离散数学教程

（第2版）

王元元　宋丽华　王兆丽　韩敬利 编著

高等教育出版社

离散数学教程

（第2版）

◆ 本书是国家精品课程主讲教材，也是《高等学校计算机科学与技术专业核心课程教学实施方案》规划教材，打破了传统离散数学教材几大模块分割的编写方式，突出知识的内在联系，强调理论的循序渐进、相互依存，从而更具有可读性和系统性。

◆ 本书覆盖了集合论、数理逻辑、组合论、数论、图论、抽象代数、可计算性等基础理论部分，还包含了这些理论在粗糙集、模糊集、自动推理、智能搜索、加密技术等领域的应用，并涉及公理化集合论、数理逻辑形式系统、形式语言与自动机等相关理论。

◆ 本书以离散结构为建模对象，紧密联系计算机科学技术，特别强调应用能力、证明技术、计算思维的培养。此外，本书内容宽泛，深度适当，每章后还安排了与本章内容有关的阅读材料，便于学生及时复习并巩固所学知识。

数字课程网站
网址：http://abook.hep.com.cn/1877013
http://abook.hep.edu.cn/1877013
数字课程账号 使用说明详见书内数字课程说明页

ISBN 978-7-04-051298-4
9 787040 512984 >
定 价：46.00元

离散数学教程

（第2版）

王元元　宋丽华　王兆丽　韩敬利　编著

高等教育出版社·北京

内容提要

本书针对综合性大学和工程类院校计算机类专业本科生进行选材与编撰，内容覆盖 ACM 计算机科学课程体系规范 2013（Computer Science Curricula 2013）中离散结构知识领域下除离散概率之外的全部知识点。

从离散结构形式化表示理论到各类离散结构及其数学模型的介绍，本书在内容组织上力求做到突出知识内在联系与保持知识模块完整性之间的平衡，从而使教材更具可读性和系统性。本书章节内容不仅覆盖集合论、数理逻辑、组合论、图论、可计算性、抽象代数等基础理论部分，还给出了这些基本理论在粗糙集、模糊集、自动推理、智能搜索、加密技术等领域的应用，并涉及公理化集合论、数理逻辑形式系统、形式语言与自动机等相关理论。本书以离散结构为建模对象，紧密联系计算机科学技术，特别强调应用能力、证明技术、计算思维的培养。

为便于学生及时复习并巩固所学知识，本书在每节后安排了大量习题；同时，为便于学有余力的学生进一步深造，每章后安排了一节阅读材料，以此来对本章所介绍的理论进行深入探讨，或进一步介绍技术的相关应用。

本书不仅可用作高等学校计算机类专业本科生的离散数学课程教材，也可供相关工程技术人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学教程 / 王元元等编著. --2 版. --北京：高等教育出版社，2019.7
ISBN 978-7-04-051298-4

Ⅰ.①离… Ⅱ.①王… Ⅲ.①离散数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 022284 号

策划编辑 张海波　责任编辑 张海波　封面设计 于文燕　版式设计 张 杰
插图绘制 于 博　责任校对 陈 杨　责任印制 尤 静

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 北京新华印刷有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 25
字 数 520 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
http://www.hepmall.com
http://www.hepmall.cn
版 次 2010 年 7 月第 1 版
2019 年 7 月第 2 版
印 次 2019 年 7 月第 1 次印刷
定 价 46.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 51298-00

前　言

《离散数学教程》第一版出版距今八年了。这八年来，互联网、人工智能等信息技术推动下的教育革新可谓风起潮涌、方兴未艾。慕课、视频公开课、资源共享课等在线数字资源极大提高了教育的受众面，提升了学习者的个性化学习体验。受惠于这一波革新浪潮，传统的纸质教材也可一改以往刻板单调的形象，结合形式各异的在线资源向读者呈现一个丰富、生动、易得、满足个性化需求的“新形态”。教程第 2 版正是在这一背景下应运而生。

如上所述，相对教程第 1 版，本版的最大特色是融合了在线教学资源。这些资源共分为四类：授课幻灯片，重难点讲解，典型习题解答与常见错误分析，以及知识点讲解视频。这些资源来自笔者多年的教学积累与心得，感谢高教出版社“新形态”教材计划，使其有机会被整理出来，与课堂之外的广大读者见面。目前上线的资源只是一部分，后期还会有一些陆续整理完成后上线。

