

高等院校数学立体化教材

微积分学习题册

(与《一元分析学》《多元分析学》配套)

黄永忠 韩志斌 雷冬霞 李楚进 杨美华 编

Weijifenxue Xitice

线上、线下作业训练



华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

微积分学习题册

(与《一元分析学》《多元分析学》配套)

黄永忠 韩志斌 雷冬霞 编
李楚进 杨美华

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习题册:与《一元分析学》《多元分析学》配套/黄永忠等编. —武汉:华中科技大学出版社,2019.9
ISBN 978-7-5680-5496-6

I. ①微… II. ①黄… III. ①微积分-高等学校-习题集 IV. ①O172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 170752 号

微积分学习题册

Weijifenxue Xitice

黄永忠等 编

策划编辑:周芬娜

责任编辑:周芬娜

封面设计:原色设计

责任校对:刘 竣

责任监印:徐 露

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉) 电话:(027)81321913

武汉市东湖新技术开发区华工科技园 邮编:430223

录 排:华中科技大学惠友文印中心

印 刷:武汉科源印刷设计有限公司

开 本:787mm×1092mm 1/16

印 张:10.25

字 数:357千字(含学习平台91千字)

版 次:2019年9月第1版第1次印刷

定 价:35.00元



本书若有印装质量问题,请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线:400-6679-118 竭诚为您服务
版权所有 侵权必究

线上作业及资源网的使用说明

建议学员在 PC 端完成注册、登录、完善个人信息及学习码验证的操作。

PC 端学员学习码验证操作步骤：

1. 登录

(1) 登录网址 <http://dzdq.hustp.com>, 完成注册后点击登录。输入账号密码(学员自设)后, 提示登录成功。

(2) 完善个人信息(姓名、学号、班级、学院、任课老师等信息请如实填写, 因线上作业计入平时成绩), 将个人信息补充完整后, 点击保存即可完成注册登录。

2. 学习码验证

(1) 刮开封面上的学习码的防伪涂层, 可以看到一串学习码。

(2) 在个人中心页点击“学习码验证”, 输入封面上刮开的学习码, 点击提交, 即可验证成功, 选择所在的班级。点击学习码验证-已激活学习码, 即可查看刚才激活的课程学习码。

3. 查看课程

点击我的资源-我的课程, 即可看到新激活的课程, 点击课程, 进入课程详情页, 下拉即可看到该课程的一些课程资源。

4. 做题测试

进入课程详情页后, 点开习题, 选择具体章节习题, 进入习题页, 开始做题。做完之后点击我要交卷, 该章习题就完成答题。随后学员即可看到本次答题的分数统计。

手机端学员扫码操作步骤：

1. 手机扫二维码, 提示登录; 新用户先注册, 然后再登录。

2. 登录之后, 按页面要求完善个人信息。

3. 按要求输入封面上刮开的一串学习码。

4. 学习码验证成功后, 选择所在的班级, 即可看到该二维码对应的章节习题, 开始做题。

5. 答题完毕后提交即可看到本次答题的分数统计。

课程作业分为线上作业和线下作业, 线上作业主要是客观题, 线下作业主要是主观题。任课老师会根据学员线上作业和线下作业情况给出平时分数。

若在操作上遇到什么问题可咨询: 陈老师, QQ, 514009164; 周老师, QQ, 1811682975。

上 册

(一元分析学)

第1章 实数集与函数



复习题



习题答案

习题(实数集与函数)

1. 判断题

- (1) 对非空数集 E , 若 $\sup E = \inf E$, 则数集 E 只包含一个有限数. ()
- (2) 有限开区间必存在上确界和下确界. ()
- (3) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ 与 $g(x) = x + 2$ 是同一个函数. ()
- (4) 开区间上的严格单调函数是有界函数. ()
- (5) 若 $f(x) = \operatorname{sgn} x$, 则 $f \circ f \circ f = f$. ()
- (6) 若函数于 $[a, b]$ 上有定义, 则必于其上上有界. ()
- (7) 任何周期函数必有最小周期. ()

2. 填空题

- (1) 设 $E = \{x - [x] : x \in \mathbf{R}\}$, 则 $\sup E =$ _____, $\inf E =$ _____.
- (2) $f(x) = \lg(1 - \lg x)$ 的定义域是 _____, 值域是 _____.
- (3) 若 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数, 且在闭区间 $[0, 2]$ 上 $f(x) = 2x - x^2$, 则在闭区间 $[2, 4]$ 上 $f(x) =$ _____.
- (4) 若 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x + 1, & x \geq 0, \end{cases}$ 则 $f(x + 1) =$ _____.
- (5) 若 $f(x) = \sqrt{1 - x^2} (-1 \leq x \leq 0)$, 则其反函数 $g(x) =$ _____.

3. 求下列数集的上确界, 并依定义加以证明:

- (1) $E = \{y : y = 1 - x^2, x \text{ 为有理数}\};$

$$(2) E = \left\{ \frac{m}{n} : m < n, m, n \in \mathbf{N}_+ \right\}.$$

4. 检验 $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 的奇偶性 ($a > 0, a \neq 1$).

5. 设 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是偶函数, 其图像关于直线 $x = 1$ 对称, 且对 $\forall x, y \in [0, 1/2]$ 均有 $f(x+y) = f(x)f(y)$.

(1) 设 $f(1) = 2$, 求 $f(1/2)$ 与 $f(1/4)$;

(2) 证明 $f(x)$ 是周期函数.

7. $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} g(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & |x| \leq 1, \\ 2, & |x| > 1, \end{cases}$ 求 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$.

