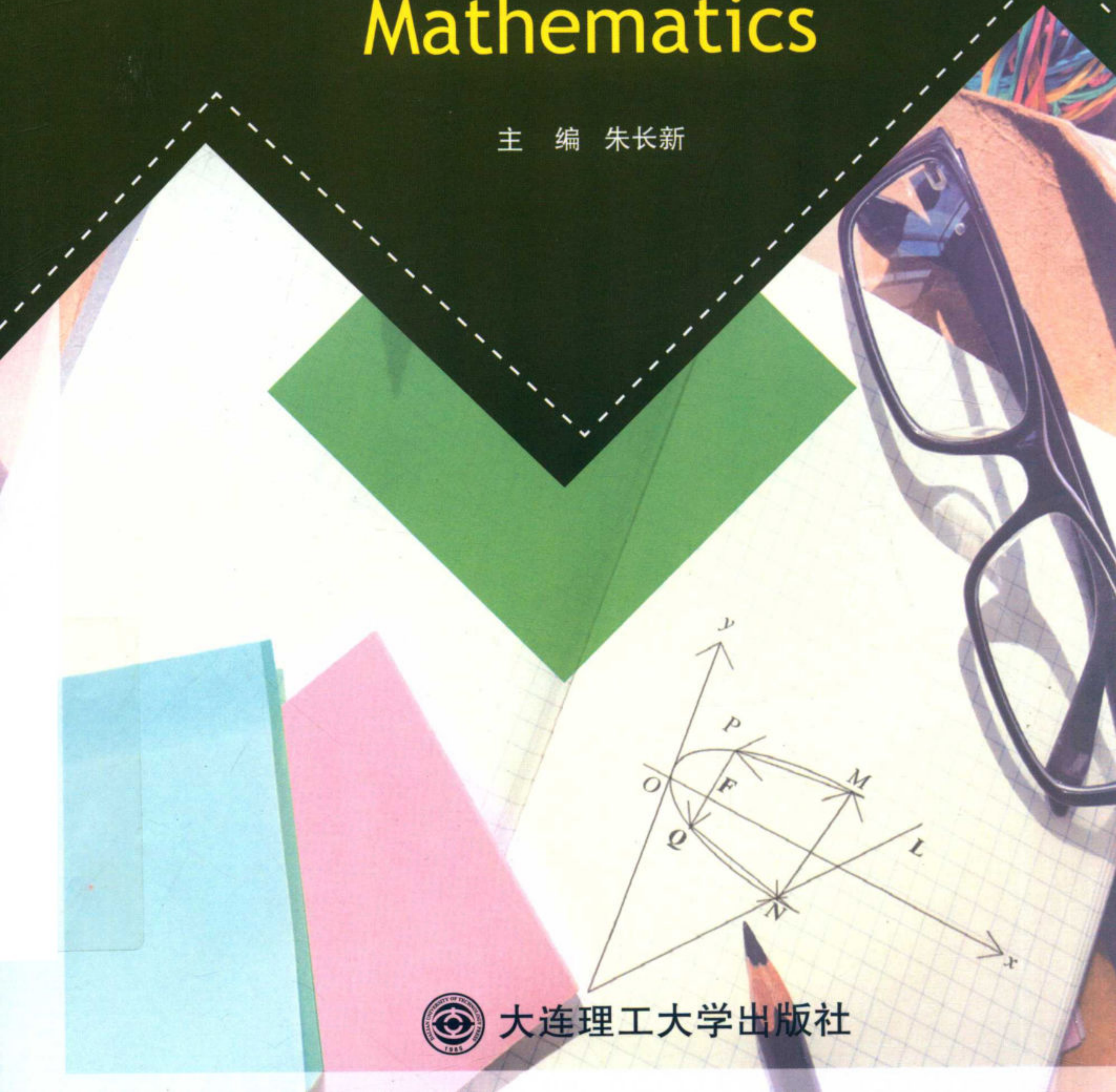
新世纪普通高等教育
基础类课程规划教材

高等数学（上）

Advanced Mathematics

主　编　朱长新



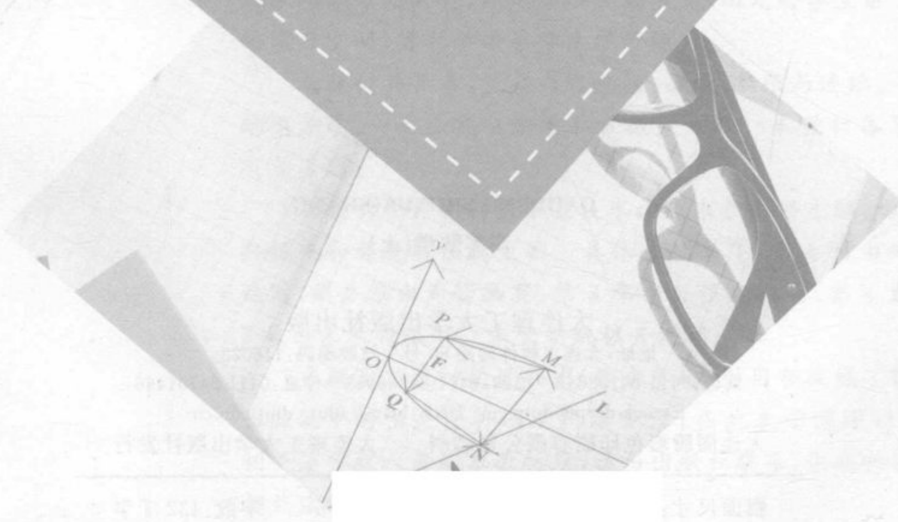
大连理工大学出版社

新世纪普通高等教育
基础类课程规划教材

高等数学（上）

Advanced Mathematics

主　编　朱长新
副主编　周　蕾　孙银光　邢晓航



大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上 / 朱长新主编. -- 大连 : 大连理工大学出版社, 2019.8(2019.9 重印)
新世纪普通高等教育基础类课程规划教材
ISBN 978-7-5685-2155-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①朱… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 155567 号

GAODENG SHUXUE(SHANG)
高等数学(上)

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023
发行:0411-84708842　邮购:0411-84708943　传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://dutp.dlut.edu.cn
大连图腾彩色印刷有限公司印刷　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm　印张:18.75　字数:432 千字
2019 年 8 月第 1 版　2019 年 9 月第 2 次印刷

责任编辑:王晓历　责任校对:李明轩
封面设计:对岸书影

ISBN 978-7-5685-2155-0　定　价:55.00 元

前言

《高等数学》(上)是新世纪应用型高等教育教材编审委员会组编的基础类课程规划教材之一。

