高等应用型人才培养规划教材

Higher Mathematics

高等数学

上册

主编 逄雅妮 陈峰

中国工信出版集团

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

815
部
1

Higher Mathematics

高等数学　上册

责任编辑　郝国栋
责任美编　吴宏丽

ISBN 978-7-121-36887-5

9 787121 368875 >

定价：33.60元

2

高等应用型人才培养规划教材

Higher Mathematics

高等数学

上册

主　编　逄雅妮　陈　峰
副主编　戚永委　刘淑爱

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册 / 逄雅妮, 陈峰主编. —北京: 电子工业出版社, 2019.8
ISBN 978-7-121-36887-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①逄… ②陈… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 123331 号

责任编辑：郝国栋
印　　刷：山东华立印务有限公司
装　　订：山东华立印务有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　　邮编　100036
开　　本：787×1092　1/16　　　印张：11.5　　　字数：194 千字
版　　次：2019 年 8 月第 1 版
印　　次：2019 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：33.60 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：（0532）67772605，邮箱：majie@phei.com.cn。

目录

contents

第1章 集合与函数

现实世界中，各种变量有相互依存的关系，函数就是这种关系的抽象表述，函数是微积分研究的基本对象. 本章简要复习与总结大家在中学学过的集合与函数的知识，并进一步补充有关的内容，如邻域、有界函数、基本初等函数和初等函数.

1.1 集 合

1.1.1 集合的概念

1. 集合

具有某种共同属性的一些对象的集体称为集合，构成集合的每个对象称为该集合的元素. 通常，用大写字母 $A, B, C\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a, b, c\cdots$ 表示集合的元素. 如果 x 是集合 A 中的元素，则称 x 属于 A，记为 $x\in A$；如果 x 不是集合 A 的元素，则称 x 不属于 A，记为 $x\notin A$.

用 **N** 表示自然数集合，用 **Z** 表示整数集合，用 **Q** 表示有理数集合，用 **R** 表示实数集合.

2. 集合的表示法

① 列举法：在一对大括号内把集合中的元素按任意的顺序全列举出来.

例如，用 $\{11, 12, 13, 14, 15\}$ 表示由 11，12，13，14，15 这 5 个数组成的集合.

② 描述法：在一对大括号内写出元素共同具有的属性，即用 $\{x|x$ 具有的共同属性$\}$ 表示一个集合.

例如，用 $\{x \mid x^2-4x+3>0\}$ 表示不等式 $x^2-4x+3>0$ 的解集.

③ 图形法：用一个平面图形表示一个集合，如图 1-1 所示.

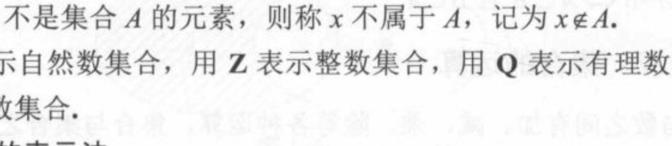

图 1-1

学习心得

学习心得

3. 集合的类型

① 有限集：包含有限个元素的集合.

② 无限集：包含无限个元素的集合.

③ 空集：不含任何元素的集合，记为$\varnothing$.

④ 全集：在解决某个问题时，包含研究的问题中所有对象的集合，记为I或U.

4. 子集

定义 设A，B为两个集合，如果集合A的元素都是集合B的元素，则称集合A为集合B的子集，如图1-2所示，记为$A\subset B$或$B\supset A$，读作A包含于B或B包含A.

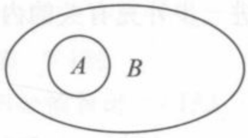

图1-2

5. 集合的相等

如果集合A和集合B包含相同的元素，则称集合A和集合B相等，记为$A=B$，读作A等于B.

性质 设A，B，C是任意的集合，U是全集，则有：

① $\varnothing\subset A\subset U$;

② $A\subset B$，$B\subset C\Rightarrow A\subset C$;

③ $A=B\Leftrightarrow A\subset B$且$B\subset A$.

1.1.2 集合的运算

数与数之间有加、减、乘、除等各种运算，集合与集合之间也有并、交、差、补四种基本运算.

