那么 x_0 称为函数 $f(x)$ 的第一类间断点; 不是第一类间断点的其他间断点, 称为第二类间断点. 在第一类间断点中, 左、右极限相等者称为可去间断点, 不相等者称为

跳跃间断点. 无穷间断点和振荡间断点显然是第二类间断点.

(2) 结论

1) 初等函数的连续性: 基本初等函数在它们的定义域内都是连续的. 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

2) 闭区间上连续函数的性质:

① 最大值和最小值定理: 在闭区间上连续的函数在该区间上一定能取得它的最大值 M 和最小值 m .

② 有界性定理: 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

③ 零点定理: 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 那么在开区间 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使 $f(\xi) = 0$.

④ 介值定理: 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \neq f(b)$, 那么, 对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意一个数 C , 在开区间 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使 $f(\xi) = C$.

二、典型例题分析

1. 函数及其性质

例 1.1 (1) 求函数 $f(x) = \sqrt{3-x} + \arcsin \frac{3-2x}{5}$ 的定义域;

(2) 若函数 $f(x) = \sqrt{mx^2 + mx + 1}$ 的定义域为 \mathbf{R} , 求实数 m 的取值范围.

解 (1) 由题意, $y = f(x)$ 的定义域应满足
$$\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ \left| \frac{3-2x}{5} \right| \leq 1 \end{cases},$$
 解不等式得 $-1 \leq x \leq 3$, 故

函数 $f(x)$ 的定义域为 $D = [-1, 3]$.

(2) 分以下两种情况讨论:

① 当 $m = 0$ 时, $f(x) = 1$, 显然 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ;

② 当 $\begin{cases} m > 0 \\ \Delta = m^2 - 4m \leq 0 \end{cases}$ 时, 解得 $0 < m \leq 4$.

综上所述, 当实数 m 满足 $0 \leq m \leq 4$ 时, $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} .

评注 求初等函数的定义域有以下原则:

(1) 分式的分母不能为零.

(2) 根式中负数不能开偶次方.

(3) 对数的真数不能为零和负数.

(4) $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $|x| \leq 1$; $\tan x$ 的定义域为 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$; $\cot x$ 的定

义域为 $x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

(5) 求复合函数的定义域时, 通常将复合函数看成一系列初等函数的复合, 然后考查每个初等函数的定义域和值域, 得到对应的不等式组, 联立求解不等式组, 就可得到复合函数的定义域.

(6) 对于应用问题中的函数, 其定义域由实际问题的具体含义确定.

例 1.2 把下列函数分解为最简单的函数:

$$(1) y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$(2) y = 3^{\sin^2(1+x)}.$$

解 由外向里进行分解:

$$(1) y = \arcsin u, u = v^{-\frac{1}{2}}, v = 1+x^2;$$

$$(2) y = 3^u, u = v^2, v = \sin w, w = 1+x.$$

例 1.3 问函数 $y = \sqrt{1-u}$ 与 $u = 1+e^x$ 能否构成复合函数? 为什么?

解 两个函数能否构成复合函数, 取决于外层函数的定义域和内层函数的值域有没有公共部分. 这里外层函数 $y = \sqrt{1-u}$ 的定义域为 $D_f = \{u | u \leq 1\}$, 内层函数 $u = 1+e^x$ 的值域为 $R_u = \{u | 1 < u < +\infty\}$, 由于交集为空集, 即 $D_f \cap R_u = \emptyset$, 所以函数 $y = \sqrt{1-u}$ 与 $u = 1+e^x$ 不能构成复合函数.

例 1.4 求 $y = f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 2 \\ x^2-1, & x \geq 2 \end{cases}$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$.

解 当 $x < 2$ 时, 由 $y = 1+x$, 得 $x = y-1, y < 3$.

当 $x \geq 2$ 时, 由 $y = x^2-1$, 得 $x = \sqrt{y+1}, y \geq 3$.

对换 x, y 的位置, 得反函数 $y = f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1, & x < 3 \\ \sqrt{x+1}, & x \geq 3 \end{cases}$.

评注 反函数的求解方法比较固定, 先由 $y = f(x)$ 解出 $x = f^{-1}(y)$, 再对换自变量与因变量的位置, 即得所求的反函数 $y = f^{-1}(x)$. 对分段函数要注意所求函数表达式所在的区间.