本教材注重培养学生的实践能力,基础理论以“实用为主、够用为度”,基础知识广,基本应用技能贯穿始终。文字叙述准确,简明扼要,通俗易通。“以例释理”,理论联系实际。每部分知识既是教材的有效组成部分,又相对独立完整,具有一定的可剪裁性和拼接性,可根据不同的培养目标将内容裁剪、拼接,使前、后课程互相衔接,浑然一体。内容覆盖面广,满足了专业大类对理论、技能及其基本素质的要求,同时可满足深入学习的需要,不是学多少编多少,而是给学生留了一定的学习空间,有利于培养学生学习能力。

本教材共5章,主要内容包括:函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学和常微分方程。本教材各章末均有复习题。

本教材由广州科技职业技术学院朱长新任主编,由周蕾、孙银光和邢晓航任副主编。具体分工如下:第1章由邢晓航编写,第2章由周蕾编写,第3章由孙银光编写,第4章和第5章由朱长新编写。朱长新统稿并定稿。

在编写本教材的过程中,编者参考、引用和改编了国内外出版物中的相关资料以及网络资源,在此表示深深的谢意!相关著作权人看到本教材后,请与出版社联系,出版社将按照相关法律的规定支付稿酬。

限于水平,书中仍有疏漏和不妥之处,敬请专家和读者批评指正,以使教材日臻完善。

编 者

2019年8月

所有意见和建议请发往:dutpbk@163.com
欢迎访问教材服务网站:http://www.dutpbook.com
联系电话:0411-84708445　84708462

新世纪

目录

第1章

函数

函数是微积分的研究对象,透彻理解函数概念是学习高等数学的必要条件.为此,本章梳理并深化中学所学过的函数知识,并在此基础上界定初等函数,为学习高等数学奠定基础.

1.1 预备知识

1.1.1 常量与变量

当我们从量化角度考察自然现象、社会现象,从事科技研发、工程建设时,会接触到许许多多的量,不难发现这些量不外乎是两大类:一类是在过程中保持数值不变的量,我们称它为常量;另一类是在过程中数值不断改变的量,我们称它为变量.

例如,在考察企业经营活动时,我们常常会对产品做成本分析,一部分成本由厂房、机器、设备等构成,在一个相对时期内,这部分成本是不随产量变化而变化的,是一个常量,我们称它为固定成本;另一部分成本是由原材料消耗、能源消耗、职工工资等构成的,这部分成本随着产品数量的变化而变化,是一个变量,我们称它为可变成本.

