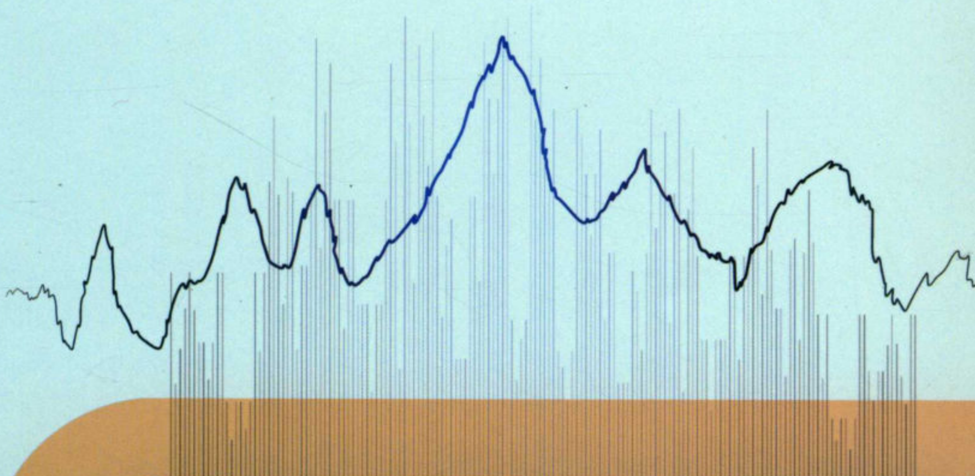
全国高等农林院校“十三五”规划教材



应用数学

YINGYONG SHUXUE

郝新生 / 主编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十三五”规划教材

应 用 数 学

郝新生 主编

中 国 农 业 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

应用数学／郝新生主编．—北京：中国农业出版社，2017.6
全国高等农林院校“十三五”规划教材
ISBN 978-7-109-17737-6

Ⅰ.①应… Ⅱ.①郝… Ⅲ.①应用数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O29

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第091396号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区麦子店街18号楼）
（邮政编码 100125）
策划编辑 魏明龙
文字编辑 魏明龙

北京万友印刷有限公司印刷 新华书店北京发行所发行
2017年6月第1版 2017年6月北京第1次印刷

开本：787mm×1092mm 1/16 印张：14.25
字数：340千字
定价：28.00元

内 容 简 介

本教材是按照“高等数学课程教学基本要求”，并结合多年的教学实践经验编写而成的．全书内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数的微分学、二重积分、无穷级数、常微分方程与差分方程．每章均配有习题和总复习题，书末附有各章习题和总复习题的参考答案．

本教材可作为普通高等院校经济管理类专业的高等数学课程教材，也可作为相关专业的教学参考书．

编审人员名单

主　编　郝新生

副主编　韩忠海　王福贵　宋　彦

参　编　刘慧璋　杨录胜　杜建慧

主　审　崔克俭

前　言

高等数学是高等农业院校经济管理专业的一门极其重要的基础课，是许多后继课程的基础，在培养具有良好素质的经济管理人才方面起着非常重要的作用．目前，关于高等数学的教材，种类很多，但专门针对经济管理类专业的教材相对较少，而且普遍难度较大，对于部分由文科考入该专业的学生来说，学习起来颇感吃力．为此我们针对专业特点和学生的具体情况精心编写了这本比较通俗的高等数学教材．

本教材的编写紧紧围绕经济管理类专业特点和教学基本要求，突出“淡化理论证明，加强实践应用”的宗旨，内容安排按照循序渐进、由浅入深的原则，文字叙述简洁明了、逻辑清晰，并尽可能通过实际背景引入数学概念，以便于加深学生对内容的理解和掌握；在例题和习题的选择上力求难易适中、繁简适度，突出题型的多样性和典型性，每章均配有一个总复习题，这对提高学生的综合解题能力和实际应用能力将发挥重要作用．

参加本教材编写的作者都是多年从事高等数学教学的一线教师，具有较高的理论水平和丰富的教学经验．本教材编写具体分工如下：山西农业大学郝新生负责全书的统稿工作，并编写了第一章和第二章；韩忠海负责编写第七章和第八章；王福贵负责编写第四章，并负责全书的排版和部分图形的绘制；刘慧璋负责编写第十章和第六章的第一节到第五节；杨录胜负责编写第九章和第六章的第六节；山西农业大学信息学院的宋彦和杜建慧分别编写了第三章和第五章．

