



高等应用型人才培养规划教材

Higher Mathematics

高等数学

上册

主编 逢雅妮 陈峰



中国工信出版集团



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>

015
295
1

Higher Mathematics

高等数学 上册



责任编辑 郝国栋
责任美编 吴宏丽

ISBN 978-7-121-36887-5



9 787121 368875 >

定价：33.60元



高等应用型人才培养规划教材

Higher Mathematics

高等数学

上册

主 编 逢雅妮 陈 峰
副主编 戚永委 刘淑爱

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING



未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有，侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册 / 逢雅妮, 陈峰主编. —北京: 电子工业出版社, 2019.8
ISBN 978-7-121-36887-5

I. ①高… II. ①逢… ②陈… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 123331 号

责任编辑: 郝国栋

印 刷: 山东华立印务有限公司

装 订: 山东华立印务有限公司

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱

邮编 100036

开 本: 787×1092 1/16

印张: 11.5

字数: 194 千字

版 次: 2019 年 8 月第 1 版

印 次: 2019 年 8 月第 1 次印刷

定 价: 33.60 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及购电话: (010) 88254888, 88258888。

质量投诉请发邮件至 zits@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式: (0532) 67772605, 邮箱: majie@phei.com.cn。

目 录

contents

第 1 章 集合与函数 / 1

1.1 集合 / 1

1.1.1 集合的概念 / 1

1.1.2 集合的运算 / 2

1.1.3 区间、邻域 / 4

练习 1.1 / 5

1.2 函数 / 6

1.2.1 函数的概念 / 6

1.2.2 函数的基本性质 / 9

1.2.3 复合函数 / 11

1.2.4 反函数 / 12

1.2.5 反三角函数 / 13

1.2.6 初等函数 / 15

练习 1.2 / 16

1.3 几种常见的经济函数 / 18

练习 1.3 / 20

习题 1 / 21

第 2 章 极限与连续函数 / 23

2.1 数列的极限 / 23

2.1.1 数列 / 23

2.1.2 数列的极限 / 24

2.1.3 收敛数列的主要性质 / 26

练习 2.1 / 26

- 2.2 函数的极限 / 27
 - 2.2.1 自变量趋近于无穷时, 函数的极限 / 27
 - 2.2.2 自变量趋近于常数时, 函数的极限 / 30
 - 2.2.3 函数极限的性质 / 33
 - 练习 2.2 / 33
- 2.3 无穷小量与无穷大量 / 34
 - 2.3.1 无穷小量 / 34
 - 2.3.2 无穷大量 / 35
 - 练习 2.3 / 40
- 2.4 极限的运算法则和存在准则 / 41
 - 2.4.1 极限的四则运算法则 / 41
 - 2.4.2 极限存在的两个准则 / 45
 - 练习 2.4 / 46
- 2.5 两个重要极限 / 47
 - 2.5.1 重要极限 I / 47
 - 2.5.2 重要极限 II / 49
 - 2.5.3 利用等价无穷小量替换法求极限 / 51
 - 练习 2.5 / 52
- 2.6 函数的连续性 / 53
 - 2.6.1 函数连续的概念 / 53
 - 2.6.2 连续函数的有关定理 / 56
 - 2.6.3 闭区间上连续函数的性质 / 58
 - 练习 2.6 / 60
- 习题 2 / 61

第 3 章 导数与微分 / 65

- 3.1 导数的概念 / 65
 - 3.1.1 几个引例 / 65
 - 3.1.2 导数的定义 / 67
 - 3.1.3 简单函数求导举例 / 68
 - 3.1.4 函数可导与连续的关系 / 71
 - 3.1.5 单侧导数 / 71
 - 练习 3.1 / 73
- 3.2 求导运算法则与基本求导公式 / 73
 - 3.2.1 函数求导四则运算法则 / 73
 - 3.2.2 反函数求导法则 / 75
 - 3.2.3 复合函数求导法则 / 76
 - 3.2.4 基本初等函数的求导公式 / 77