1. 并集

定义 设A与B是两个集合，则A与B中所有元素组成的集合称为A与B的并集，记为$A\cup B$，如图1-3所示，读作A并B，即

$$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

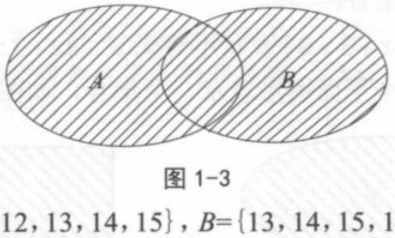

图1-3

例如，若$A=\{11,12,13,14,15\}$，$B=\{13,14,15,16,17\}$，则$A\cup B=\{11,12,13,14,15,16,17\}$.

性质 设 A，B，C 是任意的集合，U 是全集，则有：

① $\varnothing \cup A=A$，$A \cup U=U$；

② $A\subset(A\cup B)$，$B\subset(A\cup B)$.

2. 交集

定义 设 A 与 B 是两个集合，则 A 与 B 的公共元素组成的集合称为 A 与 B 的交集，记为 $A\cap B$，如图 1-4 所示，读作 A 交 B，即

$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

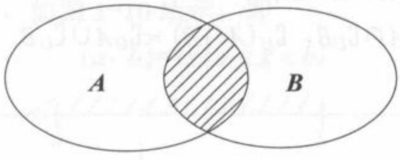

图 1-4

例如，若 $A=\{x|-3<x<5\}$，$B=\{x|-1<x<8\}$，则 $A\cap B=\{x|-1<x<5\}$.

性质 设 A，B，C 是任意的集合，U 是全集，则有：

① $\varnothing \cap A=\varnothing$，$A\cap U=A$；

② $A\supset(A\cap B)$，$B\supset(A\cap B)$.

3. 差集

定义 设 A 与 B 是两个集合，则 A 中去掉 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集，记为 $A-B$，如图 1-5 所示，读作 A 减 B，即

$$A-B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$$

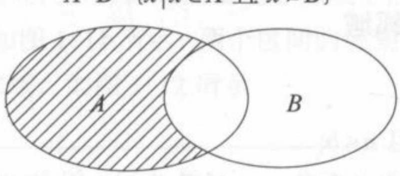

图 1-5

例如：

① 若 $A=\{11, 12, 13, 14, 15\}$，$B=\{13, 14, 15, 16, 17\}$，则 $A-B=\{11, 12\}$.

② 若 $A=\{x|-3<x<5\}$，$B=\{x|-1<x<8\}$，则 $A-B=\{x|-3<x\leqslant -1\}$.

性质 设 A，B，C 是任意的集合，U 是全集，则有：

① $\varnothing-A=\varnothing$，$A-\varnothing=A$，$A-A=\varnothing$；

② $A-B\subset A$.

4. 补集

定义 属于全集 U 而不属于集合 A 的元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集，记为 $\complement_U A$，如图 1-6 所示，即

$$\complement_U A=\{x|x\in U, \text{ 且 } x\notin A\}$$

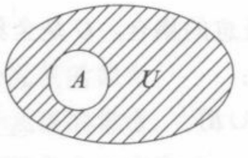

图 1-6

性质 设 A 是任意的集合，U 是全集，则有：

① $\complement_U \varnothing = U$，$\complement_U U = \varnothing$；

② $\complement_U A \cup A = U$，$\complement_U A \cap A = \varnothing$；

③ $\complement_U (A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B$，$\complement_U (A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B$.

5. 集合的运算律

(1) 交换律

① $A \cup B = B \cup A$.

② $A \cap B = B \cap A$.

(2) 结合律

① $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

② $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(3) 分配律

① $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

② $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

1.1.3 区间、邻域

1. 有限区间

设 a, b 为实数，且 $a<b$.

