"十三五"普通高等教育规划教材

高等数学

陈琳珏　赵裕亮　曹万昌　王晓华　编

（上册）

GAODENG SHUXUE

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

“十三五”普通高等教育规划教材

高等数学

陈琳珏　赵裕亮　曹万昌　王晓华　编
孙淑兰　主审

（上册）

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书为“十三五”普通高等教育规划教材。全书共五章，内容为函数与极限，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用。为增加学生的学习兴趣，本书还增设了数学拾零和考研真题。书中带“*”部分为选学内容。本书后附有基本初等函数的图形及其主要性质，三角函数公式总结，积分表，MATLAB简介，MATLAB的函数及指令索引，数学实验，习题答案与提示等内容。本书结构严谨合理，条理清晰明了，论证简明透彻，习题难易适中，便于教学和读者自学。

本书可供高等院校经济类、管理类、医学类专业学生学习高等数学课程使用，也可供理工类少学时专业的学生选用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．上册/陈琳珏等编．—北京：中国电力出版社，2019.6
“十三五”普通高等教育规划教材
ISBN 978-7-5198-3449-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2019）第146611号

出版发行：中国电力出版社
地　　址：北京市东城区北京站西街19号（邮政编码100005）
网　　址：http://www.cepp.sgcc.com.cn
责任编辑：张　旻（010-63412536）
责任校对：黄　蓓　王海南
装帧设计：赵姗姗
责任印制：吴　迪

印　　刷：北京天宇星印刷厂
版　　次：2019年6月第一版
印　　次：2019年6月北京第一次印刷
开　　本：787毫米×1092毫米　16开本
印　　张：15.5
字　　数：376
定　　价：45.00元

前　言

根据素质教育的具体要求，为适应教学改革后的专业及课程调整的新情况，我们参照理工类和经济类高等学校“高等数学”课程的教学基本要求编写本书。

本书是作者在多年的教学经验和实践积累基础上编写的。编者注意吸收国内外教材中好的方面，对基本概念、性质和定理从叙述、证明到推广均注意了科学性和严谨性。同时为了培养学生的创新意识、掌握运用数学工具解决实际问题的能力，本书力求基础知识清晰明了，文字通俗易懂，例题与习题难易适中，内容由浅入深，以便读者阅读。

就内容上看，本教材不但包含了传统的高等数学教材的内容，而且还增加了一些特色内容。

(1) 每章均附有数学拾零，可以增加学生学习的兴趣，提高学生对数学史、数学家及数学思想的认识与了解。

(2) 每章总复习题后均增加了考研真题，可以使学生提前对考研试题有个基本的了解。

(3) 教材还附有数学实验，以提高学生解决实际问题的能力。

(4) 由于各专业对高等数学内容的要求有所不同，所以教材中还有部分内容带了“*”号，可供有需要的专业进行选讲。

本书是佳木斯大学组织编写的大学数学系列教材之一，第一章、第四章由陈琳珏编写；第二章及习题答案由王晓华编写；第三章及数学实验由赵裕亮编写；第五章及附录由曹万昌编写；全书由孙淑兰主审。

本书在编写过程中，得到了许多同行的宝贵意见和建议，在此一并表示感谢。

限于编者的水平与经验，书中疏漏和不妥之处在所难免，恳请使用本书的师生和广大读者批评指正。

编　者

2019 年 6 月

目　录

第一章　函 数 与 极 限

高等数学课程的主要内容是微积分学及其应用，微积分学的研究对象是函数，研究桥梁是连续，极限是重要的研究方法之一．因此极限是微积分学的基础，也是最主要的推理方法．作为讨论微积分的准备，本章将介绍函数、极限和连续性等基本概念以及它们的一些性质．

第一节　函　　数

一、集合

1. 集合

集合是数学中的一个基本概念，是数学各分支所研究的对象．一般地，我们把具有某种特定性质的对象组成的总体叫作集合，简称集．把组成某一集合的各个对象叫作这个集合的元素，简称元．例如，一间工厂里的工人构成一个集合，而每个工人都是这个集合的元素．

通常我们用大写英文字母 A,B,C 等表示集合，用小写英文字母 a,b,c 等表示集合中的元素．对象 a 是集合 M 的元素记作 $a \in M$（读作 a 属于 M）；对象 a 不是集合 M 的元素记作 $a \notin M$（读作 a 不属于 M）.