例 1.5 讨论函数 $f(x) = (2+\sqrt{3})^x - (2-\sqrt{3})^x$ 的奇偶性.

解 因为

$$f(-x) = (2+\sqrt{3})^{-x} - (2-\sqrt{3})^{-x} = \left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^x - \left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x,$$

分母有理化, 得

$$f(-x) = (2-\sqrt{3})^x - (2+\sqrt{3})^x = -f(x),$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

例 1.6 设 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $\forall x, y$ 都有 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$, 且 $f(x) \neq 0$, 证明 $f(x)$ 为偶函数.

证明 由 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$, 用 $-y$ 代替 y , 得

$$f(x-y) + f(x+y) = 2f(x)f(-y),$$

所以 $2f(x)f(y) = 2f(x)f(-y)$. 又因为 $f(x) \neq 0$, 故 $f(y) = f(-y)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数.

评注 判定函数奇偶性的方法:

(1) 根据奇偶性的定义或利用奇偶函数的运算性质. 例如, 奇(或偶)函数的代数和仍为奇(或偶)函数; 奇(或偶)函数的积为偶函数; 奇函数与偶函数的积为奇函数等.

(2) 证明 $f(-x) = -f(x)$ (或 $f(-x) = f(x)$).

例 1.7 设存在两个实数 a, b , 且 $a < b$, 函数 $y = f(x), x \in (-\infty, +\infty)$ 满足 $f(a-x) = f(a+x)$, $f(b-x) = f(b+x)$, 证明 $y = f(x)$ 为周期函数.

证明 因为

$$\begin{aligned} f(x) &= f[a+(x-a)] = f[a-(x-a)] = f(2a-x) \\ &= f[b+(2a-x-b)] = f[b-(2a-x-b)] = f[x+2(b-a)], \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 为周期函数, 周期为 $T=2(b-a)$.

评注 判定函数 $f(x)$ 为周期函数的主要方法:

- (1) 从定义出发, 找到 $T>0$, 使 $f(x+T)=f(x)$.
- (2) 利用周期函数的运算性质证明.

2. 用定义证明极限

例 1.8 利用定义证明下列数列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) = 1; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = 1.$$

证明 (1) 对于任给的 $\varepsilon>0$, 要使 $\left|1 - \frac{1}{5^n} - 1\right| = \frac{1}{5^n} < \varepsilon$, 只要 $5^n > \frac{1}{\varepsilon}$ 即可.

两边取对数, 得 $n \ln 5 > \ln \frac{1}{\varepsilon}$, 即 $n > -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 5}$.

因此, 对于任给的 $\varepsilon>0$ (不妨设 $\varepsilon<1$), 可取正整数 $N = \left\lceil -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 5} \right\rceil$, 当 $n > N$ 时, 恒有

$$\left|1 - \frac{1}{5^n} - 1\right| < \varepsilon \text{ 成立, 即 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) = 1.$$

(2) 对于任给的 $\varepsilon>0$, 为使

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+1}}{n} - 1\right| = \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n} = \frac{1}{n(\sqrt{n^2+1}+n)} < \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

只要 $n > \frac{1}{\varepsilon}$. 故取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 当 $n > N$ 时, $\left|\frac{\sqrt{n^2+1}}{n} - 1\right| < \varepsilon$ 恒成立, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = 1$.

评注 用定义证明数列的极限时, 关键是对任给的 $\varepsilon>0$, 寻找 N , 但不必找最小的 N , 即 N 等于多少并不重要, 重要的是是否存在 N . 找 N 的方法有两种, 以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 为例说明:

- (1) 直接解不等式 $|x_n - A| < \varepsilon$, 得 $n > \varphi(\varepsilon)$, 取 $N \geq [\varphi(\varepsilon)]$ (或 $N = [\varphi(\varepsilon)]$).
- (2) 将 $|x_n - A|$ 适当放大, 即 $|x_n - A| \leq \dots \leq g(n)$ (其中 $g(n)$ 为一个较简单的无穷小量), 然后解不等式 $g(n) < \varepsilon$, 得 $n > \varphi(\varepsilon)$, 取 $N \geq [\varphi(\varepsilon)]$ (或 $N = [\varphi(\varepsilon)]$).