① 开区间：实数集合 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为以 a 为左端点、b 为右端点的开区间，记为 (a, b)，如图 1-7 所示，即

$$(a, b) = \{x \mid a<x<b\}$$

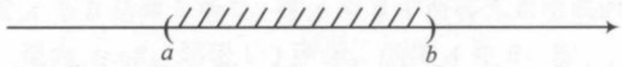

图 1-7

② 左开右闭区间：实数集合 $\{x \mid a<x \leqslant b\}$ 称为以 a 为左端点、b 为右端点的左开右闭区间，记为 $(a, b]$，如图 1-8 所示，即

$$(a, b] = \{x \mid a<x \leqslant b\}$$

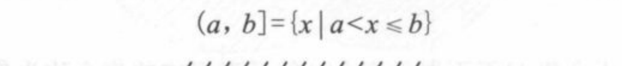

图 1-8

③ 左闭右开区间：实数集合 $\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$ 称为以 a 为左端点、b 为右端点的左闭右开区间，记为 $[a, b)$，如图 1-9 所示，即

$$[a, b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$$

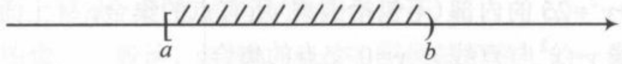

图 1-9

④ 闭区间：实数集合 $\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为以 a 为左端点、b 为右端点的闭区间，记为 $[a, b]$，如图 1-10 所示，即

$$[a, b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$$

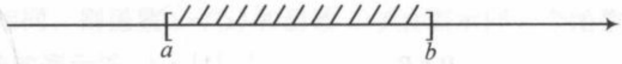

图 1-10

2. 无限区间

① $(a, +\infty)=\{x\,|\,x>a\}$，表示大于 a 的实数集合.

② $[a, +\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}$，表示大于或等于 a 的实数集合.

③ $(-\infty, b)=\{x\,|\,x<b\}$，表示小于实数 b 的集合.

④ $(-\infty, b]=\{x\,|\,x\leqslant b\}$，表示小于或等于实数 b 的集合.

⑤ $(-\infty, +\infty)=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}$，表示全体实数的集合.

3. 邻域

设 $\delta>0$，区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，点 x_0 为该邻域的中心，δ 为该邻域的半径，如图 1-11 所示；两个区间的并集 $(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的去心 δ 邻域，如图 1-12 所示.

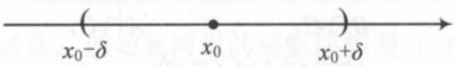

图 1-11

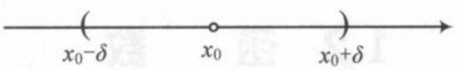

图 1-12

例如：点 1 的 $\frac{1}{2}$ 邻域为 $\left(1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$，点 1 的 $\frac{1}{2}$ 去心邻域为 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)\cup\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

练习 1.1

1. 用列举法表示下列集合.

① 方程 $x^2+7x+12=0$ 的解的集合；

② 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合；

学习心得

③ 集合$\{x||x-1|\leqslant 5$的整数$\}$.

2. 用集合的描述法表示下列集合.

① 大于5的所有实数的集合;

② 圆$x^2+y^2=25$的内部(不包括圆周)所有点的集合;

③ 抛物线$y=x^2$与直线$x+y=0$交点的集合.

3. 下列集合中，哪些集合是空集?

$A=\{x|x-1=0\}$，$B=\{x|x^2+1=0,\ x\in\mathbf{R}\}$，$C=\{x|x<-1$ 且 $x>0\}$，

$D=\{x|x>1$ 且 $x<5\}$，$E=\{(x,\ y)|x^2+y^2=1$ 且 $x+y=3,\ x,\ y\in\mathbf{R}\}$.

4. 已知$A=\{0,1,2\}$，$B=\{1,2\}$，下列各式中，哪些是对的，哪些不对?

$1\in A$，　$0\notin B$，　$\{1\}\in A$，　$1\subset A$，

$\{1\}\subset A$，　$\{0\}\in B$，　$A=B$，　$A\supset B$，

$\varnothing\subset A$，　$A\subset A$.

5. 如果A是非空集合，且A不等于全集U，下列各个等式中，哪些是对的，哪些不对?

$A\cap A=A$，　$A\cup A=A$，　$A\cap A=\varnothing$，　$A\cup\varnothing=A$，

$A\cup\varnothing=\varnothing$，　$A\cup U=U$，　$A\cap U=A$，　$A\cap\varnothing=A$，

$A\cap\varnothing=\varnothing$，　$A-A=A$，　$A-A=\varnothing$，　$\complement_U A=U$.