由有限个元素组成的集合称为有限集，由无穷多个元素组成的集合称为无限集．集合的表示方法通常有列举法和描述法两种．对于列举法，例如，由元素 a,b,c 组成的集合，可记作

$$M=\{a,b,c\}\ ;$$

对于描述法，设集合 A 是具有某种特性的元素 x 的全体组成的集合，则 A 可表示成

$$A=\{x \mid x\text{ 所具有的特性}\}.$$

注：本书用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合．如无特别声明，以后提到的数都是实数．

我们将自然数集记作 **N**，整数集记作 **Z**，有理数集记作 **Q**，实数集记作 **R**.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即“如果 $x \in A$，则必有 $x \in B$”，则称 A 是 B 的子集，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$；如果 $A \subset B$ 且 $B \supset A$，则称集合 A 与 B 相等，记作 $A=B$．不含任何元素的集合称为空集，记为 Φ，规定空集为任何集合的子集．

2. 区间

区间也是数集．设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$．我们称满足 $a<x<b$ 的实数 x 的集合为开区间，记作 (a,b)；称满足 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 x 的集合为闭区间，记作 $[a,b]$；称满足 $a<x \leqslant b$ 或 $a \leqslant x<b$ 的实数 x 的集合为半开区间，分别记作 $(a,b]$ 或 $[a,b)$．以上这些区间都称为有限区间．a,b 称为区间的端点．数 $b-a$ 称为这些区间的长度．在数轴上，区间的端点用空心的圆点表示时，表示该区间不包括端点；用实心圆点表示时，表示该区间包括端点（见图 1-1).

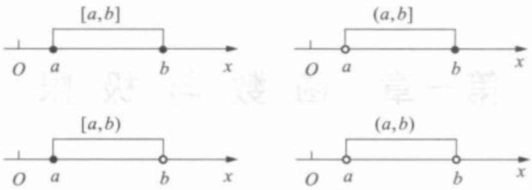

图 1-1

满足 $x \geqslant a(x > a)$ 的实数 x 的集合称为无限的半开区间（开区间），记为 $[a,+\infty)((a,+\infty))$；满足 $x \leqslant b(x < b)$ 的实数 x 的集合也称为无限的半开区间（开区间），记为 $(-\infty,b]((-\infty,b))$．在数轴上它们是长度为无限的半直线（见图 1-2）.

图 1-2

全体实数的集合记作 $(-\infty,+\infty)$，它也是无限区间．

注：$-\infty$，$+\infty$ 分别读作"负无穷大"与"正无穷大"，它们都不是确定的数，只是记号．

3. 邻域

对任意的正数 δ，开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域，简称为点 a 的邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径．

数集 $U(a,\delta)-\{a\}$（即点 a 的 δ 邻域去掉中心 a）称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

二、函数的概念

在观察某一现象的过程时，常常会遇到各种不同的量，我们所遇到的量，一般可分为两种：一种在过程中不起变化，即在过程中始终保持一定的数值，这种量我们称为常量；另一种在过程中是变化的，也就是可以取不同的数值，称为变量．

通常我们用字母 a,b,c 等表示常量，用字母 x,y,z,t 等表示变量．

在自然界中，某一现象中的各种变量之间通常并不都是独立变化的，它们之间存在着依赖关系，我们观察下面几个例子：

例如，某种商品的销售单价为 p 元，则其销售额 L 与销售量 x 之间存在这样的依赖关系：$L=px$．

又例如：圆的面积 S 和半径 r 之间存在这样的依赖关系：$S=\pi r^2$.

不考虑上面两个例子中量的实际意义，它们都给出了两个变量之间的相互依赖关系，这种关系是一种对应法则．根据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应，两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质．

高等数学则正是研究变量的数学，现实世界里普遍存在着不断运动变化的变量，对这些变量进行研究就抽象出了函数的概念．

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于 D 中的每一个数 x，按照某种确定的法则 f，变量 y 都有唯一确定的值与它对应，则称对应法则 f 是定义在数集 D 上的一个函数，其中 D 称为函数的定义域．