例 1.9 设数列 $\{x_n\}$ 的一般项 $x_n = \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{2}$.

- (1) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$;
- (2) 当 $\varepsilon = 0.001$ 时, 求出 N , 使当 $n > N$ 时, x_n 与其极限之差的绝对值小于正数 ε .

解 (1) 易知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

(2) 对于 $\varepsilon = 0.001$, 由于 $|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{2}\right| \leq \frac{1}{n}$, 所以只要 $\frac{1}{n} < \varepsilon = 0.001$ 即可, 即 $n > \frac{1}{\varepsilon}$,

所以取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil = 1000$. 故当 $n > 1000$ 时, x_n 与 0 的差的绝对值小于 0.001.

评注 以下方法是错误的:

$$\forall \varepsilon > 0, |x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{2} \right| < \varepsilon, \text{ 只要 } n > \frac{\left| \cos \frac{n\pi}{2} \right|}{\varepsilon}, \text{ 故取 } N = \left\lceil \frac{\left| \cos \frac{n\pi}{2} \right|}{\varepsilon} \right\rceil.$$

因为 N 不能与 n 有关.

例 1.10 设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列选项中正确的是 ().

- (A) 若 $\{x_n\}$ 发散, 则 $\{y_n\}$ 必发散
 (B) 若 $\{x_n\}$ 无界, 则 $\{y_n\}$ 必有界
 (C) 若 $\{x_n\}$ 有界, 则 y_n 必为无穷小
 (D) 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 y_n 必为无穷小

解 运用排除法, 若令 $x_n = n, y_n = \frac{1}{n^2}$, 则排除 (A).

若令 $x_n = \begin{cases} 0, & n = 2k+1 \\ n, & n = 2k \end{cases}, y_n = \begin{cases} n, & n = 2k+1 \\ 0, & n = 2k \end{cases}$, 则排除 (B).

若选项 (C) 成立, 则显然有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 但反过来未必成立, 如若取 $x_n = \frac{1}{n^2}, y_n = n$, 则同样有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 故排除选项 (C).

综上所述应选 (D), 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 事实上, $y_n = (x_n y_n) \cdot \frac{1}{x_n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

评注 解选择题切忌一一进行求证, 应灵活运用综合排除法、特殊值法、反证法等. 见到抽象型、理论性的选择题, 就要想到用排除法.

例 1.11 利用定义证明下列函数极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4; \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{3x+1} = \frac{1}{3}.$$

证明 (1) 考查 $|x^2 - 4| = |x-2| \cdot |x+2|$, 在 $x \rightarrow 2$ 的过程中, x 只在 2 附近取值, 故可限制 $|x-2| < 1$, 于是 $1 < x < 3$, $|x+2| < 5$, 因此 $|x^2 - 4| = |x-2| \cdot |x+2| < 5|x-2|$.

对于任给的 $\varepsilon > 0$, 欲使 $|x^2 - 4| < \varepsilon$, 只需 $5|x-2| < \varepsilon$, 即 $|x-2| < \frac{\varepsilon}{5}$. 取 $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{5} \right\}$, 当 $0 < |x-2| < \delta$ 时, 有 $|x^2 - 4| < \varepsilon$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

(2) 任给 $\varepsilon > 0$, 要证 $\exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有

$$\left| \frac{x+1}{3x+1} - \frac{1}{3} \right| = \frac{2}{3|3x+1|} < \frac{1}{|3x+1|} \leq \frac{1}{3|x|-1} < \varepsilon,$$

因此只需 $|x| > \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right)$. 取 $X = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right)$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有 $\left| \frac{x+1}{3x} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$, 即

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{3x+1} = \frac{1}{3}.$$

评注 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$) 的关键在于, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 找相应的 $\delta > 0$ (或 $X > 0$), 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ (或 $|x| > X$) 时, 不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立. 因此找 δ (或 X) 时, 一般从解 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 入手, 尽量将上述不等式转化为关于 $|x - x_0|$ (或 $|x|$) 的不等式, 将 $|x - x_0|$ (或 $|x|$) 视为未知数来解. 注意在解不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 的过程中, 不要将 x 视为未知数来解, 否则将无法找到相应的 δ (或 X).