8. 某化肥厂生产某产品 1000 吨, 定价为每吨 130 元, 订购量在 700 吨以内按定价核算, 超过 700 吨的部分按定价的 9 折核算, 求订购量 x 与订购金额 y 的函数关系.

9. 设 $A, B \subset \mathbf{R}$ 是非空有界数集, M 为正常数. 如果 $\forall a \in A, \forall b \in B$, 有 $|a - b| < M$, 证明:
 $|\sup A - \sup B| \leqslant M, |\inf A - \inf B| \leqslant M$.

10. 设 E 为非空有界数集, 定义 $E^- = \{x: -x \in E\}$, 证明:
(1) $\inf E^- = -\sup E$; (2) $\sup E^- = -\inf E$.

第2章 极 限



复习题



习题答案

习题 2.1 (数列的极限)

1. 下列表达式可否作为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 的定义, 认为可以的在括号内打“√”, 否则打“×”.

(1) $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, \text{有 } |x_n - A| < c\epsilon (c \text{ 为正常数}).$ ()

(2) $\forall \epsilon \in (0, 1), \exists N, \forall n > N, \text{有 } |x_n - A| \leq \epsilon.$ ()

(3) $\forall k (k \text{ 为正整数}), \exists N, \forall n > N, \text{有 } |x_n - A| < 1/k.$ ()

(4) $\forall N, \exists \epsilon > 0, \forall n > N, \text{有 } |x_n - A| < \epsilon.$ ()

(5) $\exists N, \forall \epsilon > 0, \forall n > N, \text{有 } |x_n - A| < \epsilon.$ ()

2. 依据极限定义证明下列极限:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} = 1 (a \neq 0);$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n}{2n^2 - 1} = \frac{3}{2}.$

3. 求下列数列极限:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{2012} + 2019^n};$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n};$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}};$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[na_n]}{n}, \text{ 其中 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a;$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k}.$$

4. 利用极限存在准则, 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

$$(1) x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}} (n = 2, 3, \cdots), x_1 = 1;$$

$$(2) \begin{cases} x_{2n} = \frac{x_{2n-1} + 2x_{2n-2}}{3}, \\ x_{2n+1} = \frac{2x_{2n} + x_{2n-1}}{3}, \end{cases} \quad x_0 = a, x_1 = b (b > a);$$

(3) 设 $0 \leq x_{n+1} \leq x_n + \frac{1}{n^p}$ ($p > 1, n \in \mathbf{N}_+$). 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

5. 设 $a_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

6. 求下列数列极限:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$.

7. 设 $a < b, x_0 = a, x_1 = b$ 及 $x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$ ($n = 2, 3, \dots$), 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{a+2b}{3}$.

8. 设 $x_1 = 4, x_n = \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{x_{n-1}}{2}, n = 2, 3, \dots$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

9. 设 $a_1 = 1, a_2 = 2$, 当 $n \geq 3$ 时, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, 证明:

$$(1) \frac{3}{2}a_{n-1} \leq a_n \leq 2a_{n-1}; (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

10. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n-1}) = 0$, 若极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = A$ (有限), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. (提示: 令

$b_n = a_n - a_{n-1}$, 则 $a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, 考虑 $a_n - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ 的极限.)

习题 2.2(函数的极限)

1. 用定义证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} = 0;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 0;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$$

2. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{a} \left[\frac{b}{x} \right] (a > 0, b > 0);$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{3 - \sec x}.$$

3. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$, 求常数 a, b .

4. 若 $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ \frac{\sqrt{1+x}-1}{ax}, & x < 0 \end{cases}$ ($a \neq 0$), 问极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 是否存在? 若存在, 求出其值.

5. 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ($a \geq 0$), 证明 $\lim_{x \rightarrow \sqrt{a}} f(x^2) = A$.

习题 2.3(无穷小量与无穷大量)

1. 填空题(在“_____”内填入“高阶”“低阶”“同阶”或“等价”等词. 当 $x \rightarrow 0$ 时)

(1) $x^2 + \sin x$ 是 x 的_____无穷小;

(2) $\sin x^2$ 是 x 的_____无穷小;

(3) $\frac{1 - \cos^2 x}{2}$ 是 x 的_____无穷小;

(4) $(1+x)^{1/3} - 1$ 是 $(1+x)^3 - 1$ 的_____无穷小;

(5) $\sin \sqrt{x} + x^{2/3}$ 是 x 的_____无穷小 ($x \rightarrow 0^+$ 时).

2. 求下列无穷小量的主部以及关于 x 的阶数:

(1) $\sqrt{x} - \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ ($x \rightarrow 0^+$);

(2) $x^n - 1$ ($x \rightarrow 1$);

(3) $1 - 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($x \rightarrow 0$);

(4) $\sqrt[3]{\cos x} - 1$ ($x \rightarrow 0$).

3. 求 c 和 k , 使得 $\sqrt{1 - x \ln(x+1)} - \sqrt{\cos x} \sim cx^k$ ($x \rightarrow 0$).

4. 求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin \frac{1}{x}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$;

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin 2x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 2x}{\sqrt{1+x}-1};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x}.$$

5. 计算:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\sqrt{n^2+1}\pi);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n} + c^{1/n}}{3} \right)^n, \text{ 其中 } a > 0, b > 0, c > 0.$$

6. 已知 $f(x)$ 在某 $U^\circ(0)$ 内有界, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^{3x^2}-1} = 2$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

7. 证明: $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界, 但当 $x \rightarrow 0^+$ 时, y 不是无穷大.