相对前一版次，本版教程在内容上也稍作了一些调整。本版在内容编排上沿袭了前一版中先介绍离散结构形式化表示理论（逻辑代数和集合代数），再依次介绍各类离散结构及其数学模型的思路，但删除了原“准备知识”一章，将原在这一章集中介绍的集合、命题、谓词、运算等基本概念分类并入后续相关章节。作此改动，目的主要是希望在突出知识内在联系的同时更好地保持各个知识模块的完整性，在两者之间取得某种平衡，使教材更具可读性。

此外，本教程还对关系和图论两个知识模块作了扩充，增加了相容关系、图搜索、最短路径、有向无环图等内容的介绍，如此更加突出了教程所强调的在应用能力、证明技术和计算思维培养方面的特色。同时，为控制篇幅本版去掉了原“数论”一章，还请老读者见谅。

我们希望本版能够为读者带来更好的阅读体验，为教师和学生运用本教材教授和学习离散数学课程提供更多更好的帮助。但限于编者专业水平，错误和疏漏之处在所难免，还请读者不吝指正。

编　者

2018 年 10 月 18 日于南京

第1版前言

教过多年的离散数学课程，也写过离散数学教材，但总觉得这门课程现有的一些教材内容过于“离散”，体系结构间的相互衔接不尽合理，知识模块的内在联系不够紧密。教学之余，笔者感到似乎需要一本系统性更强的离散数学教程，以更好地满足教学的需求。因此，笔者在传统内容的基础上对内容进行扩展梳理，试图做成这样一部“离散数学教程”：它首先把离散结构涉及的原始概念，诸如集合、命题、谓词、运算等，提炼出来作为全部学习内容的准备知识，为其后的各大组成模块作统一的铺垫；然后介绍离散结构形式化表示的理论，即逻辑代数和集合代数；再基于所有这些公共基础，由浅入深、由简单到复杂、由具体到抽象地依次推出各类离散结构及其数学模型。现在呈现在读者面前的，正是笔者努力想要达成的“离散数学教程”的雏形。它在选材和编排上的内在逻辑大致体现在以下图示中。

<table>
<tr><td colspan="4">抽象代数结构</td></tr>
<tr><td>计算模型
离散结构</td><td>图离散结构</td><td>关系函数
离散结构</td><td>整数离散
结构</td></tr>
<tr><td colspan="2">逻辑代数</td><td colspan="2">集合代数</td></tr>
<tr><td colspan="4">准 备 知 识</td></tr>
</table>

如果说本教程在教学内容系统性的改造上所做的工作还只是一种尝试，那么在教学内容广泛性的开拓上可以说是用心良苦了。本教程不仅覆盖了集合论、数理逻辑、数论、组合论、图论、可计算性、抽象代数等基础理论部分，还包含了这些基本理论在粗糙集、模糊集、自动推理、智能搜索、加密技术等领域的应用，并涉及公理化集合论、数理逻辑形式系统、形式语言与自动机等相关理论。为了教师和学生能更好地使用本教程，更加便捷地在这个浩瀚的知识海洋里选取适合的模块、章节，以便设计出具有自己所在院校及专业特色的离散数学课程，我们把教程的全部内容分为了如下三个层次。

(1) 基本内容，它们是教程的主体。运用本教程的教师，可以依据教育部计算机科学与技术教学指导委员会编制的《高等学校计算机科学与技术专业规范》和《高等学校计算机科学与技术专业核心课程教学实施方案》，以及所在学校的特色、定位，在基本内容中选取大部或全部内容进行教学。

(2) 推荐内容，其标题被标记了 * 号。教程的这部分内容理论上较为深入，理解上有些难

度,推荐给使用本教程的教师,可视情况选作教学内容或课外讲座。

(3) 阅读材料,安排在教程每章的最后一节。它们或为相关理论的深入探讨,或为相关技术的重要应用,可用作学生的课外阅读指南,以利于他们巩固课堂上所学的知识,提升学习兴趣并培养探索精神。