6. 设$A=\{x|x^2-16<0\}$，$B=\{x|x^2-4x+3\geqslant 0\}$，$U=\mathbf{R}$，求:

① $A\cap B$;　② $A\cup B$;　③ $B-A$;　④ $\complement_U A$;

⑤ $\complement_U B$;　⑥ $\complement_U(A\cap B)$.

7. 设$A=\{a,\ b,\ c\}$，$B=\{b,\ e,\ f\}$，$C=\{a,\ c,\ f\}$，求:

$A\cup B$，　$B\cap C$，　$A\cap C$，

$(A\cup B)\cap C$，　$(B\cap C)\cup(A\cap C)$.

1.2 函　数

1.2.1 函数的概念

1. 函数的定义

定义 设f是集合X和Y之间的一种对应关系，如果对X中的每个元素x，通过f都有Y中唯一确定的元素y与x对应，则称f是从X到Y的映射，记为

$$f:\ X\to Y \quad 或 \quad y=f(x),\ x\in X$$

如果X和Y都是表示实数的集合，则称映射f是函数，称X为定义域，记为D_f; 称函数值的集合$\{y\,|\,y=f(x),\ x\in X\}$为$f$的值域，记为$R_f$.

设 $y=f(x)$ 是一个给定的函数，定义域为 D_f，在平面直角坐标系中，用 x 轴上的点表示自变量的值，用 y 轴上的点表示函数值，这样，D_f 内每一个 x 和相应的函数值 $y=f(x)$ 确定了一个点 $P(x,y)$，当 x 在 D_f 内变动时，点 P 便在平面上移动，所有这些点的集合 $\{P(x,y)\mid y=f(x),\ x\in D_f\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图像. 一般地，函数 $y=f(x)$ 的图像是平面上的一条曲线，通常也称它为曲线 $y=f(x)$.

如果两个函数的定义域相同，对应关系也相同，则称这两个函数相同(或相等)，否则称这两个函数不相同(或不相等)，至于自变量和函数(也称为因变量)用什么符号表示，则没有什么关系. 因此，只要定义域相同，对应关系 f 相同，则函数 $y=f(x)$ 和函数 $u=f(t)$ 表示同一个函数.

2. **函数的表示法**

表示函数的常用方法有三种，公式法(也称为解析法)、表格法(也称为列表法)和图形法(也称为图像法). 下面分别举例说明.

用公式法表示函数. 例如：$y=\dfrac{1}{x(x-1)}+\sqrt{9-x^2}$，表示 y 是 x 的函数，它的定义域 $D_f=[-3,0)\cup(0,1)\cup(1,3]$.

用表格法表示函数. 例如某城市一年里各个月的平均气温如表 1-1 所示，这里每个月的平均气温是月份数的函数，它的定义域 $D_f=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

表 1-1

月份 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
平均气温 y	−2.5	−2.8	3.9	9.7	18.2	27.4	30.5	31.2	29.8	19.3	4.5	0.7

用图形法表示函数. 例如某河道的横断面如图 1-13 所示，河面上任意的一点和岸边一点 O 的水平距离 x 与该点处的河深 y 之间的对应关系，用图中的曲线表示.

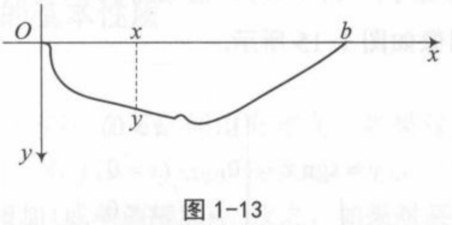

图 1-13

本例中，河深 y 是水平距离 x 的函数，其关系用图形表示，它的定义域 $D_f=[0,b]$.

在实际中经常会用到一个取整函数，记为 $y=[x]$，它用来表示不大于 x 的整数，例如，$\left[\dfrac{5}{7}\right]=0$, $\left[\sqrt{2}\right]=1$, $[\pi]=3$, $[-1]=-1$, $[-3.5]=-4$，它的图像如图 1-14 所示.

