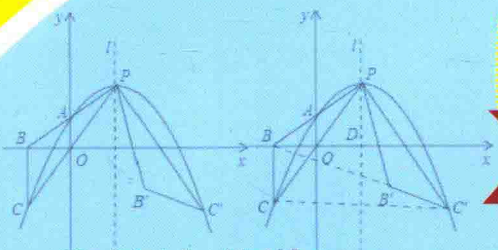
中考满分教程

我爱压轴题



郑德坤 编著

# 中考数学压轴题全解析

- **方法归纳** 系统全面，精准提炼要点
- **典型例题** 点播真题，轻松掌握诀窍
- **举一反三** 强化训练，成功攻克压轴题

清华大学出版社

# 我爱压轴题

# 中考数学压轴题全解析

郑德坤 编著

清华大学出版社
北京

## 内容简介

本书致力于中考数学命题的研究，旨在帮助学生在中考中获得高分和满分，同时也供其他教学人员学习和参考之用.

本书内含各种类型数学中考压轴题，内容全面实用. 总结常用几何辅助线与常见几何模型，帮助考生在考试中快速找到解题的突破口；归纳各种函数压轴题题型，帮助考生了解命题的意图，顺利扫清思维障碍，获得满意答案. 本书还总结了各种实用的解题技巧，简单高效. 部分题目一题多解，拓展学生的思维.



**图书在版编目(CIP)数据**

我爱压轴题. 中考数学压轴题全解析/郑德坤编著. --北京：清华大学出版社，2016（2017.4 重印）
ISBN 978-7-302-41653-1

Ⅰ. ①我…　Ⅱ. ①郑…　Ⅲ. ①中学数学课－初中－习题集－升学参考资料　Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 231002 号

**责任编辑**：赵铁华
**封面设计**：常雪颖
**责任校对**：袁　芳
**责任印制**：李红英

**出版发行**：清华大学出版社
　　**网　　址**：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　　**社 总 机**：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　**投稿与读者服务**：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　**质 量 反 馈**：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
**印 装 者**：北京鑫海金澳胶印有限公司
**经　　销**：全国新华书店
**开　　本**：185mm×260mm　　**总印张**：24.75　　**总 字 数**：595 千字
**版　　次**：2016 年 4 月第 1 版　　**印　　次**：2017 年 4 月第 3 次印刷
**印　　数**：3501～5500
**定　　价**：49.80 元

产品编号：065279-01

# FOREWORD 前言

你是否在为解压轴题而感到头痛？

你是否在为中考数学中获得高分、满分而忧愁？

你是否想用最短的时间来获得最好的学习效果？

这将是一本让你豁然开朗的书，里面涵盖了中考数学压轴题的全部题型，几乎所有的压轴题都可以在这里找到影子。本书深入讲解了常见的辅助线添加方法以及数学模型，细致分析了二次函数相关类型题目的问法与解法，同时对比了部分城市比较经典的数学压轴题。在千变万化的题海中，力求找到一些统一的规律。

每一节的内容分为以下几个部分。

【方法归纳】总结各种解题的方法、技巧，内容全面，助你在解题过程中理清思路，找到解题的突破口。

【典型例题】精选历年中考数学压轴题，进行归类解析，助你发现同一类问题的不同考法，洞悉命题规律。

【技巧点拨】总结某一类型题目最简单有效的方法，达到以不变应万变的效果。

【举一反三】配套中考真题作为对应练习，在训练中巩固和提升解题能力。

本书中还有一个非常重要的特点就是一题多解。从不同的方向入手，对同一问题进行多方面的分析，帮你了解试题背后的原理。

这是一本值得命题人、教师和学生认真研究的书，解题也是做学问，通过用心的研究才会发现其中的内涵，体会数学的逻辑性，感受数学的美。

这是一本解题的秘籍。还等什么，马上打开吧！

在这里祝愿广大的考生在中考中获得理想的成绩，升入梦想的学校！

编　者

2016 年 4 月

CONTENTS 目录

CHAPTER

1

# 第 1 章

# 常用几何辅助线添加方法

# 1.1 连 接

## 方法说明

如图 1.1.1 所示，将图中两个点用线段连接起来的辅助线添加方法叫作连接. 连接是最简单、最常用的辅助线添加方法之一. 通过连接这种辅助线来构造我们需要的图形的方法有很多，需要平时多积累，多应用，才能达到熟能生巧的境界.