在 (1) 中用了这样的手法: 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 可将 x 限制在 x_0 的一个邻域内, 即限制 x 满足 $|x - x_0| < r$ (在 (1) 中 $r = 1$), 在此限制条件下, 就可推出 $|f(x) - A| < c|x - x_0|$ (其中 c 为某一确定的常数), 于是由 $c|x - x_0| < \varepsilon$, 就可保证 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

3. 利用四则运算法则求极限

例 1.12 求下列极限:

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{n^2 + 4n} - n]$; (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n + x^{n-1} + \cdots + x - n}{x - 1}$;
 (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$; (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$, 其中 $|a| < 1$;
 (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^{2^n}}$, 其中 $|a| < 1, |b| < 1$.

解 (1) 分子有理化, 得

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n - n^2}{\sqrt{n^2 + 4n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{\sqrt{n^2 + 4n} + n} = 2.$$

$$\begin{aligned} (2) \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1 + x^{n-1} - 1 + \cdots + x^2 - 1 + x - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^n - 1}{x - 1} + \frac{x^{n-1} - 1}{x - 1} + \cdots + \frac{x^2 - 1}{x - 1} + \frac{x - 1}{x - 1} \right). \end{aligned}$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)}{x - 1} = n$, 所以

$$\text{原式} = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$(3) \text{原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

(4) 由于积的极限等于极限的积这一法则只对有限个因子的积成立, 因此, 求解本题时, 需先用求积公式将其变形. 由于

$$(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n}) = \frac{1}{1-a}(1-a)(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n}) = \frac{1}{1-a}(1-a^{2^{n+1}}),$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $2^{n+1} \rightarrow +\infty$, 而 $|a| < 1$, 故 $a^{2^{n+1}} \rightarrow 0^+$, 从而原式 $= \frac{1}{1-a}$.

(5) 由于分子、分母均为无穷多项的和, 所以应先求出其和, 再求极限. 利用等比数列求和公式, 有

$$1+a+a^2+\cdots+a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \quad 1+b+b^2+\cdots+b^{2n} = \frac{1-b^{2n+1}}{1-b},$$

所以

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \bigg/ \left(\frac{1-b^{2n+1}}{1-b} \right) = \frac{1}{1-a} \bigg/ \left(\frac{1}{1-b} \right) = \frac{1-b}{1-a}.$$

评注 (1) 对于有理函数或无理函数的“ $\frac{0}{0}$ ”型极限, 可通过分解因式及分子或分母有理化解出并消去致零因子, 化为定式求极限.

(2) 对于有理函数或无理函数及相应数列的“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型极限, 应采取“抓大放小”原则, 关注分子、分母的最高次项. 当分子与分母次数相同时, 极限为分子与分母最高次项的系数之商; 当分子的次数低于分母的次数时极限为0; 当分子的次数高于分母的次数时极限为 ∞ .

4. 利用“无穷小量与有界变量的乘积是无穷小量”求极限

例 1.13 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x+x^2}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}).$$

解 (1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, x 是无穷小量, 虽然 $\cos \frac{1}{x+x^2}$ 的极限不存在, 但因 $\left| \cos \frac{1}{x+x^2} \right| \leq 1$, 即它是有界的, 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x+x^2} = 0.$$

注 本小题易犯的错误如下:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x+x^2} = 0.$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x+x^2}$ 不存在, 所以不能运用极限的四则运算法则求解.

$$(2) \sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} = 2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}.$$

因为 $\left| 2 \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \right| \leq 2$, 故 $2 \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}$ 为有界函数, 而

$$0 \leq \left| \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \right| < \left| \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \right| = \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty.$$

故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} = 0$, 因此 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = 0$.

5. 利用函数极限与数列极限的关系求极限

例 1.14 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{1}{2^n}$.

解 利用求函数极限的方法求数列的极限.

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 取 $x_n = \frac{1}{2^n}$, 则 $x_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1.$$

例 1.15 证明 $f(x) = x \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界, 但当 $x \rightarrow \infty$ 时 $f(x)$ 并不是无穷大.