另外,本教程特别强调对应用能力、证明技术、计算思维的培养。全书多数章节都独具匠心地安排了相关的应用课题,涉及人工智能、数据安全、计算模型等多个学科领域。全书以证明技术的教学贯穿始终,尤为注重基于逻辑表示的形式推演,以及基于逻辑定律的证明模式,包括引入假设的证明技术、分支证明技术、证伪证明技术等;除了对归纳法的证明模式、理论依据进行全面的分析与探讨之外,还将其大量运用于后续教学内容的演绎中;在图论和可计算理论中,重点介绍了构造性证明及其与归纳法、反证法证明的联合运用;对"鸽笼原理"、"对角线法"等常用证明技巧的灵活运用也给予了充分的关注。全书对离散结构及其数学模型进行了全面深入的介绍,期望给读者一个对计算思维的直观诠释。笔者以为,计算思维的核心价值在于对计算的"形式可表示性"、"结构可归约性"、"模型可构造性"、"能行可操作性"以及"操作可编码性"的理解与把握,而本教程的几乎全部内容恰恰正是围绕着这些主题循序渐进地展开的,以至于笔者有这样的冲动,给我们的《离散数学教程》添加一个鲜明而富有激情的副标题:走向计算思维的必由之路。

作为教材,本教程在每节后安排了为数不少的习题,有利于学生及时复习并巩固所学的知识,训练计算、推理的能力以及问题求解的能力。

本教程不仅可以用作高等学校计算机及相关专业本科生的离散数学课程教材,也可供相关工程技术人员阅读参考。笔者将向使用本教程实施教学的教师提供与本教程配套的教学用课件,以及习题的详细解答。笔者的联系方式为 yuanyuanwang0@gmail.com。

本教程采用了笔者以往编写的教材中的一些素材、例子和习题,由于这些内容较为经典、成熟,故未对它们作实质性的改写,特此敬告老读者。此外,北京大学的屈婉玲教授审阅了书稿,在此表示诚挚的感谢!限于笔者的专业造诣和教学水准,本教程中的错误和疏漏在所难免,不当之处敬请读者不吝指正。

作 者

2010年2月8日于南京

目　录

第 1 章
逻辑代数(上):命题演算

亚里士多德(Aristotle,公元前 384—公元前 322)开创的逻辑学(logic),是研究人类思维的科学,数理逻辑(mathematical logic)则是用数学的方法来进行这一研究的一个数学分支,它的显著特征是符号化和形式化,即把逻辑学所涉及的"概念、判断、推理"用符号来表示,并用符号化形式基础上的演算来描述推理过程的一般规律。近年来,数理逻辑已成为计算机软件理论、硬件逻辑设计、网络协议描述、人工智能等技术或学科的重要理论基础。由于我们不能全面介绍数理逻辑学,而只是较实用主义地介绍它的两个基础演算(命题演算和谓词演算),因此,用**逻辑代数**作为本章和下一章的标题。

微积分的奠基人莱布尼茨(Leibniz,1646—1716),早在 17 世纪就提出用代数的方法研究逻辑学的想法,但由于社会条件等原因,当时这一思想并未得到应有的重视。直到 19 世纪中后期,布尔(Boole,1815—1864),因其颇具天才性的工作"布尔代数",才真正翻开数理逻辑的第一页。数理逻辑与随后出现的可计算理论,为现代数字计算机的诞生奠定了重要的基础。

在传统的形式逻辑中,先讨论概念,后讨论判断(即命题),最后讨论推理。这是因为通常由概念形成判断,由判断又形成推理。其实,这未必是一种好的次序安排。如果我们把推理作为研究的根本目标,先忽略判断的细节——概念,把判断简化地看成不可分的整体——命题来讨论,也就是从命题演算入手,那么更便于对推理规律进行分析;在此基础上,再引入讨论事物性质、关系的理论——谓词演算,把推理的研究引向更深入的层次,不失为一种更加有利于把握推理本质的内容编排方式。因此,本书的次序是:第 1 章先讨论命题与命题演算,第 2 章讨论谓词和谓词演算,而把略微超出本教材要求的形式系统和形式推理的介绍,放在第 2 章的阅读材料中。

PPT

1.1 逻辑联结词与命题公式

1.1.1 命题

逻辑学把"对确定事物作出判断的陈述句"称作**命题**(proposition),当判断正确或符合客观实际时,称该命题**真**(true),否则称该命题**假**(false)。"真、假"常被称为命题的**真值**(true value)。古典逻辑认为,命题或真或假,但不能兼而有之,这就是逻辑学的一个基本假设——排中律(我们也遵循此假设)。真值“真、假”常用数字“1,0”来表示。

例 1.1 考虑下列语句:

(1) 雪是白的。

(2) 2+2=5。

(3) 陈胜、吴广起义的那天下雨。

(4) 到 2030 年北京将有一半的汽车是无人驾驶车。

(5) 大于 2 的偶数均可分解为两个质数的和(哥德巴赫猜想)。

(6) 存在地外生命。

(7) 好痛快啊!