对于每一个 $x \in D$，对应的 y 称为函数 f 在 x 处的值，简称函数值，记为 $y=f(x)$. 由于我们是通过函数值来研究函数，所以也称 $y=f(x)$ 是 x 的函数，x 称为自变量，y 称为因变量．当 x 取遍 D 的所有数值时，对应的函数值的全体组成的数集

$$W=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域．

定义域和对应法则是函数概念的两个要素，这也是判别两个函数是否是相同函数的关键所在．在实际问题中，函数的定义域需要根据问题的实际意义来确定，而对于用解析式给出的函数，其定义域是使解析式有意义的自变量的一切实数值所组成的集合．例如函数 $y=\sqrt{x-1}$ 的定义域是区间 $[1,+\infty)$，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 的定义域是 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

下面举几个函数的例子．

【例 1-1】 常数函数 $y=C$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{C\}$，图形是一条平行于 x 轴的直线（见图 1-3).

【例 1-2】 绝对值函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=[0,+\infty)$（见图 1-4).

【例 1-3】 符号函数

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{-1,0,1\}$（见图 1-5). 对于任何实数 x，下列关系成立：$x=\operatorname{sgn} x\,|x|$．例如 $\operatorname{sgn}(-1)\,|-1|=-1$．

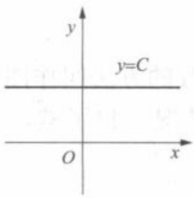

图 1-3

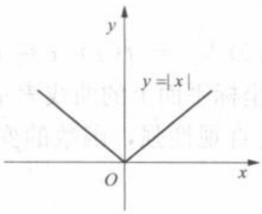

图 1-4

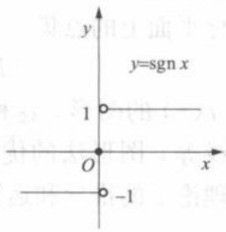

图 1-5

【例 1-4】 取整函数 $f(x)=[x]$，其中 x 为任一实数，$[x]$ 为 x 的整数部分，即不超过 x 的最大整数．它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为整数集 Z（见图 1-6). 在 x 的整数值处，图形发生跳跃．

【例 1-5】 函数

$$f(x)=\begin{cases} 3x-1, & |x|<1 \\ \sin x, & |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

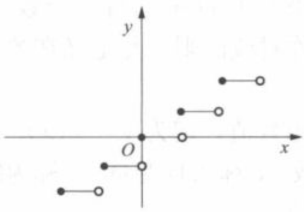
图 1-6

是一个分段函数．它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$．当 $x\in(-1,1)$ 时，对应的函数值 $f(x)=3x-1$；当 $x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ 时，对应的函数值 $f(x)=\sin x$．例如，$f\left(\frac{1}{2}\right)=3\cdot\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2}$，$f(2)=\sin 2$．

［例 1-2］～［例 1-5］中的函数都是用几个式子表示的，这种在定义域中几部分分别用不同的解析式表示的函数称为分段函数．这也是经常出现的一种函数．

【例 1-6】 求 $y=\sqrt{4-x^2}+\ln(x^2-1)$ 的定义域．

解 $4-x^2\geqslant 0$ 且 $x^2-1>0$，即 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 且 $x<-1$ 或 $x>1$，定义域为 $[-2,-1)\cup(1,2]$.

定义域是使函数有意义的自变量的集合．因此，求函数定义域需注意以下几点：

（1）分母不等于 0；

（2）偶次根式被开方数大于或等于 0；

（3）对数的真数大于 0；

（4）$y=x^0$，$x\neq 0$；

（5）$y=\tan x$，$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathrm{Z}$ 等．

三、函数的表示方法

常用的函数的表示方法有三种：列表法、图形法、解析法．

1. 列表法

在实际应用中，常把所考虑的函数的自变量的一些值与它们所对应的函数值列成一个表格，此种表示函数的方法称为列表法．如三角函数表、对数表等．列表法表示函数的优点是使用方便．

2. 图形法

对于给定的函数 $y=f(x)$，当自变量 x 在定义域内变化时，对应的函数值 y 也随之变化，我们把坐标平面上的点集

$$\{P(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的图形．这种用坐标平面上的曲线表示函数的方法叫作图形法．如指数曲线、对数曲线等．图形法的优点是直观性强，函数的变化情况一目了然，缺点是不够精确，不便于做理论上的推导和运算．