本教材的编写得到了山西农业大学数学系全体教师的鼎力相助，特别是崔克俭教授担任了本书的主审并提出许多宝贵的建议，在此对各位老师的辛勤付出表示衷心的感谢．由于编者的水平有限，因此在本教材中难免会出现一些缺点和不足，敬请各位读者批评指正．

编　者

2016 年 7 月 8 日

目　　录

前言

第一章　函数 …… 1

第一节　函数的概念 …… 1
一、函数的定义 …… 1
二、函数的四种特性 …… 2
习题 1－1 …… 3
第二节　初等函数 …… 4
一、反函数 …… 4
二、复合函数 …… 4
三、初等函数 …… 5
习题 1－2 …… 5
总复习题一 …… 5

第二章　极限与连续 …… 8

第一节　数列极限 …… 8
一、数列极限的定义 …… 8
二、收敛数列的性质 …… 9
习题 2－1 …… 9
第二节　数列极限的运算法则与存在准则 …… 10
一、数列极限的四则运算法则 …… 10
二、数列极限的两个存在准则 …… 11
习题 2－2 …… 13
第三节　函数极限 …… 14
一、函数极限的定义 …… 14
二、函数极限的性质 …… 15
三、函数极限的四则运算法则 …… 15
四、复合函数的极限 …… 16
习题 2－3 …… 17
第四节　两个重要极限 …… 17
一、函数极限的迫敛性定理 …… 17
二、重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ …… 18

三、重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ …… 19
习题 2-4 …… 20
第五节 无穷小量与无穷大量 …… 21
一、无穷小量的定义与性质 …… 21
二、无穷小量的比较 …… 21
三、无穷大量 …… 22
习题 2-5 …… 23
第六节 函数的连续性 …… 23
一、函数连续的概念 …… 23
二、函数的间断 …… 24
三、初等函数的连续性 …… 25
四、闭区间上连续函数的性质 …… 25
习题 2-6 …… 26
总复习题二 …… 26
第三章 导数与微分 …… 30
第一节 导数的概念 …… 30
一、直观背景 …… 30
二、导数的定义 …… 31
三、导数的几何意义 …… 33
四、函数可导性和连续性的关系 …… 34
习题 3-1 …… 35
第二节 求导法则 …… 36
一、导数的四则运算 …… 36
二、反函数的求导法则 …… 37
三、复合函数的求导法则 …… 38
四、隐函数的求导法则 …… 39
五、由参数方程所确定的函数的导数 …… 40
习题 3-2 …… 41
第三节 高阶导数 …… 42
一、高阶导数的概念 …… 42
二、高阶导数的求导法则 …… 44
习题 3-3 …… 45
第四节 函数的微分 …… 45
一、微分的概念 …… 45
二、微分基本公式与运算法则 …… 47
三、微分在近似计算中的应用 …… 48
习题 3-4 …… 48
总复习题三 …… 49

第四章　微分中值定理与导数的应用 ······ 51
第一节　微分中值定理 ······ 51
一、罗尔(Rolle)中值定理 ······ 51
二、拉格朗日(Lagrange)中值定理 ······ 52
三、柯西(Cauchy)中值定理 ······ 54
习题 4－1 ······ 55
第二节　洛必达法则 ······ 55
一、$\frac{0}{0}$型未定式的洛必达法则 ······ 56
二、$\frac{\infty}{\infty}$型未定式的洛必达法则 ······ 58
三、其他类型未定式的计算 ······ 58
习题 4－2 ······ 59
第三节　函数单调性的判别 ······ 59
习题 4－3 ······ 61
第四节　函数的极值与最值 ······ 61
一、函数的极值 ······ 61
二、函数的最大值与最小值 ······ 64
习题 4－4 ······ 66
第五节　曲线的凹凸性、拐点与渐近线 ······ 66
一、曲线的凹凸性与拐点 ······ 66
二、曲线的渐近线 ······ 68
习题 4－5 ······ 69
第六节　函数图形的描绘 ······ 70
习题 4－6 ······ 71
第七节　导数在经济中的应用 ······ 72
一、边际分析 ······ 72
二、弹性分析 ······ 73
习题 4－7 ······ 74
总复习题四 ······ 74