- 练习 3.2 / 78
- 3.3 高阶导数 / 78
- 练习 3.3 / 80
- 3.4 隐函数与参数式函数的导数 / 81
- 3.4.1 隐函数的导数 / 81
- 3.4.2 对数求导法 / 82
- 3.4.3 参数式函数的导数 / 82
- 练习 3.4 / 83
- 3.5 函数的微分 / 84
- 3.5.1 微分的概念 / 84
- 3.5.2 微分的运算 / 85
- 3.5.3 微分的几何意义 / 87
- 3.5.4 微分形式不变性 / 87
- 3.5.5 微分在近似计算中的应用 / 88
- 练习 3.5 / 90
- 3.6 导数在经济学中的简单应用 / 90
- 3.6.1 边际分析 / 90
- 3.6.2 弹性分析 / 91
- 练习 3.6 / 94
- 习题 3 / 95

第 4 章 微分中值定理与导数应用 / 98

- 4.1 微分中值定理 / 98
- 4.1.1 罗尔(Rolle)中值定理 / 98
- 4.1.2 拉格朗日(Lagrange)中值定理 / 101
- 4.1.3 柯西(Cauchy)中值定理 / 103
- 练习 4.1 / 104
- 4.2 洛必达法则 / 103
- 4.2.1 $x \rightarrow a$ 或 $x \rightarrow \infty$ 时的 $\frac{0}{0}$ 型未定式 / 103
- 4.2.2 $x \rightarrow a$ 或 $x \rightarrow \infty$ 时的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式 / 107
- 4.2.3 $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , 1^∞ , ∞^0 型未定式 / 108
- 练习 4.2 / 110
- 4.3 函数的单调性与凹凸性 / 111
- 4.3.1 函数单调性的判断 / 111
- 4.3.2 曲线的凹凸性与拐点 / 114
- 练习 4.3 / 117

- 4.4 函数的极值、最值及应用 / 118
 - 4.4.1 函数的极值 / 118
 - 4.4.2 函数的最大值与最小值 / 122
 - 练习 4.4 / 125
- 4.5 描绘函数图像 / 125
 - 4.5.1 曲线的渐近线 / 125
 - 4.5.2 描绘函数图像 / 127
 - 练习 4.5 / 129
- 习题 4 / 129

第 5 章 不定积分 / 132

- 5.1 不定积分的概念与性质 / 132
 - 5.1.1 原函数与不定积分的概念 / 132
 - 5.1.2 不定积分的几何意义 / 134
 - 5.1.3 基本积分公式 / 135
 - 5.1.4 不定积分的线性运算性质 / 136
 - 练习 5.1 / 137
- 5.2 不定积分的换元积分法 / 138
 - 5.2.1 第一类换元积分法 / 138
 - 5.2.2 第二类换元积分法 / 142
 - 练习 5.2 / 148
- 5.3 分部积分法 / 148
 - 练习 5.3 / 151
- 5.4 有理函数的积分 / 151
 - 5.4.1 有理函数的不定积分 / 151
 - 5.4.2 含有三角函数的有理式的不定积分 / 154
 - 练习 5.4 / 155
- 5.5 不定积分在经济中的应用 / 155
 - 5.5.1 已知边际需求函数求需求函数 / 156
 - 5.5.2 已知边际成本函数求总成本函数 / 156
 - 5.5.3 已知边际收益函数求总收益函数 / 156
 - 5.5.4 已知边际利润函数求总利润函数 / 157
 - 练习 5.5 / 157
- 习题 5 / 158

附录 部分习题答案和提示 / 160

第1章 集合与函数

现实世界中，各种变量有相互依存的关系，函数就是这种关系的抽象表述，函数是微积分研究的基本对象。本章简要复习与总结大家在中学学过的集合与函数的知识，并进一步补充有关的内容，如邻域、有界函数、基本初等函数和初等函数。