3. 解析法

把两个变量之间的函数关系直接用数学式子表示，并注明函数的定义域，这种表示函数的方法称为解析法．如 $f(x)=\sin x$，$f(x)=2x-1$ 等．用解析法表示函数，优点是便于理论分析和数值计算，缺点是不够直观．

在研究具体问题时三种方法可以结合使用．

四、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 内有定义．如果存在正数 M，使得对于任一 $x\in I$，都有

$$|f(x)| \leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 内有界．此时正数 M 称为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的一个界．如果不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$ 在 I 内无界．

例如，正弦函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的．因为对于任意的 x 值，都有 $|f(x)|=|\sin x| \leqslant 1$，它的图形介于两条平行直线 $y=\pm 1$ 之间．而正切函数 $f(x)=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是无界的，因为对于任意的正数 M，在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内都存在点 x，使 $|\tan x|>M$ 成立．

如果存在常数 M_1，使得对于任一 $x \in I$，都有 $f(x) \leqslant M_1$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 有上界，此时 M_1 称为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的一个上界；如果存在常数 M_2，使得对于任一 $x \in I$，都有 $f(x) \geqslant M_2$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 有下界，此时 M_2 称为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的一个下界．

函数的有界性还可叙述为：如果函数 $f(x)$ 在区间 I 内既有上界又有下界，则称 $f(x)$ 在区间 I 内有界．

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对任意 $x_1,x_2 \in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调增加的；若对任意 $x_1,x_2 \in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调减少的．单调增加和单调减少的函数统称为单调函数．

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 内是单调减少的，在区间 $[0,+\infty)$ 内是单调增加的，但在 $(-\infty,+\infty)$ 内却不是单调函数．

3. 函数的奇偶性

如果 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即如果 $x \in D$，则 $-x \in D$）．如果对于任一 $x \in D$，都有

$$f(-x)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任一 $x \in D$，都有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为奇函数．

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称．

例如，$f(x)=x^2$ 是偶函数，$f(x)=\sin x$ 是奇函数，$f(x)=2^x$ 是非奇非偶函数．

【例 1-7】 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^2+1$；　(2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；　(3) $f(x)=3x-2$．

解 (1) 因为 $f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x)$，所以 $f(x)=x^2+1$ 为偶函数．

(2) 因为 $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$，

所以 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数．

(3) 因为 $f(-x)=3(-x)-2=-3x-2$，既不等于 $f(x)$，也不等于 $-f(x)$，所以 $f(x)=3x-2$ 既不是奇函数，也不是偶函数．

4. 函数的周期性

对于函数 $f(x)$，如果存在一个不为零的数 l，使得对于定义域内的任一 x 值都有

$$f(x+l)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 为周期函数，l 叫作 $f(x)$ 的周期．满足这个等式的最小正数 l 称为周期函数的最小正周期．通常，周期函数的周期是指最小正周期．

例如，函数 $f(x)=\sin x, f(x)=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数．

注意，不是所有的周期函数都有最小正周期，例如，常数函数是周期函数，但它没有最小正周期．

周期函数的图形特点：在函数的定义域内，每个长度为 l 的区间上，函数的图形有相同的形状．所以画图时可以先作出长度为一个周期的区间上的图形，再通过图形的平移而得到．

五、反函数

函数 $y=f(x)$ 表示变量 y 随着 x 的变化而变化，但在实际问题中有时却要反过来研究 x 是怎样随着 y 的变化而变化的．例如在自由落体运动过程中，距离 s 表示为时间 t 的函数：$s=\frac{1}{2}gt^2$．在时间的变化范围中任意确定一个时刻 t_0，由上述公式就可得到相应的距离 $s_0=\frac{1}{2}gt_0^2$．如果将问题反过来提，即已知下落的距离 s，求时间 t，则有 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$（$t\geqslant 0$，g 为重力加速度）．这里，原来的因变量 s 成为自变量，原来的自变量 t 成了函数，这样交换自变量和因变量的位置而得到的新函数 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$，称为原有函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的反函数．

设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的一个函数，值域为 W．如果对于 $y=f(x)$ 值域 W 中的每个 y，根据关系式 $y=f(x)$ 可以确定出 D 中唯一的 x 值与之对应，则由此确定了一个新的函数，称为 $y=f(x)$ 的反函数，记作

$$x=f^{-1}(y)$$

这个函数的定义域为 W，值域为 D，相对于 $x=f^{-1}(y)$，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数．