又如,宇宙飞船在升空的过程中,随着飞船与地球之间的距离增大,宇航员受地球的引力越来越小,直至失重.在这个过程中地球对宇航员的引力是一个变量,而宇航员的质量却未发生变化,是一个常量.

1.1.2 实数集区间与邻域

微积分中所涉及的变量是在实数范围内取值的,为了刻画变量的变化范围,我们需对区间作确定的界定.为了既可以从宏观上又可以从微观上对变量的变化性态进行分析,还需要引进一种特殊的区间——邻域.

1.实数集

随着社会的发展,人类逐步加深了对数的认识.正整数首先被人类所认识,全体正整数构成的数集为

$$\mathbf{N}^{+}=\{1,2,3,\cdots\}.$$

由于在正整数集上减法运算受到限制，如

$$3-5\notin \mathbf{N}^{+},$$

为此又将数的范围扩大到整数，全体整数构成整数集，记为

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}.$$

为了使除法运算畅通无阻，数的范围再次扩大到有理数，全体有理数构成有理数集，记为

$$\mathbf{Q}=\left\{x \mid x=\frac{p}{q};p,q\in \mathbf{Z},q\neq 0\right\}.$$

即一个数是有理数，当且仅当它可以写成分数.

如果用十进制小数来表示有理数，则有理数被写成有穷的，或无限循环的小数.如

$$\frac{1}{2}=0.5,-\frac{1}{4}=-0.25,\frac{4}{3}=1.\dot{3},\frac{5}{7}=0.\dot{7}\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5};$$

反之，有穷小数或无限循环小数都可以化成分数.

具有原点、正方向和长度单位的直线称为数轴.任何一个有理数都恰有数轴上的一个点与之对应，这种与有理数对应的点称为有理点.有理点在数轴上稠密，即在任意两个有理点之间，仍有有理点.这是因为对于任何两个不相等的有理数 a 和 b，均有有理数$\frac{a+b}{2}$介于其间.虽然有理数在数轴上处处稠密，但有理点却未充满整个数轴.如圆周率 π，边长为 1 的正方形的对角线长度$\sqrt{2}$，当它们被表示成十进制小数时，都不是有穷或无限循环的.经计算 $\pi=3.1415926\cdots$，$\sqrt{2}=1.4142135\cdots$.这种无限不循环小数称为无理数.无理数在数轴上的对应点叫作无理点.

有理数与无理数统称为实数.实数集记为 **R**.本书如无特殊声明，总是在 **R** 上讨论问题.任意两个不等实数间均存在着实数，而且任意两个实数间不会有实数以外的数，即实数不仅是稠密的，而且是连续的.实数与数轴上的点形成了一一对应关系，这样实数全体就不存在“缝隙”了，实数集不仅对加、减、乘、除运算封闭，对开方运算封闭，而且以后会看到实数对极限运算也封闭.实数的这种性质称为“完备性”.

实数系统可表示为

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{正分数}\end{cases}\\\text{零}\\\text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\quad(\text{无限不循环小数})\end{cases}$$

2.实数的绝对值

实数 x 的绝对值记作$|x|$，它具有非负性，即

$$|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0,\\-x, x<0.\end{cases}$$

例如，$|0.618|=0.618$，$|-\pi|=\pi$，$|0|=0$. $|x|$的几何意义为数轴上点 x 到原点的距离.

实数的绝对值有如下性质：

(1)对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，有$|x|\geqslant 0$.当且仅当 $x=0$ 时，才有$|x|=0$；

(2)对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，有$|-x|=|x|$；

(3)对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，有$|x|=\sqrt{x^2}$；

(4)对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，有$-|x|\leqslant x\leqslant|x|$；

(5)设 $a>0$，则$|x|<a$ 的充分必要条件是$-a<x<a$；

(6)设 $a\geqslant 0$，则$|x|\leqslant a$ 的充分必要条件是$-a\leqslant x\leqslant a$；

(7)设 $a\geqslant 0$，则$|x|>a$ 的充分必要条件是$x<-a$ 或者 $x>a$；

(8)设 $a\geqslant 0$，则$|x|\geqslant a$ 的充分必要条件是$x\leqslant -a$ 或者 $x\geqslant a$.

它们的几何解释是很直观的.例如性质(5)，在数轴上，$|x|<a$ 表示所有与原点距离小于a 的点x 构成的点集；$-a<x<a$ 表示所有位于点$-a$ 与点a 之间的点 x 构成的点集.它们表示同一个点集.仿此，可解释性质(6)～(8).