1.1 集 合

1.1.1 集合的概念

1. 集合

具有某种共同属性的一些对象的集体称为集合，构成集合的每个对象称为该集合的元素。通常，用大写字母 $A, B, C \dots$ 表示集合，用小写字母 $a, b, c \dots$ 表示集合的元素。如果 x 是集合 A 中的元素，则称 x 属于 A ，记为 $x \in A$ ；如果 x 不是集合 A 的元素，则称 x 不属于 A ，记为 $x \notin A$ 。

用 \mathbf{N} 表示自然数集合，用 \mathbf{Z} 表示整数集合，用 \mathbf{Q} 表示有理数集合，用 \mathbf{R} 表示实数集合。

2. 集合的表示法

① 列举法：在一对大括号内把集合中的元素按任意的顺序全列举出来。例如，用 $\{11, 12, 13, 14, 15\}$ 表示由 11, 12, 13, 14, 15 这 5 个数组成的集合。

② 描述法：在一对大括号内写出元素共同具有的属性，即用 $\{x|x$ 具有的共同属性 $\}$ 表示一个集合。

例如，用 $\{x|x^2 - 4x + 3 > 0\}$ 表示不等式 $x^2 - 4x + 3 > 0$ 的解集。

③ 图形法：用一个平面图形表示一个集合，如图 1-1 所示。



图 1-1

3. 集合的类型

- ① 有限集: 包含有限个元素的集合.
- ② 无限集: 包含无限个元素的集合.
- ③ 空集: 不含任何元素的集合, 记为 \emptyset .
- ④ 全集: 在解决某个问题时, 包含研究的问题中所有对象的集合, 记为 I 或 U .

4. 子集

定义 设 A, B 为两个集合, 如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素, 则称集合 A 为集合 B 的子集, 如图 1-2 所示, 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 读作 A 包含于 B 或 B 包含 A .

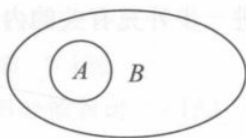


图 1-2

5. 集合的相等

如果集合 A 和集合 B 包含相同的元素, 则称集合 A 和集合 B 相等, 记为 $A=B$, 读作 A 等于 B .

性质 设 A, B, C 是任意的集合, U 是全集, 则有:

- ① $\emptyset \subset A \subset U$;
- ② $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$;
- ③ $A=B \Leftrightarrow A \subset B$ 且 $B \subset A$.

1.1.2 集合的运算

数与数之间有加、减、乘、除等各种运算, 集合与集合之间也有并、交、差、补四种基本运算.

1. 并集

定义 设 A 与 B 是两个集合, 则 A 与 B 中所有元素组成的集合称为 A 与 B 的并集, 记为 $A \cup B$, 如图 1-3 所示, 读作 A 并 B , 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

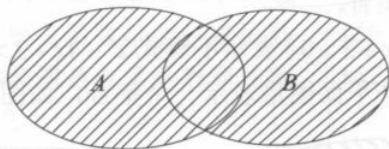


图 1-3

例如, 若 $A = \{11, 12, 13, 14, 15\}$, $B = \{13, 14, 15, 16, 17\}$, 则 $A \cup B = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$.

性质 设 A, B, C 是任意的集合, U 是全集, 则有:

$$\textcircled{1} \quad \emptyset \cup A = A, \quad A \cup U = U;$$

$$\textcircled{2} \quad A \subset (A \cup B), \quad B \subset (A \cup B).$$

2. 交集

定义 设 A 与 B 是两个集合, 则 A 与 B 的公共元素组成的集合称为 A 与 B 的交集, 记为 $A \cap B$, 如图 1-4 所示, 读作 A 交 B , 即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

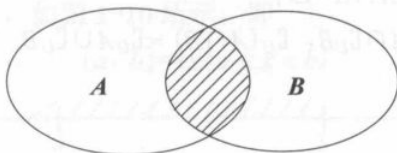


图 1-4

例如, 若 $A = \{x | -3 < x < 5\}$, $B = \{x | -1 < x < 8\}$, 则 $A \cap B = \{x | -1 < x < 5\}$.