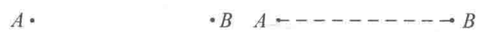



图 1.1.1

## 方法归纳

1. 如图 1.1.2 所示，通过连接构建全等三角形.

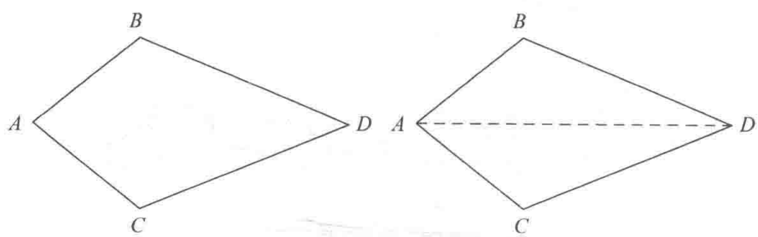



图 1.1.2

2. 如图 1.1.3 所示，通过连接构建角平分线.

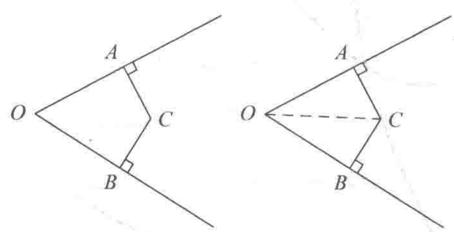



图 1.1.3

3. 如图 1.1.4 所示，通过连接构建相等的线段.

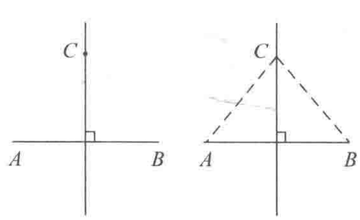



图 1.1.4

4. 如图 1.1.5 所示，连接三角形顶点和对边中点构建中线.

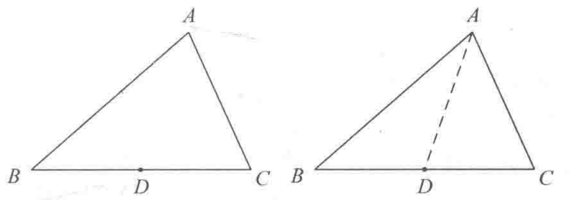



图　1.1.5

5. 如图 1.1.6 所示，连接三角形相邻边的中点构建中位线.

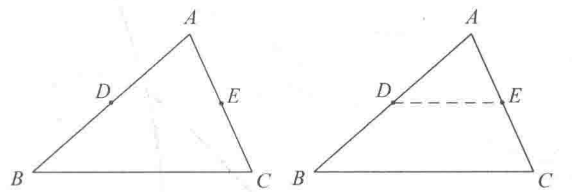



图　1.1.6

6. 如图 1.1.7 所示，通过连接圆心和圆上的两个点构建圆心角.

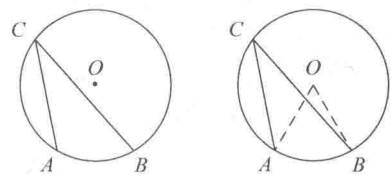



图　1.1.7

7. 如图 1.1.8 所示，通过连接圆上的一个点和其他两个点构建圆周角，特别是有直径的时候.

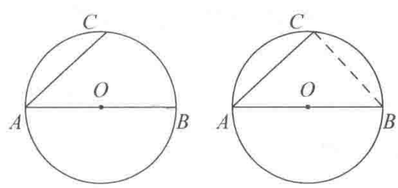



图　1.1.8

8. 如图 1.1.9 所示，连接切点和圆心构建切线的垂线.