由性质(5)可导出不等式

$$|x-A|<a \text{ 与 } A-a<x<A+a$$

是等价的，其中 A 为实数，a 为正实数.

关于实数四则运算的绝对值，有以下结论：

对任意的 x、$y\in\mathbf{R}$，恒有

(1)$|x+y|\leqslant|x|+|y|$(三角不等式)；

(2)$|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|$；

(3)$|xy|=|x||y|$；

(4)$\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$，$(y\neq 0)$.

3.区间与邻域

区间是一个特殊的点集.例如，数集$\{x|2<x<3\}$是由所有满足不等式 $2<x<3$ 的那些实数构成的集合，这些实数在数轴上的对应点就形成了开区间(2,3).

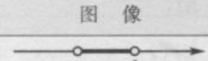
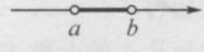
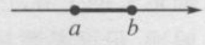
一般地，若 a、$b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，我们称数集

$$\{x \mid a<x<b\}$$

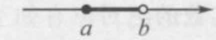
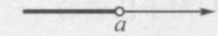
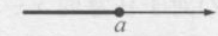
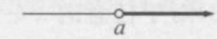
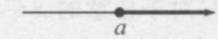
为以 a 为**左端点**，b 为**右端点**的**开区间**，记作(a,b).

仿此，我们可以界定闭区间、半开区间及无限区间.在此不一一赘述，见表 1.1.

表 1.1

定 义	名 称	符 号	图 像
$\{x\|a<x<b\}$	开区间	(a,b)	
$\{x\|a\leqslant x\leqslant b\}$	闭区间	$[a,b]$	
$\{x\|a<x\leqslant b\}$	半开区间	$(a,b]$	

（续表）

定 义	名 称	符 号	图 像
$\{x\mid a\leqslant x<b\}$	半开区间	$[a,b)$	
$\{x\mid x<a\}$	无限区间	$(-\infty,a)$	
$\{x\mid x\leqslant a\}$	无限区间	$(-\infty,a]$	
$\{x\mid a<x\}$	无限区间	$(a,+\infty)$	
$\{x\mid a\leqslant x\}$	无限区间	$[a,+\infty)$	
$\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$	无限区间	$(-\infty,+\infty)$	

邻域是一种特殊的区间.

设 x_0 为一常数，$\delta>0$，称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为 x_0 的 δ 邻域，简称 x_0 的邻域.如图 1.1 所示，它是一个开区间，中心为 x_0，半径为 δ，长度为 2δ.由开区间的定义式知，进入 x_0 的邻域的变量 x 会满足不等式

$$x_0-\delta<x<x_0+\delta,$$

从而 $-\delta<x-x_0<\delta$，即 $|x-x_0|<\delta$，故

$$(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}.$$

在 x_0 的邻域内把 x_0 挖掉，就是 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，称它为 x_0 的去心邻域.如图 1.2 所示，不难得出

$$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

为了方便，约定 x_0 的邻域记作 $U(x_0;\delta)$；x_0 的去心邻域记作 $U^0(x_0;\delta)$.

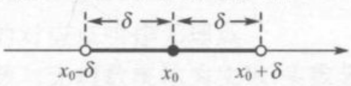


图 1.1

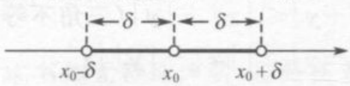


图 1.2

有时还会用到单侧邻域.

点 x_0 的左邻域 $U_-(x_0;\delta)=(x_0-\delta,x_0)$；

点 x_0 的右邻域 $U_+(x_0;\delta)=(x_0,x_0+\delta)$.

设 S 是 $\mathbf{R}$ 的一个子集.若存在实数 M，使得一切 $x\in S$，都有 $x\leqslant M$，则称 S 为**有上界的数集**，称 M 为 S 的一个**上界**；若存在实数 L，使一切 $x\in S$，都有 $x\geqslant L$，则称 S 为**有下界的数集**，称 L 为 S 的一个**下界**.若数集 S 既有上界又有下界，则称 S 为**有界集**，否则称 S 为**无界集**.

例如，$\mathbf{N}^+$ 为有下界的数集，任意一个不超过 1 的实数都是 $\mathbf{N}^+$ 的一个下界，比如说，1、0、$-\dfrac{\pi}{4}$、-1 等均为 $\mathbf{N}^+$ 的下界.它有无数个下界，1 是它的最大下界.但 $\mathbf{N}^+$ 无上界，因而它是无界集.