性质 设 A, B, C 是任意的集合, U 是全集, 则有:

$$\textcircled{1} \quad \emptyset \cap A = \emptyset, \quad A \cap U = A;$$

$$\textcircled{2} \quad A \supset (A \cap B), \quad B \supset (A \cap B).$$

3. 差集

定义 设 A 与 B 是两个集合, 则 A 中去掉 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集, 记为 $A - B$, 如图 1-5 所示, 读作 A 减 B , 即

$$A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

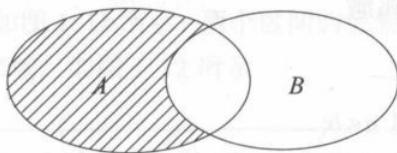


图 1-5

例如:

$\textcircled{1}$ 若 $A = \{11, 12, 13, 14, 15\}$, $B = \{13, 14, 15, 16, 17\}$, 则 $A - B = \{11, 12\}$.

$\textcircled{2}$ 若 $A = \{x | -3 < x < 5\}$, $B = \{x | -1 < x < 8\}$, 则 $A - B = \{x | -3 < x \leq -1\}$.

性质 设 A, B, C 是任意的集合, U 是全集, 则有:

$$\textcircled{1} \quad \emptyset - A = \emptyset, \quad A - \emptyset = A, \quad A - A = \emptyset;$$

$$\textcircled{2} \quad A - B \subset A.$$

4. 补集

定义 属于全集 U 而不属于集合 A 的元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集, 记为 $\complement_U A$, 如图 1-6 所示, 即

$$\complement_U A = \{x | x \in U, \text{ 且 } x \notin A\}$$

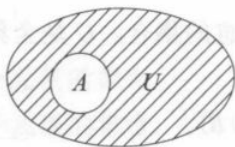


图 1-6

性质 设 A 是任意的集合, U 是全集, 则有:

- ① $\complement_U \emptyset = U, \complement_U U = \emptyset$;
- ② $\complement_U A \cup A = U, \complement_U A \cap A = \emptyset$;
- ③ $\complement_U (A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B, \complement_U (A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B$.

5. 集合的运算律

(1) 交换律

- ① $A \cup B = B \cup A$.
- ② $A \cap B = B \cap A$.

(2) 结合律

- ① $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
- ② $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(3) 分配律

- ① $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
- ② $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

1.1.3 区间、邻域

1. 有限区间

设 a, b 为实数, 且 $a < b$.

① 开区间: 实数集合 $\{x | a < x < b\}$ 称为以 a 为左端点、 b 为右端点的开区间, 记为 (a, b) , 如图 1-7 所示, 即

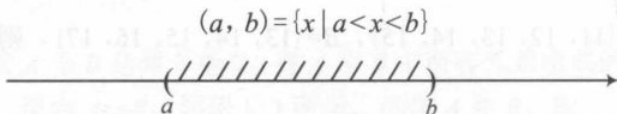


图 1-7

② 左开右闭区间: 实数集合 $\{x | a < x \leq b\}$ 称为以 a 为左端点、 b 为右端点的左开右闭区间, 记为 $(a, b]$, 如图 1-8 所示, 即

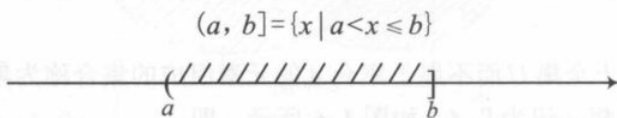


图 1-8

③ 左闭右开区间：实数集合 $\{x|a \leq x < b\}$ 称为以 a 为左端点、 b 为右端点的左闭右开区间，记为 $[a, b)$ ，如图 1-9 所示，即

$$[a, b) = \{x|a \leq x < b\}$$

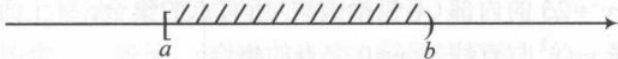


图 1-9

④ 闭区间：实数集合 $\{x|a \leq x \leq b\}$ 称为以 a 为左端点、 b 为右端点的闭区间，记为 $[a, b]$ ，如图 1-10 所示，即