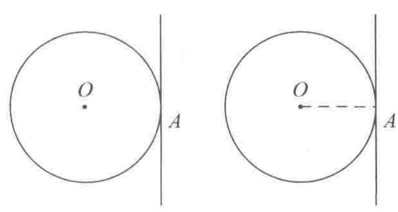



图　1.1.9

## 典型例题

一位同学拿了两块全等的等腰直角三角形的三角尺$\triangle ABC$、$\triangle MNK$做了一个探究活动：将$\triangle MNK$的直角顶点$M$放在$\triangle ABC$的斜边$AB$的中点处，将图1.1.10中的$\triangle MNK$绕顶点$M$逆时针旋转，得到图1.1.11，设$AC=BC=4$.

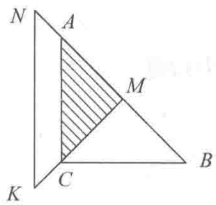



图 1.1.10

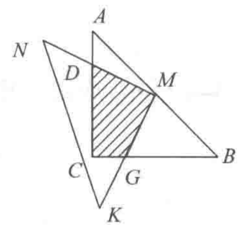



图 1.1.11

(1) 当$AD=1$时，求重叠部分$MDCG$的面积.

(2) $\triangle MNK$在绕定点旋转的过程中，保持$MN$与$AC$有交点$D$，$MK$与$BC$有交点$G$，四边形$MDCG$的面积是否会改变？请说明理由.

(3) $\triangle MNK$在绕定点旋转的过程中，保持$MN$与$AC$有交点$D$，$MK$与$BC$有交点$G$，$DG$两点间的距离最小值是多少？试求出此时重叠部分$MDCG$的周长.

### 思路点拨

(1) ① 先读题，再把已知条件(角度、长度)标记在图中.

② 想象图形旋转过程中的变化情况，并观察图1.1.11. $M$为斜边$AB$的中点，联想“三线合一”模型，并连接$MC$，如图1.1.12所示.

③ 观察图中的三角形，$\triangle ADM$与$\triangle CGM$，$\triangle DCM$与$\triangle GBM$，猜想：$\triangle ADM\cong\triangle CGM$，$\triangle DCM\cong\triangle GBM$. 通过寻找边角之间的关系证明结论.

④ 因此$S_{四边形MDCG}=S_{\triangle DCM}+S_{\triangle CGM}=S_{\triangle DCM}+S_{\triangle ADM}=S_{\triangle ACM}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

(2) 由(1)得旋转的过程中，四边形$MDCG$的面积是不会改变的，且等于$\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

(3) ① 如图1.1.13所示，求$DG$的最小值，要先用一个变量表示出$DG$的长度.

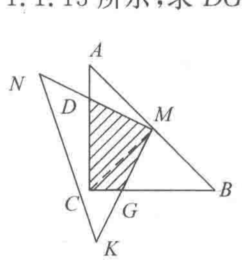



图 1.1.12

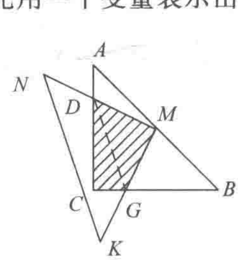



图 1.1.13

② 设 $CG=x$,则 $CD=BG=4-x$,在 Rt$\triangle DCG$ 中,$DG^2=CD^2+CG^2=(4-x)^2+x^2$.

③ 用配方法或者二次函数顶点式求出 $DG$ 的最小值,并求出四边形 $MDCG$ 的周长即可.

## 解题过程

**解**:(1) 连接 $MC$,如图 1.1.14 所示,则 $AM=CM$,$\angle AMC=\angle DMG=90°$,

$\therefore \angle AMD=\angle CMG$. $\because \angle A=\angle MCG=45°$,$\therefore \triangle ADM\cong\triangle CGM$(ASA).

$$\therefore S_{四边形MDCG}=S_{\triangle DCM}+S_{\triangle CGM}=S_{\triangle DCM}+S_{\triangle ADM}=S_{\triangle ACM}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 4\times 4=4.$$

(2) 四边形 $MDCG$ 的面积不会改变,理由如下.

**【方法一】**

同(1),略.

**【方法二】**

分别过点 $M$ 作 $ME\perp AC$ 于 $E$,$MF\perp BC$ 于 $F$,如图 1.1.15 所示.