又如，$I=(-\infty,-5)\cup(0,5)$ 为有上界的数集，5、$5\sqrt{2}$、9 等任何一个大于或等于 5 的实数都是 I 的上界.它有无数个上界，5 是它的最小上界，但 I 无下界.

一般地，设 β 是数集 S 的一个上界，且对任意小的正数 δ，若 $\beta-\delta$ 不再是 S 的上界，则 β 为 S 的最小上界，又称 β 为 S 的**上确界**，记作

$$\beta = \sup S.$$

设 α 为数集 S 的一个下界，且对任意小的正数 δ，若 $\alpha+\delta$ 不再是 S 的下界，则 α 为 S 的最大下界，又称 α 为 S 的**下确界**，记作

$$\alpha = \inf S.$$

有了确界的概念，就可以将实数的完备性叙述成下面的定理.

确界原理　非空有上界的数集一定有上确界；非空有下界的数集一定有下确界.

确界原理是微积分的一个重要理论基石，结合实例，读者是能够理解的.

习题 1.1

❶ 用区间表示下列不等式：

(1)$x \leqslant 0$；　　(2)$-1 \leqslant x < 2$；

(3)$|x| > 3$；　　(4)$x < -3$ 或者 $2 \leqslant x < 5$.

❷ 分别用三种形式表述下列各邻域：

(1)3 的以 2 为半径的邻域；

(2)2 的 $h(h>0)$ 去心邻域；

(3)π 的以 δ 为半径的左邻域；

(4)$\sqrt{2}$ 的以 δ 为半径的右邻域.

❸ 讨论集合 $S_1 = \mathbf{Q} \cap (a,b)$，$S_2 = (-2,-1) \cup \mathbf{R}^+$，$S_3 = (-\infty,-3) \cup \{0\}$ 的有界性，若有界，请指出相应确界.

1.2　函数的概念及其表示方法

人类对函数的认识并非一步到位，我们借助前人的成果，由变量间的对应规则切入，逐步认清函数这个概念.

1.2.1　对应规则

例 1.1　某种商品在某一时期内供应量 S 与价格 P 的统计数据，见表 1.2.

表 1.2

价格 P	2	3	4	5	6	8	13	16
供应量 S	15	20	25	30	35	45	80	110

此表给出了一个对应规则，它为价格集

$$A = \{2,3,4,5,6,8,13,16\}$$

中的每个元素找到了一个对应的供应量值，若令这个表所给出的对应规则为 f，便有

$$f(2)=15, f(3)=20, f(4)=25, f(5)=30, f(6)=35,$$

$$f(8)=45, f(13)=80, f(16)=110.$$

也就是说,在对应规则 f 的作用下,15 和 2 对应,20 和 3 对应,……,110 和 16 对应.

例 1.2 “$x \to y=x^2-2x+3$”给出一个对应规则,在这个对应规则下,任意一个实数 x,与 x 对应的值为“x 的二次方减去 x 的二倍加上 3”.若以 g 表示这个对应规则,便有 $g(0)=0^2-2\times 0+3=3, g(1)=1^2-2\times 1+3=2, g(2)=2^2-2\times 2+3=3,\cdots, g(x)=x^2-2x+3$.

例 1.3 设对应规则 h 为:“让一个实数和它的平方根对应”,则有 $h(4)=\pm 2$, $h(5)=\pm\sqrt{5}, h(0)=0,\cdots$,任给 $x\geqslant 0$,总有 $h(x)=\pm\sqrt{x}$.但 $x<0$ 时,$h(x)$无意义.

由上述诸例可以发现,对应规则是有一定作用范围的,离开了这个作用范围,对应规则便不起作用,也就不复存在了.我们把一个对应规则的作用范围称为该对应规则的存在域.例 1.1 中 f 的存在域为价格集 A;例 1.2 中 g 的存在域为全体实数的集合 $\mathbf{R}$;例 1.3 中 h 的存在域为非负实数集 $\mathbf{R}^+\cup\{0\}$.我们把存在域中的元素叫自变量,在对应规则作用下自变量的对应值叫因变量.

根据自变量与因变量的取值情况,对应规则可分为“1 对 1”“多对 1”“1 对多”.例 1.1 中f 是“1 对 1”;例 1.2 中 g 是“多对 1”,如 $g(0)=3$、$g(2)=3$,即自变量的两个不同取值 0、2 均与因变量的取值 3 对应;例 1.3 中 h 是“1 对多”的,如 $h(4)=\pm 2$,即因变量的取值$+2$、-2 都与自变量的同一取值 4 相对应.“1 对 1”“多对 1”的情形下,对应规则为每个自变量找到了唯一确定的对应值.但在“1 对多”的情形下,对应规则不能保证为每个自变量找到的对应值是唯一确定的.