由于习惯上我们经常采用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此通常把 $x=f^{-1}(y)$ 中的自变量 y 改写成 x，函数 x 改写成 y，这样 $y=f(x)$ 的反函数就写成了 $y=f^{-1}(x)$．

反函数是相互的，即若 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，则 $y=f(x)$ 也是 $y=f^{-1}(x)$ 的反函数，并且互为反函数的两个函数的图形关于直线 $y=x$ 对称．例如，函数 $y=x^3$ 与它的反函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的．

什么样的函数存在反函数呢？一般地，有如下的反函数存在性的充分条件：若函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义且在该区间上单调，则它的反函数必存在．

如函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，显然在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $y=\sin x$ 不存在反函数，但是如果我们仅在它的一个单调区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上考虑，由反函数存在性的充分条件可知 $y=\sin x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$ 存在反函数，这个反函数被称为反正

弦函数，记作 $y=\arcsin x$，其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

类似我们可以得到 $y=\cos x(x\in[0,\pi])$ 的反函数：反余弦函数 $y=\arccos x$，定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$；$y=\tan x\left(x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 的反函数：反正切函数 $y=\arctan x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$；$y=\cot x(x\in(0,\pi))$ 的反函数：反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,\pi)$. 以上四种函数统称为反三角函数.

六、复合函数和初等函数

1. 复合函数

复合函数是比较常见的一类函数，例如某工厂生产某种产品，x 表示生产的原材料的收购量，u 表示生产量，y 表示上缴利润. 若不考虑其他因素，只研究这三者的关系，显然，y 是 u 的函数，u 是 x 的函数. 所以，对于每一个 x，经过 u 总有一个 y 与之对应，通过这种复合关系而构成的函数就是复合函数.

一般地，如果变量 y 是变量 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是变量 x 的函数 $u=g(x)$，且 $g(x)$ 函数值的全部或部分使 $f(u)$ 有定义，则函数 $y=f[g(x)]$ 称为由 $u=g(x)$ 与 $y=f(u)$ 构成的复合函数，x 称为自变量，u 称为中间变量. g 与 f 构成的复合函数 $f[g(x)]$ 的条件是函数 g 在 D 上的值域 $g(D)$ 必须含在 f 的定义域内，否则不能构成复合函数.

例如 $y=f(u)=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$，$u=g(x)=2\sqrt{1-x^2}$ 在 $D=\left[-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$ 上有定义，且 $g(D)\subset[-1,1]$，则 g 与 f 可构成复合函数 $y=\arcsin 2\sqrt{1-x^2}$，$x\in D$.

但函数 $y=\arcsin u$ 和函数 $u=2+x^2$ 不能构成复合函数，这是因为对任意 $x\in R$，$u=2+x^2$ 的值域均不在 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 内.

对这种复合结构还可以加以推广，如 $y=\cos u$，$u=\sin v$，$v=e^x+1$，则复合函数为 $y=\cos(\sin(e^x+1))$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

【例 1-8】 指出下列函数是由哪些函数复合而成的.

(1) $y=(\cos x)^4$；(2) $y=\frac{1}{\arctan 2x}$；(3) $y=e^{\sin^3\frac{1}{x}}$

解 (1) 函数 $y=(\cos x)^4$ 是由函数 $y=u^4$，$u=\cos x$ 复合而成的；

(2) 函数 $y=\frac{1}{\arctan 2x}$ 是由函数 $y=\frac{1}{u}$，$u=\arctan v$，$v=2x$ 复合而成的；

(3) 函数 $y=e^{\sin^3\frac{1}{x}}$ 是由函数 $y=e^u$，$u=v^3$，$v=\sin w$，$w=\frac{1}{x}$ 复合而成的.

2. 初等函数

下列函数称为基本初等函数：

常数函数：$y=C$（C 为常数）；

幂函数：$y=x^\mu$（μ 是常数）；

指数函数：$y=a^x$（a 是常数，$a>0$，且 $a\neq1$）；

对数函数：$y=\log_a x$（a 是常数，$a>0$，且 $a\neq1$）；

三角函数：正弦函数 $y=\sin x$；余弦函数 $y=\cos x$；正切函数 $y=\tan x$；余切函数 $y=\cot x$；正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$；余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

反三角函数：$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

这些初等函数的图形见附录 A.