由(1)可得 $ME=MF$,$\angle EMF=90°$,$\angle NMK=90°$,

$\therefore \angle DME+\angle EMG=\angle EMG+\angle GMF$,$\therefore \angle DME=\angle GMF$,

$\therefore \triangle DME\cong\triangle GMF$(ASA),$S_{\triangle DME}=S_{\triangle GMF}$,

$\therefore$ $S_{四边形MDCG}=S_{\triangle DME}+S_{四边形EMGC}=S_{\triangle GMF}+S_{四边形EMGC}=S_{四边形EMFC}=4$.

(3)**【方法一】**

连接 $DG$,如图 1.1.16 所示,由(2)得 $AD=CG$.

设 $CG=x$,则 $CD=4-x$.

$\therefore$ Rt$\triangle DCG$ 中,$DG^2=CD^2+CG^2=(4-x)^2+x^2=2(x-2)^2+8$,

$\therefore$ 当 $x=2$ 时,$DG^2$ 有最小值 8,此时 $DG$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$,且 $D$、$G$ 分别为 $AC$、$BC$ 的中点,重叠部分 $MDCG$ 的周长=正方形 $DMGC$ 的周长$=2\times 4=8$.

**【方法二】**

如图 1.1.16 所示,连接 $DG$,由(1)可得 $DM=GM$,

$\therefore$ 在 Rt$\triangle DMG$ 中,$DG^2=DM^2+GM^2=2DM^2$,

$\therefore$ 当 $MD\perp AC$ 时,根据垂线段最短得 $MD$ 长度最小为 $\frac{1}{2}AC$,即 $MD=2$,

$\therefore DG^2=2DM^2=8$,即 $DG=2\sqrt{2}$.

$\because \angle C=\angle DMG=\angle MDC=90°$,$MD=MG$,$\therefore$ 四边形 $MDCG$ 为正方形,

$\therefore$ 重叠部分 $MDCG$ 的周长$=4MD=8$.

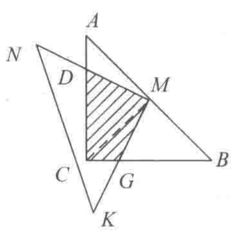


图　1.1.14

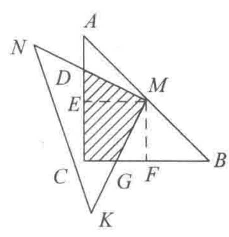


图　1.1.15

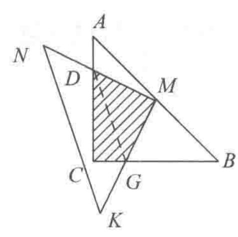


图　1.1.16

## 举一反三

1. (09 鸡西)已知 Rt$\triangle ABC$ 中，$AC=BC$，$\angle C=90°$，$D$ 为 $AB$ 边的中点，$\angle EDF=90°$，$\angle EDF$ 绕 $D$ 点旋转，它的两边分别交 $AC$、$CB$(或它们的延长线)于 $E$、$F$. 当$\angle EDF$ 绕 $D$ 点旋转到 $DE\perp AC$ 于 $E$ 时(见图 1.1.17)，易证 $S_{\triangle DEF}+S_{\triangle CEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$. 当$\angle EDF$ 绕 $D$ 点旋转到 $DE$ 和 $AC$ 不垂直时，在图 1.1.18 和图 1.1.19 这两种情况下，上述结论是否成立？若成立，请给予证明；若不成立，$S_{\triangle DEF}$、$S_{\triangle CEF}$、$S_{\triangle ABC}$ 又有怎样的数量关系？请写出你的猜想，并证明你的结论.

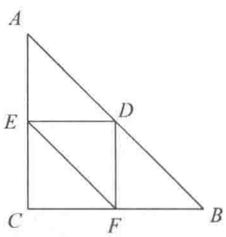


图 1.1.17

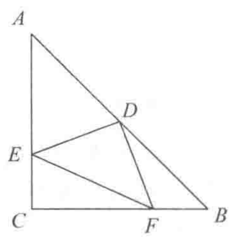


图 1.1.18

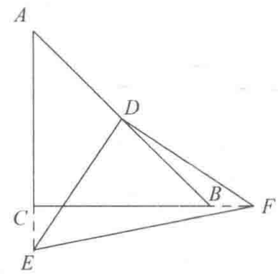


图 1.1.19

2. 如图 1.1.20 所示，$AB$ 是$\odot O$ 的直径，$AB=6\sqrt{2}$，$M$ 是弧 $AB$ 的中点，$OC\perp OD$，$\triangle COD$ 绕点 $O$ 旋转与$\triangle AMB$ 的两边分别交于 $E$、$F$(点 $E$、$F$ 与点 $A$、$B$、$M$ 均不重合)，与$\odot O$ 分别交于 $P$、$Q$ 两点.