1.2.2 函数的概念

定义 1.1 设 X 为非空实数集,$\mathbf{R}$ 为全体实数的集合,f 是从 X 到 $\mathbf{R}$ 的一个对应规则,如果任取一个 $x\in X$,通过对应规则 f 的作用,总能找到一个唯一确定的实数 y 与 x 对应,则称 f 是定义在 X 上的一个函数,记作

$$y=f(x) \qquad x\in X.$$

称 x 为**自变量**,y 为 x 的**函数值(也叫因变量)**,称 X 为 f 的定义域.

当 x 取遍 X 中的一切值时,与它对应的 y 组成的集合称为函数的**值域**,记作 R_f.

由定义可以看出:

(1)函数不是一个数,也不是一个数集,而是满足一定条件的对应规则,它反映了两个变量间的一个确定的对应关系.

(2)这个对应规则必须为定义域中的每个数找到一个唯一确定的函数值,找不到不行,找到的函数值不唯一也不行,这便决定了作为函数的对应规则 f 是从定义域 X 到值域 R_f 的“1 对 1”或“多对 1”的对应,而非“1 对多”.

(3)定义域和对应规则是决定函数的两个要素,当定义域 X 规定后,f 为 X 中每个实数 x 找到的函数值也就确定了,从而值域随之而定.

既然定义域是函数的要素之一，那么给定一个函数时就意味着其定义域同时给出.如果讨论的函数来自某个实际问题，则定义域必须由实际背景而定，这时定义域应是存在域的一个子集；若不考虑实际背景，那么这个函数的定义域指的就是它的存在域，我们约定未注明定义域的函数，其定义域就是存在域.这样一来，凡用解析式表示对应规则而未注明定义域的函数，其定义域就是使解析式在数轴上有意义的那些自变量的取值集合.为此要求：

(1)分母不为0；

(2)偶次根式的被开方数非负；

(3)对数的真数大于0；

(4)正切符号下的式子不等于 $k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$；余切符号下的式子不等于 $k\pi,k\in\mathbf{Z}$；

(5)反正弦、反余弦符号下的式子的绝对值不大于1.

存在域为空集的解析式 $y=f(x)$，不是函数.如 $y=\arcsin x+\sqrt{x-2}$，形式上像一个函数，但任何一个实数都不可能通过它找到对应值，因此，它不是函数.

例1.4 圆面积 S 与它的半径 r 间的函数关系

$$S=\pi r^2$$

就解析式而言自变量的存在域为 $(-\infty,+\infty)$，但就实际背景而言应有 $r>0$，故该函数的定义域为 $(0,+\infty)$.

例1.5 求函数

$$f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$$

的定义域.

解 要使该函数式有数学意义，必须使

$$x^2-5x+6\geqslant 0$$

解此不等式，得到 $x\leqslant 2$，或 $x\geqslant 3$.所以

$$X=(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$$

为该函数的定义域.

例1.6 试确定

$$f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$$

的定义域.

解 由 $f(x)$ 的结构可知，当

$$\begin{cases}3+2x-x^2\geqslant 0\\ x-2>0\end{cases}$$

时，$f(x)$ 有意义.由此可得 $\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 3\\ x>2\end{cases}$， 即 $2<x\leqslant 3$.

所以该函数的定义域为 $X=(2,3]$.

如果两个函数的定义域和对应规则均相同时，则认为这两个函数是同一函数，否则是

不同函数.

例 1.7 $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$ 与 $g(x)=1$ 是同一函数吗?

解 它们有相同的定义域$(-\infty,+\infty)$.又任取 $x\in(-\infty,+\infty)$,总有 $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1$,也有 $g(x)=1$,即它们有相同的对应规则,故 $f(x)$与 $g(x)$为同一函数.

例 1.8 $f(x)=2\lg x$ 与 $g(x)=\lg x^2$ 为同一函数吗?

解 虽然 $x>0$ 时,$2\lg x=\lg x^2$,但前者的定义域为 $\mathbf{R}^+$(正实数集),后者的定义域为 $\mathbf{R}\setminus\{0\}$(0 以外的实数).因而 $f(x)$与 $g(x)$不是同一函数.

1.2.3 函数的几种典型表示方法

由于表述对应规则的方法多样而灵活,随之产生了各式各样表达函数的方法.在中学阶段我们曾对列表法、图像法、解析法做过一些了解.这里将解析法细分,给出三种典型且常用的表示方法.