证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界是指, $\forall M > 0$, 总存在 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$, 使 $|f(x_0)| > M$.

事实上, $\forall M > 0$ (设 $M > 1$), 取 $x_0 = 2[M]\pi$, 则 $|f(x_0)| = 2[M]\pi > M$, 这说明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界.

当 $x \rightarrow \infty$ 时 $f(x)$ 是无穷大是指, $\forall M > 0$, 总存在 $Z_0 > 0$, 使当 $|x| > Z_0$ 时, 恒有 $|f(x)| > M$. 因此当 $x \rightarrow \infty$ 时 $f(x)$ 并不是无穷大则是指, 存在 $M > 0$ 使 $\forall Z_0 > 0$, 总有 x_0 满足条件 $|x_0| > Z_0$, 但 $|f(x_0)| \leq M$.

事实上, 取 $M = 1$, $\forall Z_0 > 0$ (设 $Z_0 > 1$), 记 $x_0 = 2[Z_0]\pi + \frac{\pi}{2} > Z_0$, 而 $|f(x_0)| = 0 < 1$. 利用函数极限与数列极限的关系, 可将上述过程简化如下:

取 $x_n = 2n\pi \rightarrow +\infty$, 则 $f(x_n) = 2n\pi \cos 2n\pi \rightarrow +\infty$;

取 $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow +\infty$, 则 $f(y_n) = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 0$.

这说明 $f(x) = x \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界, 但当 $x \rightarrow \infty$ 时 $f(x)$ 并不是无穷大.

评注 (1) 为证明极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 不存在, 只要寻找两个趋于 a 的数列 $\{x_n^{(1)}\}$ 和 $\{x_n^{(2)}\}$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^{(1)}) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^{(2)})$ 即可.

(2) 为证明 $f(x)$ 当 $x_n \rightarrow a$ 时不是无穷大量, 即证 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq \infty$, 只要寻找一个趋近于 a 的数列 $\{x_n^*\}$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^*) \neq \infty$ 即可.

6. 利用极限存在的两个准则求极限

例 1.16 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + \pi}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2\pi}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n\pi}} \right);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} \right).$$

解 (1) 因为 $\frac{1}{\sqrt{n^2 + n\pi}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + k\pi}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + \pi}}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), 所以

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n\pi}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + n\pi}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k\pi}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + \pi}} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + \pi}}.$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n\pi}} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + \pi}} = 1$, 所以原式 = 1.

(2) 因为 $\frac{k}{n^2 + n} \leq \frac{k}{n^2 + k} \leq \frac{k}{n^2 + 1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), 所以

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+1} = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+1},$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n} = \frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+1} = \frac{1}{2}$, 所以原式 $= \frac{1}{2}$.

例 1.17 求 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$ ($x \geq 0$) 的表达式.

解 (1) 当 $x \in [0, 1)$ 时, $\max\left\{1, x^n, \left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right\} = 1$, 则

$$1 \leq 1+x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n < 3, \quad 1 \leq \sqrt[n]{1+x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} < \sqrt[n]{3}.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = 1$, 所以由夹逼准则, 得

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = 1.$$

(2) 当 $x \in [1, 2)$ 时, $\max\left\{1, x^n, \left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right\} = x^n$, 则

$$x^n < 1+x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n < 3x^n, \quad x < \sqrt[n]{1+x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} < \sqrt[n]{3} \cdot x.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3}x = x$, 所以由夹逼准则, 得

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = x.$$

(3) 当 $x \in [2, +\infty)$ 时, $\max\left\{1, x^n, \left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right\} = \left(\frac{x^2}{2}\right)^n$, 则

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)^n < 1+x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n < 3\left(\frac{x^2}{2}\right)^n, \quad \frac{x^2}{2} < \sqrt[n]{1+x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} < \sqrt[n]{3} \cdot \frac{x^2}{2}.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}$, 所以由夹逼准则, 得

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = \frac{x^2}{2}.$$

综上所述可得 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{x^2}{2}, & x \geq 2 \end{cases}$.

评注 利用夹逼准则求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的要点: 将 x_n 适当放大及缩小, 即找两个数列 $\{y_n\}$ 及