(1) 求证：$OE=OF$.

(2) 连接 $PM$、$QM$，试探究：在$\triangle COD$ 绕点 $O$ 旋转的过程中，$\angle PMQ$ 是否为定值？若是，求出$\angle PMQ$ 的大小；若不是，请说明理由.

(3) 连接 $EF$，试探究：在$\triangle COD$ 绕点 $O$ 旋转的过程中，$\triangle EFM$ 的周长是否存在最小值？若存在，求出其最小值；若不存在，请说明理由.

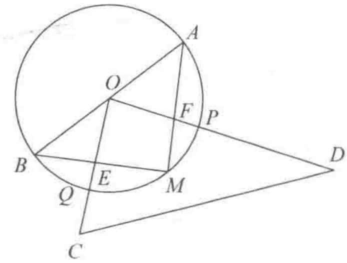


图 1.1.20

# 1.2　延　　长

## 方法说明

如图 1.2.1 所示，把一条线段往一个方向延长一定长度的辅助线添加方法叫作延长. 通过延长来构造我们需要的图形也是最常用的辅助线添加方法之一，其中最具代表性的有“截长补短”和“倍长中线”两类(这两个部分的内容请看后面章节的详述). 通常，延长之后还要用连接来组成一个完整的图形.


图　1.2.1

## 方法归纳

1. 如图 1.2.2 所示，通过延长构建邻补角.
2. 如图 1.2.3 所示，通过延长构建三角形.

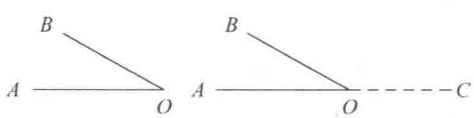



图　1.2.2

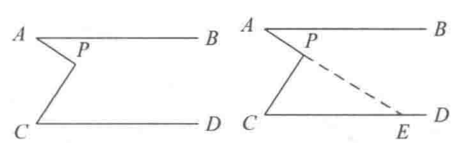



图　1.2.3

3. 如图 1.2.4 所示，通过延长构建三角形的外角.

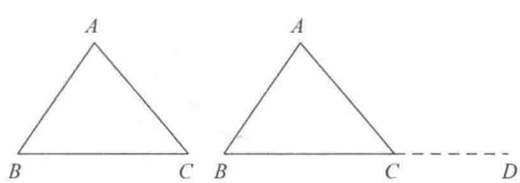



图　1.2.4

4. 如图 1.2.5 所示，梯形中延长两条腰来构建三角形.

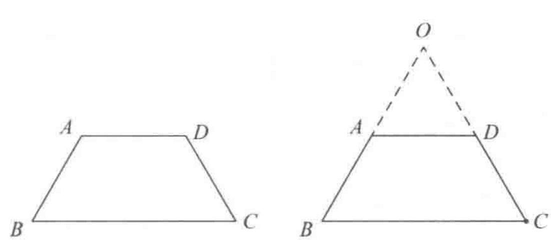



图　1.2.5

5. 如图 1.2.6 所示，通过延长半径得到直径并连接成圆周角.

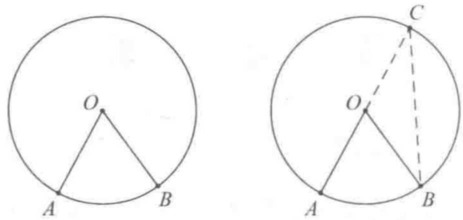



图 1.2.6

6. 如图 1.2.7 所示，对角互补（$\angle ABC+\angle ADC=180°$）的四边形，可以延长一边构建全等三角形，实现边和角的转化.