$$[a, b] = \{x|a \leq x \leq b\}$$



图 1-10

2. 无限区间

① $(a, +\infty) = \{x|x > a\}$ ，表示大于 a 的实数集合。

② $[a, +\infty) = \{x|x \geq a\}$ ，表示大于或等于 a 的实数集合。

③ $(-\infty, b) = \{x|x < b\}$ ，表示小于实数 b 的集合。

④ $(-\infty, b] = \{x|x \leq b\}$ ，表示小于或等于实数 b 的集合。

⑤ $(-\infty, +\infty) = \{x|-\infty < x < +\infty\}$ ，表示全体实数的集合。

3. 邻域

设 $\delta > 0$ ，区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，点 x_0 为该邻域的中心， δ 为该邻域的半径，如图 1-11 所示；两个区间的并集 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的去心 δ 邻域，如图 1-12 所示。

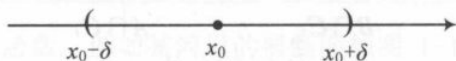


图 1-11

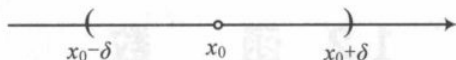


图 1-12

例如：点 1 的 $\frac{1}{2}$ 邻域为 $\left(1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ，点 1 的 $\frac{1}{2}$ 去心邻域为 $\left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right)$ 。

练习 1.1

1. 用列举法表示下列集合。

① 方程 $x^2 + 7x + 12 = 0$ 的解的集合；

② 抛物线 $y = x^2$ 与直线 $x - y = 0$ 交点的集合；

③ 集合 $\{x \mid |x-1| \leq 5 \text{ 的整数}\}$.

2. 用集合的描述法表示下列集合.

① 大于 5 的所有实数的集合;

② 圆 $x^2+y^2=25$ 的内部(不包括圆周)所有点的集合;

③ 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x+y=0$ 交点的集合.

3. 下列集合中, 哪些集合是空集?

$$A=\{x \mid x-1=0\}, B=\{x \mid x^2+1=0, x \in \mathbf{R}\}, C=\{x \mid x < -1 \text{ 且 } x > 0\},$$

$$D=\{x \mid x > 1 \text{ 且 } x < 5\}, E=\{(x, y) \mid x^2+y^2=1 \text{ 且 } x+y=3, x, y \in \mathbf{R}\}.$$

4. 已知 $A=\{0, 1, 2\}$, $B=\{1, 2\}$, 下列各式中, 哪些是对的, 哪些不对?

$$\begin{array}{llll} 1 \in A, & 0 \notin B, & \{1\} \in A, & 1 \subset A, \\ \{1\} \subset A, & \{0\} \in B, & A=B, & A \supset B, \\ \emptyset \subset A, & A \subset A. & & \end{array}$$

5. 如果 A 是非空集合, 且 A 不等于全集 U , 下列各个等式中, 哪些是对的, 哪些不对?

$$\begin{array}{llll} A \cap A=A, & A \cup A=A, & A \cap A=\emptyset, & A \cup \emptyset=A, \\ A \cup \emptyset=\emptyset, & A \cup U=U, & A \cap U=A, & A \cap \emptyset=A, \\ A \cap \emptyset=\emptyset, & A-A=A, & A-A=\emptyset, & \complement_U A=U. \end{array}$$

6. 设 $A=\{x \mid x^2-16 < 0\}$, $B=\{x \mid x^2-4x+3 \geq 0\}$, $U=\mathbf{R}$, 求:

$$\begin{array}{llll} \textcircled{1} A \cap B; & \textcircled{2} A \cup B; & \textcircled{3} B-A; & \textcircled{4} \complement_U A; \\ \textcircled{5} \complement_U B; & \textcircled{6} \complement_U (A \cap B). & & \end{array}$$