第五章　不定积分 ······ 78
第一节　不定积分的概念与性质 ······ 78
一、原函数与不定积分的概念 ······ 78
二、基本积分表 ······ 80
三、不定积分的性质 ······ 80
习题 5－1 ······ 81
第二节　换元积分法 ······ 82
一、第一类换元积分法(凑微分法) ······ 82
二、第二类换元积分法 ······ 85

习题 5-2 …… 86
第三节 分部积分法 …… 87
习题 5-3 …… 90
第四节 有理函数的积分 …… 90
一、有理函数的积分 …… 90
二、可化为有理函数的积分 …… 92
习题 5-4 …… 93
总复习题五 …… 94

第六章 定积分及其应用 …… 96

第一节 定积分的概念与性质 …… 96
一、引例：曲边梯形的面积 …… 96
二、定积分的定义 …… 96
三、定积分的性质 …… 98
习题 6-1 …… 100
第二节 微积分的基本公式 …… 100
一、积分变上限函数 …… 100
二、牛顿—莱布尼茨公式 …… 102
习题 6-2 …… 103
第三节 定积分的换元积分法和分部积分法 …… 103
一、定积分的换元积分法 …… 103
二、定积分的分部积分法 …… 104
三、几类特殊函数的积分公式和积分技巧 …… 105
习题 6-3 …… 107
第四节 广义积分 …… 108
一、无穷区间广义积分 …… 108
二、无界函数的广义积分 …… 109
习题 6-4 …… 110
第五节 定积分的应用 …… 111
一、元素法 …… 111
二、平面图形的面积 …… 111
三、旋转体的体积 …… 114
四、平面曲线的弧长 …… 115
习题 6-5 …… 117
总复习题六 …… 118

第七章 多元函数微分学及其应用 …… 120

第一节 二元函数的极限与连续 …… 120
一、平面点集与区域 …… 120
二、二元函数的概念 …… 121
三、二元函数的极限 …… 122

四、二元函数的连续性 …… 123
习题 7－1 …… 123
第二节　偏导数与全微分 …… 124
一、偏导数的定义及其计算 …… 124
二、高阶偏导数 …… 125
三、全微分 …… 126
四、全微分在近似计算中的应用 …… 129
习题 7－2 …… 129
第三节　多元复合函数求导法则 …… 129
一、多元复合函数的求导法则 …… 130
二、全微分的形式不变性 …… 131
习题 7－3 …… 132
第四节　隐函数求导法则 …… 132
一、由方程 $F(x, y)=0$ 所确定的隐函数 …… 132
二、由方程 $F(x, y, z)=0$ 所确定的隐函数 …… 133
习题 7－4 …… 135
第五节　二元函数的极值及其应用 …… 135
一、二元函数的极值概念与求法 …… 135
二、条件极值 …… 136
习题 7－5 …… 138
总复习题七 …… 138

第八章　二重积分 …… 141

第一节　二重积分的定义及其性质 …… 141
一、二重积分的定义 …… 141
二、二重积分的性质 …… 142
习题 8－1 …… 144
第二节　二重积分的计算及其应用 …… 144
一、直角坐标系下的二重积分 …… 144
二、极坐标系下二重积分的计算 …… 148
习题 8－2 …… 151
总复习题八 …… 152

第九章　无穷级数 …… 155

第一节　常数项级数 …… 155
一、常数项级数的概念 …… 155
二、常数项级数的基本性质 …… 157
习题 9－1 …… 157
第二节　数项级数的收敛性判别法 …… 158
一、正项级数收敛性判别法 …… 158
二、交错级数及其收敛性判别法 …… 161

三、任意项级数及其收敛性 …… 162
习题 9－2 …… 163
第三节 幂级数 …… 164
一、函数项级数的一般概念 …… 164
二、幂级数及其收敛域 …… 164
三、幂级数的运算 …… 167
习题 9－3 …… 168
第四节 泰勒级数和泰勒公式 …… 168
一、泰勒公式 …… 168
二、泰勒级数 …… 171
习题 9－4 …… 173
总复习题九 …… 173