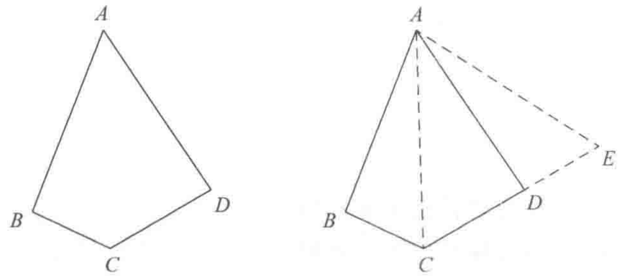



图 1.2.7

7. 如图 1.2.8 所示，图中若有连接两平行线之间的线段的中点时，可以在一条直线上任取一点，与中点连接并延长至与另一平行线相交构建全等三角形.

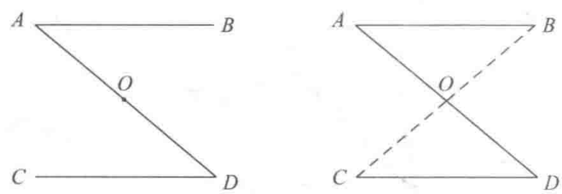



图 1.2.8

## 典型例题

如图 1.2.9 所示，在▱$ABCD$ 中，$AB=5$，$BC=10$，$F$ 为 $AD$ 的中点，$CE\perp AB$ 于 $E$，设$\angle ABC=\alpha$（$60°\leqslant\alpha<90°$）.

（1）当 $\alpha=60°$时，求 $CE$ 的长.

（2）当 $60°<\alpha<90°$时，

① 是否存在正整数 $k$，使得$\angle EFD=k\angle AEF$？若存在，求出 $k$ 的值；若不存在，请说明理由.

② 连接 $CF$，当 $CE^2-CF^2$ 取最大值时，求 $\tan\angle DCF$ 的值.

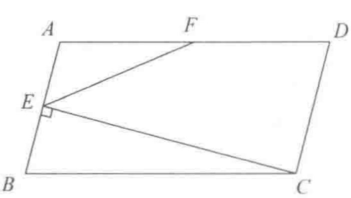



图 1.2.9

## 思路点拨

(1) ① 先读题,再把已知条件(角度、长度)标记在图中.

② 要求 $CE$ 的长,可以发现 $CE$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 中,根据三角函数"知二求三",就可以求出来.

③ 把已知条件 $\alpha=60°$,$BC=10$ 代入即可求出 $CE$ 的长.

(2) ① 观察问题"是否存在正整数 $k$,使得$\angle EFD=k\angle AEF$".

② 遇到这类问题,需要先进行猜测.首先,存在性问题通常都是存在的,其次,观察图形可以猜测 $k$ 的值.怎么猜测?一种方法是用量角器直接量;另一种方法是取特殊情况,当 $\alpha=90°$等特殊情况求出相应的角度值,再判定其中 $k$ 的值.因此,很容易就可以得到 $k=3$.

③ 那接下来应该怎么添加辅助线帮助解答问题呢?第一种方法,通过观察发现题目中一个重要的条件就是 $F$ 为 $AD$ 的中点,而且 $AB/\!/CD$,此时,只需延长线段 $EF$ 与线段 $CD$ 交于点 $G$,并连接 $CF$ 即可,如图 1.2.10 所示.然后证明$\angle EFD=\angle EFC+\angle CFD=3\angle AEF$.当然,如图 1.2.11 所示,先连接 $CF$ 并延长至与线段 $BA$ 的延长线交于一点 $G$ 也可以,方法类似.