学习心得

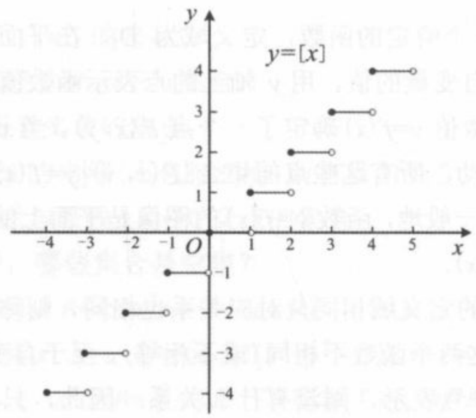

图 1-14

3. 分段函数

定义 如果一个函数对其定义域内的自变量 x 不同的值，不能用一个数学表达式(不包括绝对值表达式)表示函数值和自变量间的关系，而至少要用两个数学表达式表示，则称这样的函数为分段函数.

例如：$y=\begin{cases}x+1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x-1, & x>0\end{cases}$ 和 $y=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x, & x>0\end{cases}$

都是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的分段函数.

分段函数的定义域一般都分成若干部分，每一部分称为一段，段和段之间的交接点称为分界点或分段点. 注意，分段函数是至少用两个数学式子表示的同一个函数，而不是几个函数.

下面介绍几个常用的分段函数.

(1) 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

绝对值函数定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$.

绝对值函数的图像如图 1-15 所示.

(2) 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

符号函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{-1,0,1\}$.

对于任何实数 x 有下列关系：$x=\operatorname{sgn} x\cdot|x|$.

符号函数的图像如图 1-16 所示.

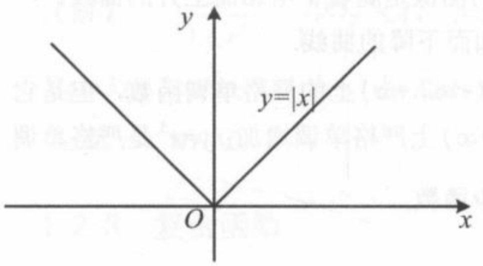

图 1-15

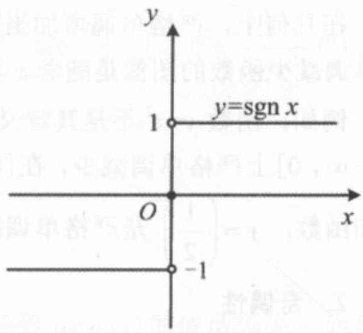

图 1-16

(3) 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q}\\ 0, & x\in\complement_U\mathbf{Q}\end{cases}$$

上述式子中的全集 U 为$(-\infty,+\infty)$，它是狄利克雷函数的定义域.

【例 1】用分段函数的形式表示函数 $y=5-|2x-1|$.

【解】$D_f=(-\infty,+\infty)$.

令 $|2x-1|=0$，得 $x=\dfrac{1}{2}$.

$$\therefore\ y=5-|2x-1|=\begin{cases}5-(1-2x), & x<\dfrac{1}{2}\\ 5-(2x-1), & x\geqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}=\begin{cases}4+2x, & x<\dfrac{1}{2}\\ 6-2x, & x\geqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

4. 隐函数

定义 由二元方程式 $F(x,y)=0$ 所确定的 y 和 x 的函数关系称为隐函数，其中因变量 y 不一定能用自变量 x 直接表示出来.

例如：由方程 $xe^y-y+1=0$ 所确定的 y 和 x 的函数关系，就不能写成 $y=f(x)$(显函数)的形式，因而称其为隐函数.

1.2.2 函数的基本性质

1. 单调性

定义 设函数 $y=f(x)$ 在某区间内有定义，如果对该区间内任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$)，则称函数 $f(x)$ 在该区间内严格单调增加(或单调增加). 反之，如果对某区间内任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$(或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$)，则称函数 $f(x)$ 在该区间内严格单调减少(或单调减少). 如果 $f(x)$ 在 D_f 上单调增加，则称 $f(x)$ 为单调增加函数(或单调增函数)；如果 $f(x)$ 在 D_f 上单调减少，则称 $f(x)$ 为单调减少函数(或单调减函数). 单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数.

学习心得