第十章 常微分方程与差分方程 …… 176

第一节 微分方程的基本概念 …… 176
一、引例 …… 176
二、相关概念 …… 177
习题 10－1 …… 178
第二节 一阶微分方程 …… 178
一、可分离变量的微分方程 …… 178
二、能化为可分离变量方程的微分方程 …… 179
三、一阶线性微分方程 …… 181
习题 10－2 …… 184
第三节 可降阶的高阶微分方程 …… 184
一、$y^{(n)}=f(x)$型的微分方程 …… 184
二、$y''=f(x, y')$型的微分方程 …… 185
三、$y''=f(y, y')$型的微分方程 …… 186
习题 10－3 …… 187
第四节 二阶常系数线性微分方程 …… 187
一、二阶常系数齐次线性微分方程 …… 187
二、二阶常系数非齐次线性微分方程 …… 189
习题 10－4 …… 191
第五节 差分方程简介 …… 191
一、基本概念 …… 191
二、一阶和二阶常系数线性差分方程 …… 192
习题 10－5 …… 196
总复习题十 …… 196

习题参考答案 …… 198

参考文献 …… 215

第一章 函 数

高等数学是以变量为研究对象的，而反映变量之间的相互依赖关系的就是函数，高等数学中的各种理论和运算都是建立在函数基础之上的．本章将介绍函数的基本概念，包括函数的定义、特性、反函数、复合函数以及初等函数等．

第一节 函数的概念

一、函数的定义

定义 1.1.1 设 D 和 E 为两个数集，如果对于 D 中的每个数 x，按照某种对应法则，在 E 中存在唯一实数 y 与之对应，则称 y 为 x 的**函数**，记为 $y=f(x)$，其中 D 称为函数的**定义域**，函数值 $f(x)$的全体构成的集合称为函数的**值域**，记为 $f(D)$，即

$$f(D)=\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}.$$

例 1 函数 $y=\sqrt{x}$的定义域为$[0, +\infty)$，值域也是$[0, +\infty)$，它的图形如图 1－1 所示．

例 2 函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$ 称为绝对值函数，其定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$[0, +\infty)$，它的图形如图 1－2 所示．

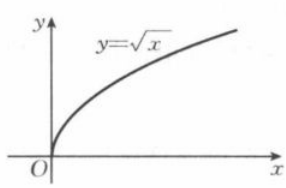


图 1－1

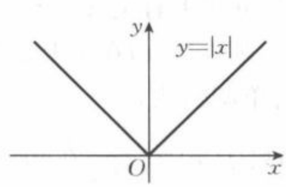


图 1－2

例 3 函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} -1, & x<0, \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$，称为符号函数，其定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$\{-1, 0, 1\}$，它的图形如图 1－3 所示．

例 4 函数 $y=[x]$称为 x 的取整函数，其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数，其定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为全体整数，它的图形如图 1－4 所示．

例 5 函数 $y=\mathrm{D}(x)=\begin{cases} 1, & x\in \mathbf{Q}(\text{有理数}), \\ 0, & x\in \bar{\mathbf{Q}}(\text{无理数}) \end{cases}$ 称为狄利克雷(Dirichlet)函数，其定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$\{0, 1\}$.

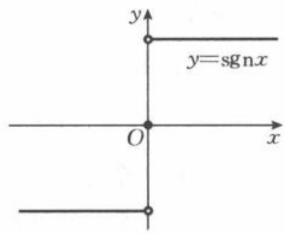


图 1-3

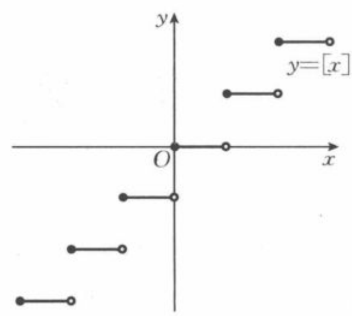


图 1-4

二、函数的四种特性

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，G 为一正常数．如果对于 I 中的每个 x，都有 $|f(x)|<G$，则称 $f(x)$在区间 I 上有界．进一步，如果存在实数 M、m，使得对于 I 中的每个 x，都有 $m<f(x)<M$，则分别称 M 和 m 为 $f(x)$在区间 I 上的上界和下界．另外，如果对于任意的正实数 K，在 I 中都至少存在一点 x_0，使得 $|f(x_0)|>K$，则称 $f(x)$在 I 上是无界函数．

例如，函数 $y=x^2+1$ 在$[-1, 2]$上是有界函数，而在$[0, +\infty)$上就是无界函数；$y=\sin x$ 在其定义域内的任何区间上都是有界函数；对于任何正数 a，$y=\dfrac{1}{x}$在$(0, a)$上都是无界函数．