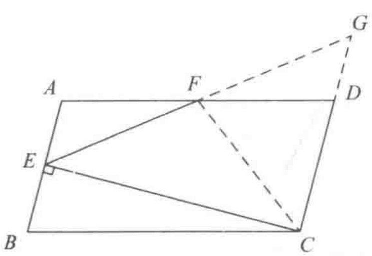


图　1.2.10

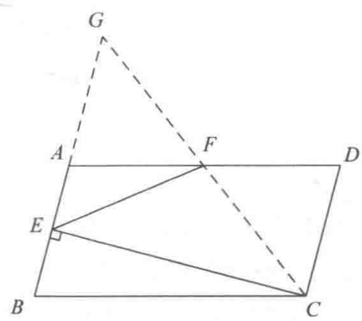


图　1.2.11

④ 第二小问的条件是"当 $CE^2-CF^2$ 取最大值时",看到"$CE^2-CF^2$"就可以联想到勾股定理,看到"最大值"就可以联想到二次函数.因此本题的突破口在于表示出 $CE^2-CF^2$ 的值.

⑤ 根据未知数设小不设大的原则,可以设 $BE=x$,并表示出其他所有变化的边,然后表示出 $CE^2-CF^2$ 即可.当求出 $BE$ 取具体某个值时,$CE^2-CF^2$ 取最大值,我们才可以继续进行最后的问题,求 $\tan\angle DCF$ 的值.

⑥ 由于$\angle DCF$ 不在一个直角三角形内,因此需要进行转化,观察发现$\angle DCF=\angle G$,在 $\mathrm{Rt}\triangle CEG$ 中求出 $\tan\angle G$ 的值,那么 $\tan\angle DCF$ 的值就出来了.

## 解题过程

**解**:(1) $\because \alpha=60°$,$BC=10$,$\therefore \sin\alpha=\dfrac{CE}{BC}$,即 $\sin60°=\dfrac{CE}{10}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,解得 $CE=5\sqrt{3}$.

(2)**【方法一】**

① 当 $60°<\alpha<90°$ 时，存在 $k=3$，使得 $\angle EFD=3\angle AEF$. 理由如下.

如图 1.2.12 所示，延长 $EF$ 交 $CD$ 的延长线于点 $G$，并连接 $CF$.

$\because F$ 为 $AD$ 的中点，$\therefore AF=FD$. $\because$ 在 $\square ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，$\therefore \angle G=\angle AEF$.

又 $\because \angle AFE=\angle DFG$，$\therefore \triangle AEF\cong\triangle DGF$(AAS)，$\therefore EF=GF$，$AE=GD$.

$\because CE\perp AB$，$AB/\!/CD$，$\therefore \angle DCE=\angle BEC=90°$，

$\therefore CF=EF=GF=\dfrac{1}{2}EG$，$\therefore \angle FCD=\angle G$，$\therefore \angle EFC=\angle FCD+\angle G=2\angle G$.

$\because AB=5$，$BC=10$，点 $F$ 是 $AD$ 的中点，

$\therefore CD=AB=5$，$DF=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{2}BC=5$，$\therefore DF=DC$，$\therefore \angle CFD=\angle FCD=\angle G$，

$\therefore \angle EFD=\angle EFC+\angle CFD=2\angle G+\angle G=3\angle G=3\angle AEF$，

$\therefore$ 存在正整数 $k=3$，使得 $\angle EFD=3\angle AEF$.

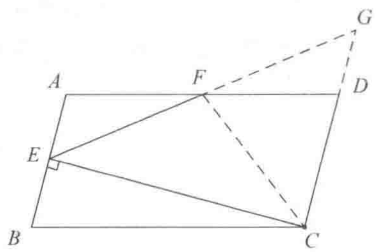



图 1.2.12

② 设 $BE=x$，$\because CD=AB=5$，$\therefore CG=CD+DG=CD+AE=5+5-x=10-x$.

在 Rt$\triangle BCE$ 中，$CE^2=BC^2-BE^2=100-x^2$.

在 Rt$\triangle CEG$ 中，$EG^2=CG^2+CE^2=(10-x)^2+100-x^2=200-20x$.

$\because$ 由①知 $CF=\dfrac{1}{2}EG$，$\therefore CF^2=\left(\dfrac{1}{2}EG\right)^2=\dfrac{1}{4}EG^2=\dfrac{1}{4}(200-20x)=50-5x$，

$\therefore CE^2-CF^2=100-x^2-50+5x=-x^2+5x+50=-\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+50+\dfrac{25}{4}$.

当 $x=\dfrac{5}{2}$，即点 $E$ 是 $AB$ 的中点时，$CE^2-CF^2$ 取最大值.