(8) 您身体好吗?

(9) 我说的这句话(例 1.1 之(9))假。

(10) $x \leqslant 0$。

显然(1),(2)都是命题,(1)为真命题,取真值 1,(2)为假命题,取真值 0。事实上(3),(4),(5),(6)也是命题,虽然它们的真值未必现在或将来可以得知,但它们所作判断是否符合客观实际这一点被认为是确定的。

(7),(8)不是陈述句,因此它们都不是命题。

由于(9)对自身的真假作了否定的判断,从而对(9)真值的判定变得没有意义。当判定(9)真时,(9)对自身的判断成立,即(9)假;当判定(9)假时,(9)对自身的判断则不成立,即(9)真。它是一个悖论,一种病态的语句。我们约定悖论不是命题。

通常用小写拉丁字母 p,q,r 等表示命题,f 表示恒假的命题,t 表示恒真的命题。

(10)不是命题,因为习惯上 x 表示变元,它不是确定的对象,从而(10)没有确定的真值。只有当 x 取得确定的值时,(10)才成为命题,才有相应的真值。

$x \leqslant 0$ 虽然不是命题,但它是关于 x 的性质的一个判断,逻辑上称之为关于 x 的**断言**。

1.1.2 逻辑联结词

我们注意到,在自然语言中,表示判断的陈述句——命题,有时并不像前面所列举的那么简单,举例如下。

例 1.2 下列语句都是命题:

(1) 雪不是白的(并非雪是白的)。

(2) 今晚我去购物或者去打球。

(3) 我看了书,并且做完了作业。

(4) 他去了学校,又去了工厂。

(5) 你织布,我耕田(逗号也是一种连接)。

(6) 如果我有钱,那么我替你付学费。

(7) 偶数 a 是质数,当且仅当 $a=2$(a 是常数)。

上述命题中,不仅有表示判断(未必一个)的语言成分,还有联结这些判断的语言成分(联结词,上例中用下画线表示)。命题的真假不仅依赖于那些组成它们的若干判断(成分命题)的真假,而且还依赖于那些联结词的意义。在这里,联结词被称为**逻辑联结词**(logical connective)或**命题联结词**。通常把不含有逻辑联结词的命题称为**原子命题**或**原子**(atom),而把由原子命题和逻辑联结词共同组成的命题称为**复合命题**(composite proposition)。

今后"联结词"均指逻辑联结词及其符号表示。在逻辑代数中,重要的联结词有 5 个,它们已悉数出现在例 1.2 中。

否定词(negation)"并非(not)",用符号$\neg$(或~)表示。设 p 表示一命题,那么$\neg p$ 表示命题 p 的否定。当 p 真时$\neg p$ 假,而当 p 假时$\neg p$ 真。$\neg p$ 读作"并非 p"或"非 p"。今后我们用类似表 1.1 的所谓**真值表**(truth table)来规定联结词的意义,描述复合命题的真值状况。表 1.1 规定了否定词$\neg$的意义,给出了在 p 的各种取值可能下$\neg p$ 的真值。

表 1.1

p	$\neg p$
0	1
1	0

例 1.3 如果 p 表示命题"雪是白的",那么"并非雪是白的""雪不是白的"应表示为$\neg p$,此时$\neg p$ 为假,因为 p 为真。

当用否定词"并非"代替自然语言中的"不"时(或者反过来),应注意保持原语句的意义。例如 p 表示"整数都是自然数"时,$\neg p$ 表示"并非整数都是自然数"或"整数不都是自然数",而不是"整数都不是自然数"。

合取词(conjunction)"并且(and)",用符号$\wedge$表示。设 p,q 表示两命题,那么 $p\wedge q$ 表示合取 p 和 q 所得的命题,即当 p 和 q 同时为真时 $p\wedge q$ 真,否则 $p\wedge q$ 为假。$p\wedge q$ 读作"p 并且 q"或"p 且 q"。合取词$\wedge$的意义和命题 $p\wedge q$ 的真值状况可由表 1.2 来刻画。在有的命题表述中,"并且"一词未必出现,而是用"逗号"联结两个判断来表示这种"合取关系"。