2. 单调性

设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义，若对任意的 x_1，$x_2\in I$，$x_1<x_2$，都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称 $f(x)$在 I 上是单调递增函数(或单调递减函数)．单调递增函数和单调递减函数统称为单调函数．

例 6 证明：函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$在$[0, +\infty)$上是单调递增函数．

证 记 x_1、x_2 为$[0, +\infty)$内的任意两点，且 $x_1<x_2$，

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+x_1}-\frac{x_2}{1+x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1+x_1)(1+x_2)}<0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，因此 $f(x)$在$[0, +\infty)$上是单调递增函数．

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$在区间$(-l, l)(l>0)$上有定义，若对任意的 $x\in(-l, l)$，都有 $f(x)=f(-x)$（或 $f(x)=-f(-x)$），则称 $f(x)$在$(-l, l)$上是偶函数(或奇函数)．

例 7 考查函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$在$(-\infty, +\infty)$上的奇偶性．

解 任取 $x\in(-\infty, +\infty)$，由于

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

因此 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$在$(-\infty,\ +\infty)$上是奇函数．

例 8 证明定义在$(-l,\ l)(l>0)$上的任何一个函数 $f(x)$均可表示成一个奇函数和一个偶函数之和．

证 记
$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\ h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

显然有 $g(x)$在$(-l,\ l)$上为偶函数，$h(x)$在$(-l,\ l)$上为奇函数，而 $f(x)=g(x)+h(x)$，故结论成立．

4. 周期性

设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义，T 为非零正常数．若对任意的 $x\in I$，都有 $x+T\in I$ 且 $f(x)=f(x+T)$，则称 $f(x)$为周期函数，T 称为 $f(x)$的周期．由定义可知，若 T 为 $f(x)$的周期，则 $nT(n\in\mathbf{Z})$也一定是 $f(x)$的周期．通常我们所说的周期是指最小正周期，但并不是每个周期函数都存在最小正周期．例如，前面提到过的狄利克雷函数 $\mathrm{D}(x)$，容易证明 $\mathrm{D}(x)$就是一个周期函数，且任意的正有理数均为 $\mathrm{D}(x)$的周期，但由于不存在最小的正有理数，故 $\mathrm{D}(x)$就不存在最小正周期．

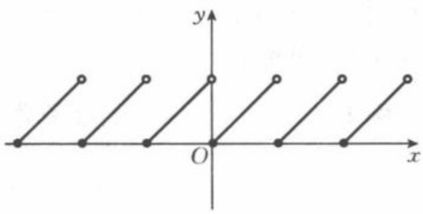


图 1－5

例 9 证明小数函数 $r(x)=x-[x]$为周期函数，如图 1－5 所示，其中$[x]$为 x 的取整函数．

证 由于
$$r(x+1)=x+1-[x+1]=x+1-([x]+1)=x-[x]=r(x),$$
因此 $r(x)$就是以 1 为周期的周期函数．

习　题　1－1

1. 下列各对函数是否相同？

(1) $f(x)=\ln x^2$ 和 $g(x)=2\ln x$；　(2) $f(x)=|x|$ 和 $g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sin x^2$ 和 $g(t)=\sin t^2$；　(4) $f(x)=x+1$ 和 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x+1}$；　(2) $y=\dfrac{1}{\ln(x+2)}+\arctan\dfrac{1}{x-1}$；

(3) $y=\sqrt{\dfrac{x}{\sin x}}$；　(4) $y=\dfrac{x}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}$.

3. 下列函数哪些在给定的区间上是有界的？

(1) $y=\dfrac{x}{1+x^2}(x\in\mathbf{R})$；　(2) $y=\dfrac{1}{x-1}(x\in(1,\ +\infty))$.

4. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$；　(2) $y=\cos(\sin x)+\sin(\cos x)$；

(3) $y=\frac{1}{1+a^x}-\frac{1}{2}$.