由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次的复合步骤所构成，并用一个式子表示的函数，叫作初等函数．否则就是非初等函数．

高等数学中所讨论的函数绝大多数都是初等函数，而分段函数大部分都是非初等函数．如符号函数（见［例 1-3］）和取整函数（见［例 1-4］）均为非初等函数，而绝对值函数（见［例 1-2］）$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 可表示为 $y=\sqrt{x^2}$，故为初等函数.

七、极坐标系

平面直角坐标系是以一对实数来确定平面上一点的位置，这是一种简单常用的坐标系，但并不是唯一的坐标系．在实际问题中，有时利用其他的坐标系比较方便，如炮兵射击时以大炮为基点，利用目标的方向角及大炮的距离来确定目标的位置．下面就来叙述这种坐标系——极坐标系．

极坐标系对平面上的一点的位置也是用有序实数对来确定，但这一对实数中，一个是表示距离，而另一个则是指示方向．一般来说，取一个定点 O，称为极点，作一水平射线 OX，称为极轴，在 OX 上规定单位长度，这样就组成了一个极坐标系．平面上一点 P 的位置，可以由 OP 的长度及其 $\angle XOP$ 的大小决定．具体地说，假设平面上有点 P，连接 OP，设 $OP=\rho$，$\angle XOP=\theta$．ρ 和 θ 的值确定了，则 P 点的位置就确定了．ρ 叫作 P 点的极径，θ 叫作 P 点的极角，(ρ,θ) 叫作 P 点的极坐标（规定 ρ 写在前，θ 写在后）．由极径的意义知 $\rho\geqslant 0$，当极角的取值范围是 $[0,2\pi)$ 时，平面上的点（除去极点）就与极坐标 (ρ,θ)（$\rho\neq 0$）建立一一对应的关系．

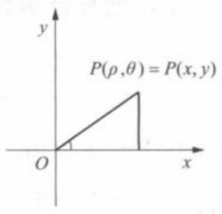

图 1-7

极坐标与直角坐标系的关系如图 1-7 所示，将极坐标的极点 O 作为直角坐标系的原点，将极坐标的极轴作为直角坐标系 x 轴的正半轴．如果点 P 在直角坐标系下的坐标为 (x, y)，在极坐标系下的坐标为 (ρ, θ)，则有下列关系成立

$$\cos\theta=\frac{x}{\rho}\quad \sin\theta=\frac{y}{\rho}$$

即

$$x=\rho\cos\theta\quad y=\rho\sin\theta.$$

另外还有下式成立

$$\rho^2=x^2+y^2,\quad \tan\theta=\frac{y}{x}.$$

极坐标方程的形式为 $F(\rho,\theta)=0$．在极坐标里，从 ρ，θ 的每一组对应的值 (ρ_1,θ_1) $(\rho_2,\theta_2)\cdots$，作为点的坐标，并且标出这些点，然后用平滑的曲线依次连接这些点，所得到的曲线就称为这个极坐标方程的曲线．反过来，称这个方程为这条曲线的极坐标方程．

【例 1-9】 试给出曲线 $\rho=2\cos\theta$ 在直角坐标系下的方程．

解：因为 $\cos\theta=\dfrac{x}{\rho}$，故曲线 $\rho=2\cos\theta$ 可以写为 $\rho=2\dfrac{x}{\rho}$，即 $\rho^2=2x$，又 $\rho^2=x^2+$

y^2，故有 $x^2+y^2=2x$，即 $(x-1)^2+y^2=1$. 显然该方程表示的是以 $(1, 0)$ 为圆心，以 1 为半径的圆周.

习题 1-1

1. 设 $f(x)=\dfrac{|x-3|}{x-1}$，求下列函数值：$f(3)$，$f(-2)$，$f(0)$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\ln(x+1)$；　　(2) $y=\dfrac{x}{1+x}$；

(3) $y=3^{\frac{1}{x}}$；　　(4) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$.

3. 下列函数是否表示同一函数？为什么？

(1) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(2) $f(x)=1$，$g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$.

4. 判断函数 $y=\ln x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的单调性.

5. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty, +\infty)$ 内的任意函数，证明：

(1) 函数 $F_1(x)=f(x)+f(-x)$ 为偶函数；

(2) 函数 $F_2(x)=f(x)-f(-x)$ 为奇函数.