表 1.2

p	q	$p\wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 1.4 如果 p 表示命题“你去边疆”,q 表示命题“我去海岛”,那么 $p\wedge q$ 表示命题“你去边疆并且我去海岛”。$p\wedge q$ 为真,当且仅当你、我分别去了边疆和海岛。“你织布,我耕田”中虽然没有联结词“并且”,但是该命题为真当且仅当“你织布”并且“我耕田”。用 p 表示命题“你织布”,q 表示命题“我耕田”时,$p\wedge q$ 表示命题“你织布,我耕田”。

析取词(disjunction)“或(or)”用符号 $\vee$ 表示。设 p,q 表示两命题,那么 $p\vee q$ 表示 p 和 q 的析取,即当 p 和 q 有一个为真时,$p\vee q$ 为真,只有当 p 和 q 均假时 $p\vee q$ 为假。$p\vee q$ 读作“p 或者 q”“p 或 q”。析取词 $\vee$ 的意义及复合命题 $p\vee q$ 的真值状况由表 1.3 描述。

表 1.3

p	q	$p\vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

例 1.5 如果 p,q 分别表示“今晚我看书”和“今晚我听音乐”,那么 $p\vee q$ 表示“今晚我看书或者听音乐”。当我于当晚看了书,或者听了音乐,或者既看了书又听了音乐时,$p\vee q$ 为真,只是在我既没看书也没听音乐时 $p\vee q$ 为假。

应当指出,这里的“或”是可兼的,即当 p 和 q 都为真时,确认 $p\vee q$ 为真。在某些场合,“或”不同于上述意义,例如,孩子向家长承诺只吃一种零食:“或者吃蛋糕,或者吃冰淇淋”。这里的“或”应当用表 1.4 规定的联结词“不可兼或” $\overline{\vee}$ 表示,$p\,\overline{\vee}\,q$ 在 p 和 q 都真时却为假。因为当孩子事实上吃了两种零食时,他违背了诺言,说了假话。

表 1.4

p	q	$p\,\overline{\vee}\,q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

也应指出,有时不可兼或联结的成分命题事实上不可能同时为真,例如“$a>0$ 或 $a=0$ 或 $a<0$”,从而根本不会涉及表 1.4 的末行,这时用 $\vee$ 代替 $\overline{\vee}$ 也无妨。因此,“$a>0$ 或 $a=0$ 或 $a<0$”可表示为“$a>0\vee a=0\vee a<0$”,而不必复杂地表示为“$a>0\,\overline{\vee}\,a=0\,\overline{\vee}\,a<0$”。

蕴涵词(implication)“如果……那么……(if…then…)”,用符号→表示。设 p,q 表示两命题,那么 $p\to q$ 表示命题“如果 p,那么 q”,它常被称作条件命题。当 p 真而 q 假时,命题 $p\to q$ 为假,否则均认为 $p\to q$ 为真。$p\to q$ 中的 p 称为蕴涵前件,q 称为蕴涵后件。$p\to q$ 的读法较多,可读

作"如果 p 则 q""p 蕴涵 q""p 是 q 的充分条件""q 是 p 的必要条件""q 当 p""p 仅当 q"等。数学中还常把 $q \to p$，$\neg p \to \neg q$，$\neg q \to \neg p$ 分别叫做 $p \to q$ 的逆命题、否命题、逆否命题。蕴涵词→的意义及复合命题 $p \to q$ 的真值状况见表 1.5。

表 1.5

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

例 1.6　如果用 p 表示"我有钱"，q 表示"我替你付学费"，那么 $p \to q$ 表示命题"如果我有钱，那么我替你付学费"。当我有钱时，若我替你付了学费，则诺言 $p \to q$ 真；若我没替你付学费，则诺言 $p \to q$ 假。当我没有钱时，我无论替或不替你付学费，均未食言，此时认定 $p \to q$ 为真是适当的。

表 1.5 规定的蕴涵词称为**实质蕴涵**(substantive implication)，因为它不要求 $p \to q$ 中的 p，q 有什么实际的因果关联，只要 p，q 为命题，$p \to q$ 就有意义。例如"如果 2+2=5，那么雪是黑的"，就被认为是一个有意义的命题，且据定义其值为"真"。蕴涵词的这种规定形式，给讨论数学问题和逻辑问题带来了很大的方便。实际上，实质蕴涵也早已为人们所熟悉并使用，例如汉乐府《上邪》中就有句子"山无棱，江水为竭……乃敢与君绝！"，作为恋人间忠贞的誓言。