7. 设 $A=\{a, b, c\}$, $B=\{b, e, f\}$, $C=\{a, c, f\}$, 求:

$$\begin{array}{lll} A \cup B, & B \cap C, & A \cap C, \\ (A \cup B) \cap C, & (B \cap C) \cup (A \cap C). & \end{array}$$

1.2 函 数

1.2.1 函数的概念

1. 函数的定义

定义 设 f 是集合 X 和 Y 之间的一种对应关系, 如果对 X 中的每个元素 x , 通过 f 都有 Y 中唯一确定的元素 y 与 x 对应, 则称 f 是从 X 到 Y 的映射, 记为

$$f: X \rightarrow Y \quad \text{或} \quad y=f(x), x \in X$$

如果 X 和 Y 都是表示实数的集合, 则称映射 f 是函数, 称 X 为定义域, 记为 D_f ; 称函数值的集合 $\{y \mid y=f(x), x \in X\}$ 为 f 的值域, 记为 R_f .

设 $y=f(x)$ 是一个给定的函数, 定义域为 D_f , 在平面直角坐标系中, 用 x 轴上的点表示自变量的值, 用 y 轴上的点表示函数值, 这样, D_f 内每一个 x 和相应的函数值 $y=f(x)$ 确定了一个点 $P(x, y)$, 当 x 在 D_f 内变动时, 点 P 便在平面上移动, 所有这些点的集合 $\{P(x, y) | y=f(x), x \in D_f\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图像. 一般地, 函数 $y=f(x)$ 的图像是平面上的一条曲线, 通常也称它为曲线 $y=f(x)$.

如果两个函数的定义域相同, 对应关系也相同, 则称这两个函数相同(或相等), 否则称这两个函数不相同(或不相等), 至于自变量和函数(也称为因变量)用什么符号表示, 则没有什么关系. 因此, 只要定义域相同, 对应关系 f 相同, 则函数 $y=f(x)$ 和函数 $u=f(t)$ 表示同一个函数.

2. 函数的表示法

表示函数的常用方法有三种, 公式法(也称为解析法)、表格法(也称为列表法)和图形法(也称为图像法). 下面分别举例说明.

用公式法表示函数. 例如: $y = \frac{1}{x(x-1)} + \sqrt{9-x^2}$, 表示 y 是 x 的函数,

它的定义域 $D_f = [-3, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 3]$.

用表格法表示函数. 例如某城市一年里各个月的平均气温如表 1-1 所示, 这里每个月的平均气温是月份数的函数, 它的定义域 $D_f = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

表 1-1

月份 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
平均气温 y	-2.5	-2.8	3.9	9.7	18.2	27.4	30.5	31.2	29.8	19.3	4.5	0.7

用图形法表示函数. 例如某河道的横断面如图 1-13 所示, 河面上任意的一点和岸边一点 O 的水平距离 x 与该点处的河深 y 之间的对应关系, 用图中的曲线表示.

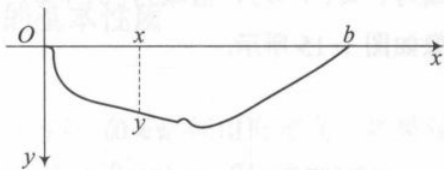


图 1-13

本例中, 河深 y 是水平距离 x 的函数, 其关系用图形表示, 它的定义域 $D_f = [0, b]$.

在实际中经常会用到一个取整函数, 记为 $y=[x]$, 它用来表示不大于 x 的整数, 例如, $\left[\frac{5}{7}\right] = 0$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[\pi] = 3$, $[-1] = -1$, $[-3.5] = -4$, 它的图像如图 1-14 所示.