6. 指出下列函数是由哪些简单函数复合而成的.

(1) $y=(1+x)^3$；　　(2) $y=\ln^2 x$；

(3) $y=4^{(2x+1)^3}$；　　(4) $y=\tan^2 3x$.

第二节 数列的极限

为了掌握变量的变化规律，往往需要从它的变化过程来判断它的变化趋势. 例如有这么一个变量，它开始是 1，然后为$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{4}$，…，$\dfrac{1}{n}$，…如此，一直无尽地变下去，虽然无止尽，但它的变化有一个趋势，这个趋势就是在它的变化过程中越来越接近于零. 我们就说，这个变量的极限为 0.

在高等数学中，有很多重要的概念和方法都和极限有关（如导数、微分、积分、级数等），并且在实际问题中极限也占有重要的地位. 例如求圆的面积和圆周长（已知：$S=\pi r^2$，$l=2\pi r$），但这两个公式从何而来？

要知道，获得这些结果并不容易. 人们最初只知道求多边形的面积和求直线段的长度. 然而，要定义这种从多边形到圆的过渡就要求人们在观念上，在思考方法上来一个突破.

多边形的面积之所以好求，是因为它的周界是一些直线段，我们可以把它分解为许多三角形. 而圆呢？周界处处是弯曲的，困难就在这个"曲"字上面. 在这里我们面临着"曲"与"直"这样一对矛盾.

在形而上学看来，曲就是曲，直就是直，非此即彼，辩证唯物主义认为，在一定条件下，曲与直的矛盾可以相互转化. 恩格斯深刻提出："高等数学的主要基础之一是这样一个

矛盾，在一定的条件下直线和曲线应当是一回事”．整个圆周是曲的，每一小段圆弧却可以近似看成是直的；就是说，在很小的一段上可以近似地“以直代曲”，即以弦代替圆弧．

按照这种辩证思想，我们把圆周分成许多的小段，比方说，分成 n 个等长的小段，代替圆而先考虑其内接正 n 边形．易知，正 n 边形周长为 $l_n = 2nR\sin\frac{\pi}{n}$．

显然，这个 l_n 不会等于 l．然而，从几何直观上可以看出，只要正 n 边形的边数不断增加，这些正多边形的周长将随着边数的增加而不断地接近于圆周长．n 越大，近似程度越高．

但是，不论 n 多么大，这样算出来的总还只是多边形的周长．无论如何它只是周长的近似值，而不是精确值．问题并没有最后解决．

为了从近似值过渡到精确值，我们自然让 n 无限地增大，记为 $n\to\infty$．直观上很明显，当 $n\to\infty$ 时，$l_n\to l$，记成 $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = l$．

即圆周长是其内接正多边形周长的极限．这种方法是我国刘徽早在 3 世纪就提出来了，称为“割圆术”．其方法就是——无限分割，以直代曲．

除之以外，象曲边梯形面积的计算均源于“极限”思想．所以，我们有必要对极限作深入研究．

一、数列极限的定义

1. 数列的概念

数列就是“一列数”，但这“一列数”并不是任意的一列数，而是有一定的规律，有一定次序性，具体讲数列可定义如下．

按照某一法则依次排列起来的无穷多个有次序的数

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

数列中的每一个数称为数列的项，第 n 项 a_n 称为数列的一般项（或通项）．例如，

(1) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots$

(2) $-1,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ (-1)^n,\ \cdots$

(3) $0,\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{4},\ \cdots,\ \frac{n+(-1)^n}{n},\ \cdots$

(4) $0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{5},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n+1},\ \cdots$

都是数列，它们的一般项依次为

$$\frac{1}{2^n},\ (-1)^n,\ \frac{n+(-1)^n}{n},\ \frac{n-1}{n+1}.$$

数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

也简记为数列 $\{a_n\}$．

对于数列 $\{a_n\}$，我们关心的是它的变化趋势．即当 n 无限增大时，数列中的项能否无限地接近于某个确定的数值．例如，数列 (1)，通项为 $\frac{1}{2^n}$，当 n 无限增大时，$\frac{1}{2^n}$ 无限趋近于 0；数列 (3)，通项 $\frac{n+(-1)^n}{n} = 1+\frac{(-1)^n}{n}$，当 n 无限增大时，$\frac{(-1)^n}{n}$ 无限地趋近于 0，