双向蕴涵词(two-way implication)"当且仅当(if and only if)"，用符号↔表示。设 p，q 为两命题，那么 $p \leftrightarrow q$ 表示命题"p 当且仅当 q""p 与 q 等价"，即当 p 与 q 同真值时 $p \leftrightarrow q$ 为真，否则为假。$p \leftrightarrow q$ 读作"p 双向蕴涵 q""p 当且仅当 q""p 等价于 q"。由于"当且仅当""等价"常在其他地方使用，因而用第一种读法更好些。

双向蕴涵词的意义及 $p \leftrightarrow q$ 的真值状况由表 1.6 给出。

表 1.6

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 1.7　如果 p 表示命题"$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$"，$q$ 表示命题"$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的三边对应相等"，那么 $p \leftrightarrow q$ 表示大家熟知的平面几何中的一条定理，因为 p 真时 q 显然真，p 假时 q 亦必然

假,故 p 与 q 同真值,$p\leftrightarrow q$ 真。若 q 表示命题“$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的三内角对应相等”,那么 $p\leftrightarrow q$ 仍然是一个命题,但不再是真的了,因 p 假时 q 未必为假。

不难理解,$p\leftrightarrow q$ 为真当且仅当 $p\to q$ 与 $q\to p$ 都为真。

以上讨论的是自然语言中五个最常用、最重要的联结词,事实上还有许多其他联结词。它们中有的可以直接用这五个联结词中的一个来表示,例如“也”“又”等同于“且”,“除非……否则”等同于“当且仅当”等;有的则可以用它们中的若干个来表示,例如 $\overline{\vee}$,可用 $\vee$,$\wedge$ 与 $\neg$ 来表示,这一点将在下一节来讨论。

1.1.3 命题公式

我们已经知道,用拉丁字母 p,q,r,s 等表示具体命题,用 f,t 表示两个特殊的常命题:恒假命题和恒真命题,是符号化过程的最基本步骤。p,q,r,s,f,t 等统称为**命题常元**(propositional constant)。欲进行深入的讨论,还需要引入**命题变元**(propositional variable)的概念,它们是以“真、假”或“1,0”为取值范围的变元。为简便计,命题变元仍用 p,q,r,s(但不使用 f,t)等表示。相同符号的不同意义,容易从上下文来区别,在未指出符号 p,q,r,s 等表示具体命题时,它们常被默认为命题变元。人们常说的“形式化”,就是用符号来表示命题常元、变元及联结词,用符号串(一种人工语言,或形式语言)描述命题及其推理。下面要引入比命题常元、命题变元更为复杂的符号串——命题公式。

变元与常元

定义 1.1 以下过程生成的符号串称为**命题公式**(propositional formula),简称**公式**(formula):

(1) 命题常元和命题变元是命题公式,也称为原子公式或原子;

(2) 如果 A,B 是命题公式,那么 $(\neg A)$,$(A\wedge B)$,$(A\vee B)$,$(A\to B)$,$(A\leftrightarrow B)$ 也是命题公式;

(3) 只有有限步引用条款(1),(2)所组成的符号串是命题公式。

以上关于命题公式的定义方法称为归纳定义,其特点是在第一步直接给出最基本的命题公式(原子公式),第二步给出由已知的命题公式实例构造新的命题公式实例的规则,第三步确认所有的命题公式都可由条款(1)出发(有限次地)反复应用条款(2)得到。根据上述定义,符号串 $((p\wedge q)\to s)$ 是命题公式,但 $(p\wedge q)\to s$ 不是。根据条款(1),p,q,s 是原子公式,应用一次条款(2)可以得到 $(p\wedge q)$,再次应用条款(2)即可得到 $((p\wedge q)\to s)$。但从定义上看,除了原子公式之外,所有的公式最外层都有一对圆括号,故 $(p\wedge q)\to s$ 不可能是合法的公式。本书将在第 3 章对归纳定义方法进行详细介绍。

命题公式常用 $A,B,C,\cdots,P,Q,R,S$ 等大写拉丁字母来表示。我们有时会用到子公式的概念,直观地描述如下:B 称为公式 A 的**子公式**(subformula),如果 B 是公式 A 符号串中的一个子符号串(连续的片段),且 B 自身为一公式。

上面的定义要求每使用一个联结词就在公式中增加一对圆括号,这样产生的公式远不如我们常见的数学表达式简洁。为使命题公式的表示更为简明,按照数学的惯例对括号的运用作如