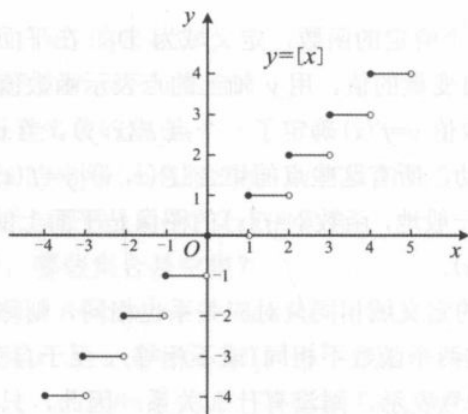


图 1-14

3. 分段函数

定义 如果一个函数对其定义域内的自变量 x 不同的值, 不能用一个数学表达式(不包括绝对值表达式)表示函数值和自变量间的关系, 而至少要用两个数学表达式表示, 则称这样的函数为分段函数.

$$\text{例如: } y = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & x > 0 \end{cases} \text{ 和 } y = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

都是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的分段函数.

分段函数的定义域一般都分成若干部分, 每一部分称为一段, 段和段之间的交接点称为分界点或分段点. 注意, 分段函数是至少用两个数学式子表示的同一个函数, 而不是几个函数.

下面介绍几个常用的分段函数.

(1) 绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

绝对值函数定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[0, +\infty)$.

绝对值函数的图像如图 1-15 所示.

(2) 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

符号函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $\{-1, 0, 1\}$.

对于任何实数 x 有下列关系: $x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$.

符号函数的图像如图 1-16 所示.

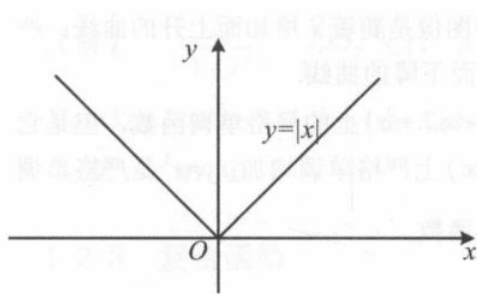


图 1-15

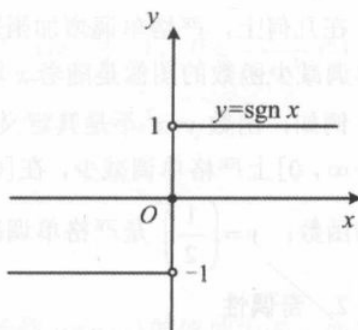


图 1-16

(3) 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{C}_U \mathbf{Q} \end{cases}$$

上述式子中的全集 U 为 $(-\infty, +\infty)$, 它是狄利克雷函数的定义域.

【例 1】用分段函数的形式表示函数 $y = 5 - |2x - 1|$.

【解】 $D_f = (-\infty, +\infty)$.

令 $|2x - 1| = 0$, 得 $x = \frac{1}{2}$.

$$\therefore y = 5 - |2x - 1| = \begin{cases} 5 - (1 - 2x), & x < \frac{1}{2} \\ 5 - (2x - 1), & x \geq \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 4 + 2x, & x < \frac{1}{2} \\ 6 - 2x, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

4. 隐函数

定义 由二元方程式 $F(x, y) = 0$ 所确定的 y 和 x 的函数关系称为隐函数, 其中因变量 y 不一定能用自变量 x 直接表示出来.

例如: 由方程 $xe^y - y + 1 = 0$ 所确定的 y 和 x 的函数关系, 就不能写成 $y = f(x)$ (显函数) 的形式, 因而称其为隐函数.

1.2.2 函数的基本性质

1. 单调性

定义 设函数 $y = f(x)$ 在某区间内有定义, 如果对该区间内任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) \leq f(x_2)$), 则称函数 $f(x)$ 在该区间内严格单调增加 (或单调增加). 反之, 如果对某区间内任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) > f(x_2)$ (或 $f(x_1) \geq f(x_2)$), 则称函数 $f(x)$ 在该区间内严格单调减少 (或单调减少). 如果 $f(x)$ 在 D_f 上单调增加, 则称 $f(x)$ 为单调增加函数 (或单调增函数); 如果 $f(x)$ 在 D_f 上单调减少, 则称 $f(x)$ 为单调减少函数 (或单调减函数). 单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数.