1.以一个或几个解析式构建对应规则

本节例 1.2、例 1.4、例 1.5、例 1.6、例 1.7、例 1.8 中所给出的函数均为一个解析式建立的对应规则,这在中学常用,内涵明确,无须赘述.下面再介绍由几个解析式并列构建对应规则的函数——分段定义的函数.

例 1.9 按照地球中纬度地区平均大气状态,国际上规定了标准大气压,根据这个规定,温度 T 与高度 h(千米)的变化规律为

$$T=T(h)=\begin{cases}15-6.5h & h<11,\\ -56.5 & 11\leqslant h\leqslant 80.\end{cases}$$

其中温度单位为摄氏度.

这便是分段定义的函数,其图像如图 1.3 所示.通过这样两个解析式并列表达的对应规则能为 80 千米以下的任意一个高度找到一个唯一确定的温度值.如

$T(0.2)=13.7$,即高度 0.2 千米处的温度为 13.7 ℃.

$T(2)=2$,即高度 2 千米处的温度为 2 ℃.

……

$T(11)=-56.5$,即高度 11 千米处的温度为-56.5 ℃.

$T(20)=-56.5$,即高度 20 千米处的温度为-56.5 ℃.

它表明随着高度的增加气温逐渐下降,但高度超过 11 千米而在 80 千米以下时,气温保持在-56.5 ℃.

例 1.10 函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant 0,\\ 1+x & x>0.\end{cases}$$

定义域 $X=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$,图像如图 1.4 所示.

例 1.11 函数

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x<0,\\ 0 & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

也是一个分段定义的函数，通常称它为符号函数，其记号为 $\operatorname{sgn}x$.图像如图 1.5 所示.

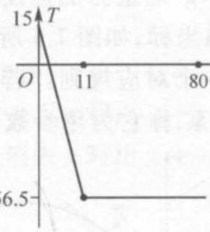


图 1.3

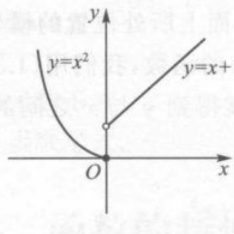


图 1.4

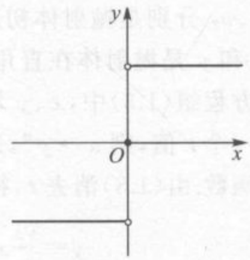


图 1.5

关于分段定义函数做两点提醒.

提醒之一，求分段定义函数的函数值时，应先确定自变量取值所在的范围，再代入相应的解析式进行计算.如例 1.10 中求 $f(-2)$ 时，因 $-2\leqslant 0$，故应将 -2 代入 x^2，于是 $f(-2)=(-2)^2=4$；求 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时，因 $\frac{\sqrt{2}}{2}>0$，故应将其代入 $1+x$，于是 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+1$.

提醒之二，分段定义函数是由几个解析式联合给出的一个对应规则，不能认为是几个对应规则定义的一个函数，如例 1.10 的对应规则是："任取一个实数，若它小于或等于 0，它就和自身的平方对应；若它大于 0，它就和自身加 1 对应".分段定义函数的定义域就是各解析式作用范围之和.

由一个或几个一元解析式定义的函数统称为显函数.

2.由一个二元方程构建的对应规则

例 1.12　由方程

$$xy+y-1=0 \tag{1.1}$$

构建一个对应规则："若 $x_0y_0+y_0-1=0$，则让 x_0 与 y_0 对应"，便得到一个定义在 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ 上的一个函数 $y=y(x)$，这里等号前的 y 是因变量，等号后的 y 是前述那个对应规则的记号.若从方程中把 y 解出，则有

$$y=\frac{1}{1+x},$$

这是显函数的形式.相对于显函数，称方程(1.1)给出的对应规则为隐函数.

一般地，一个满足了一定条件的二元方程

$$F(x,y)=0 \tag{1.2}$$

在确定 x、y 的取值范围后，可确定一个隐函数

$$y=y(x),$$

它的对应规则是："若 (x,y) 满足方程(1.2)，则 $x\to y$".

若一个二元方程满足了"一定条件"，但又不能像例 1.12 那样解出 y，我们仍然能认定是一个由对应规则所定义的函数.

3.在两个变量间引入参数构建对应规则

例 1.13　在研究抛射体的运动时，若对空气阻力忽略不计，其运动轨迹可表示为

$$\begin{cases} x=v_1 t, \\ y=v_2 t-\dfrac{1}{2}gt^2. \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 v_1、v_2 分别是抛射体初速度 v_0 沿水平、铅直方向的分量，g 是重力加速度，t 为飞行时间，x 和 y 是抛射体在直角坐标面上所处位置的横坐标与纵坐标，如图 1.6 所示.