第二节 初等函数

一、反函数

在一些具体问题中，函数 $y=f(x)$中自变量 x 与因变量 y 的关系也不是固定不变的，有时候我们不仅要了解 y 随 x 变化的情况，同时也要了解 x 随 y 变化的情况．例如，在经济学中，既要研究产量 Q 随价格 P 变化的状况，也要研究价格 P 受产量 Q 变化的影响．为此我们引入反函数的概念．

定义 1.2.1 设 $y=f(x)$是定义在 D 上的函数，其值域为 $f(D)$，如果对于 $f(D)$中的每个 y，在 D 中都有唯一的 x 满足 $y=f(x)$，则称由这种对应关系确定的函数为 $y=f(x)$的**反函数**，记为 $x=f^{-1}(y)$，这里 y 为自变量，x 为因变量．由于通常习惯于将 x 作为自变量，故将 $y=f(x)$的反函数写成 $y=f^{-1}(x)$的形式．本来函数 $y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$表示的图像是相同的，但在 $x=f^{-1}(y)$中将 x 与 y 对换后，使得 $y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的图像是关于直线 $y=x$ 对称的．

例 1 求 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$的反函数．

解 由 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，可得$(e^x)^2-2ye^x-1=0$，则

$$e^x=\frac{2y+\sqrt{4(1+y^2)}}{2}=y+\sqrt{1+y^2},$$

即

$$x=\ln(y+\sqrt{1+y^2}),$$

由此可得，所求的反函数为

$$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2}).$$

二、复合函数

复合是一种常见的函数运算形式，是表示函数的重要手段，由几个函数通过复合形成的函数就是复合函数．

定义 1.2.2 设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$的值域为 D_2，如果 $D_1\cup D_2\neq\varnothing$，则称 $y=f(\varphi(x))$为由 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$所构成的**复合函数**，其中 f 称为**外函数**，φ 称为**内函数**，x 为**自变量**，y 为**因变量**，u 为**中间变量**．例如，$y=\sin x^2$ 就是由 $y=\sin u$ 和 $u=x^2$ 复合而成的复合函数．

特别强调，只有当 $D_1\cup D_2\neq\varnothing$时，$f$ 和φ 才能进行复合，否则就不能复合．例如，$y=\sqrt{u}$和 $u=\sin x-2$ 就不能进行复合，这是由于外函数的定义域$[0,+\infty)$和内函数的值域$[-3,-1]$不相交造成的．

例 2 设函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$，求 $f(f(x))$，$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$.

解 $f(f(x))=\frac{1}{1+f(x)}=\frac{1}{1+\frac{1}{x+1}}=\frac{x+1}{x+2}$,

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{f(x)}}=\frac{1}{1+x+1}=\frac{1}{x+2}.$$

例 3 问函数 $y=2^{\sin^2\frac{1}{x}}$ 是由哪些函数复合而成的?

解 函数 $y=2^{\sin^2\frac{1}{x}}$ 可看作是由以下 4 个函数复合而成的：$y=2^u$，$u=v^2$，$v=\sin\omega$，$\omega=\frac{1}{x}$.

三、初等函数

我们在中学数学已经系统学习过以下几类函数：

(1) 幂函数：$y=x^\mu$($\mu\in\mathbf{R}$ 为常数).

(2) 指数函数：$y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq1$).

(3) 对数函数：$y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq1$)，当 $a=\mathrm{e}$ 时，该函数记为 $y=\ln x$.

(4) 三角函数：包括 6 个函数，即 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

(5) 反三角函数：包括 3 个函数，即 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$.

以上这五类函数统称为基本初等函数.

由常数与基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算所形成的函数，称为初等函数. 按此定义，我们在前面介绍过的符号函数、取整函数以及狄利克雷函数均不是初等函数. 本书中所研究的函数大多数都属于初等函数.

习　题　1-2

1. 求下列函数的反函数：

(1) $y=x^3-1$；　(2) $y=\frac{x}{1+x}$；

(3) $y=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}(x\geqslant0)$；　(4) $y=-1+\ln(x-1)$.

2. 指出下列函数是由哪些函数复合而成的?

(1) $y=\sin^2(\ln x)$；　(2) $y=\lg(\cos x^2)$；

(3) $y=\sin^2(\cos^2(\tan\sqrt{x}))$；　(4) $y=|x|$；

(5) $y=\mathrm{e}^{\sin^2(\cos x)}$；　(6) $y=x^x(x>0)$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant0,\\ 2+x, & x>0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant0,\\ -x, & x>0,\end{cases}$ 求 $f(f(x))$，$f(g(x))$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0,\\ 1+x, & x\geqslant0,\end{cases}$ 求 $f(x-1)$，$f(x+1)$.

总 复 习 题 一

1. 选择题

(1) 下列各组函数中是相同函数的有(　　).

(A) $f(x)=x$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$；　(B) $f(x)=|x|$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；