此时，$CG=10-x=10-\dfrac{5}{2}=\dfrac{15}{2}$，$CE=\sqrt{100-x^2}=\sqrt{100-\dfrac{25}{4}}=\dfrac{5\sqrt{15}}{2}$，

$$\therefore \tan\angle DCF=\tan\angle G=\frac{CE}{CG}=\frac{\frac{5\sqrt{15}}{2}}{\frac{15}{2}}=\frac{\sqrt{15}}{3}.$$

**【方法二】**

① 当 $60°<\alpha<90°$ 时，存在 $k=3$，使得 $\angle EFD=3\angle AEF$. 理由如下.

如图 1.2.13 所示，连接 $CF$ 并延长交 $BA$ 的延长线于点 $G$.

$\because F$ 为 $AD$ 的中点，$\therefore AF=FD$. $\because$ 在▱$ABCD$ 中，$AB /\!/ CD$，$\therefore \angle G=\angle DCF$.
又 $\because \angle AFG=\angle DFC$，$\therefore \triangle AFG \cong \triangle DFC$(AAS)，$\therefore CF=GF, AG=CD$.
$\because CE \perp AB$，$\therefore EF=GF$，$\therefore \angle AEF=\angle G$.
$\because AB=5, BC=10$，点 $F$ 是 $AD$ 的中点，
$\therefore AG=5, AF=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC=5$，$\therefore AG=AF$，$\therefore \angle AFG=\angle G$.
在 $\triangle EFG$ 中，$\angle EFC=\angle AEF+\angle G=2\angle AEF$.
又 $\because \angle CFD=\angle AFG$，$\therefore \angle CFD=\angle AEF$，
$\therefore \angle EFD=\angle EFC+\angle CFD=2\angle AEF+\angle AEF=3\angle AEF$，
$\therefore$ 存在正整数 $k=3$，使得 $\angle EFD=3\angle AEF$.

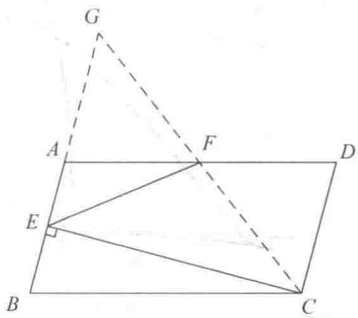



图 1.2.13

② 设 $BE=x$，$\because AG=CD=AB=5$，$\therefore EG=AE+AG=5-x+5=10-x$.
在 Rt$\triangle BCE$ 中，$CE^2=BC^2-BE^2=100-x^2$.
在 Rt$\triangle CEG$ 中，$CG^2=EG^2+CE^2=(10-x)^2+100-x^2=200-20x$.
$\because$ 由①知 $CF=GF$，$\therefore CF^2=\left(\frac{1}{2}CG\right)^2=\frac{1}{4}CG^2=\frac{1}{4}(200-20x)=50-5x$，
$\therefore CE^2-CF^2=100-x^2-50+5x=-x^2+5x+50=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+50+\frac{25}{4}$.
当 $x=\frac{5}{2}$，即点 $E$ 是 $AB$ 的中点时，$CE^2-CF^2$ 取最大值.
此时，$EG=10-x=10-\frac{5}{2}=\frac{15}{2}$，$CE=\sqrt{100-x^2}=\sqrt{100-\frac{25}{4}}=\frac{5\sqrt{15}}{2}$，

$$\therefore \tan\angle DCF=\tan\angle G=\frac{CE}{EG}=\frac{\frac{5\sqrt{15}}{2}}{\frac{15}{2}}=\frac{\sqrt{15}}{3}.$$

**【方法三】**

① 当 $60^\circ<\alpha<90^\circ$ 时，存在 $k=3$，使得 $\angle EFD=3\angle AEF$. 理由如下.
如图 1.2.14 所示，过点 $F$ 作 $FG /\!/ AB$ 分别交 $BC$、$EC$ 于 $G$、$H$，连接 $CF$.
$\because F$ 为 $AD$ 的中点，$\therefore G$、$H$ 分别为 $BC$、$EC$ 的中点，即 $EH=CH, BG=CG$.