在方程组(1.3)中，x、y 均为 t 的函数，我们用(1.3)建立一个对应规则："若 x 与 y 对应于同一个 t 值，则 $x\to y$"，这样就得到 y 与 x 之间的函数关系.称它为用参数方程(1.3)表示的函数.由(1.3)消去 t，得

$$y=\frac{v_2}{v_1}x-\frac{g}{2v_1^2}x^2.$$

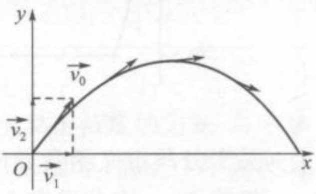


图 1.6

一般地，若参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t). \end{cases} \quad (t\in T) \tag{1.4}$$

确定了 y 与 x 间的函数关系，则称此函数为参数方程(1.4)所确定的函数.

思考题1.2

1.对应规则的存在域与函数的定义域有什么关系？

2.为什么说对应规则和定义域是函数的两大要素？

3.$f(x)$与 $f(t)$是同一个函数吗？$f(x+1)$与 $f(x)$呢？

习题 1.2

❶ 求下列函数的定义域：

(1)$y=\dfrac{1}{\ln|x-1|}+\sqrt{x-1}$；　(2)$y=\sqrt{2x-1}+\ln(2x-1)$；

(3)$y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$；　(4)$y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|<1, \\ x^2-1, & 1<|x|\leqslant 2.\end{cases}$

❷ 下列各对函数是否相同？为什么？

(1)$y=\ln x^3$ 与 $y=3\ln x$；

(2)$y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$；

(3)$y=x+1$ 与 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$；

(4)$y=1$ 与 $y=\sec^2 x-\tan^2 x$.

❸ 设 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$，求下列函数值：

$$f(1),f(-1),f(\frac{1}{a})(a\neq0),f(x_0),f(x_0+h).$$

❹ 设 $y=y(x)$是由方程 $e^{xy}+x=y-1$ 所确定的隐函数，求 $y(0)$的值.

❺ 设 $y=y(x)$是由参数方程

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t.\end{cases}\quad(0\leqslant t\leqslant\pi)$$

所确定的函数.

(1)试消去 t 写出 $y=y(x)$的隐函数形式；

(2)试消去 t 写出 $y=y(x)$的显函数形式.

1.3 函数的特性

在中学我们学习了函数的三种特性：奇偶性、周期性、单调性.为了今后学习的需要，本节学习函数的有界性，同时一并理顺前三种特性.

1.3.1 有界性

设 X 为函数 $f(x)$的定义域，对于区间 $I\subset X$，若存在一个实数 a，使任意$x\in I$，总有 $f(x)\geqslant a$，则称 $f(x)$在 I 上有下界，称 a 为 $f(x)$的一个下界；若存在一个实数 b，使任意 $x\in I$，总有 $f(x)\leqslant b$，则称 $f(x)$在 I 上有上界，称 b 为 $f(x)$的一个上界；若存在着两个不等的实数 a、b，使任意 $x\in I$ 总有 $a\leqslant f(x)\leqslant b$，则称 $f(x)$在 I 上有界，“$f(x)$在 I 上有界”即 $f(x)$在 I 上既有上界又有下界.如果我们取 $M=\max\{|a|,|b|\}$，当 $a\leqslant f(x)\leqslant b$ 时，必有$|f(x)|\leqslant M$.

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$，$x\in X$，区间 $I\subset X$，若存在一个正数 M，使任意$x\in I$，总有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$在 I 上有界；如果不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$在 I 上无界.

函数的有界性是相对于区间而言的，例如，$f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界，因为$|\sin x|\leqslant1$.又如 $x\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$时，$|\tan x|<\sqrt{3}$，则说 $f(x)=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$上有界；但对于任何正数 M，都无法保证 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$时，$|\tan x|\leqslant M$，因而 $f(x)=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上无界.

从函数图像上看，当 $x\in I$ 时，$-M\leqslant f(x)\leqslant M$，意味着 x 在 I 上变化时，曲线 $y=f(x)$必位于两条平行线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间(图 1.7).

简单地说，集合$\{y\mid y=f(x),x\in I\}$是有界集，就称 $f(x)$在 I 上有界；若函数 $y=f(x)$的值域是有界集，就称 $f(x)$是有界函数.