

随机延迟动力学 及其应用

曾春华 易鸣 梅冬成/编著



科学出版社

随机延迟动力学及其应用

曾春华 易 鸣 梅冬成/编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

随机延迟动力学近年来发展迅速,已成为一个比较成熟的研究方向,在物理学、系统科学、生物学、数学、生态学、化学等自然科学,以及经济与金融等社会科学中都得到了广泛应用。本书共有8章,第1~2章阐述随机延迟动力学理论,第3~8章阐述随机延迟动力学理论在肿瘤细胞增长系统、基因调控网络、布朗马达的反常输运、生态系统、表面催化反应体系和金融系统中的应用,包括它们的模型建立、数值模拟和理论分析。本书论述较为浅显易懂,推导较为详尽,着重从物理学的角度探讨其中的潜在机制,并给出相关的物理解释。

本书可供物理学、系统科学、生物物理学、数学、生态学、非线性化学、金融学及相关学科的研究人员及高校师生阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

随机延迟动力学及其应用/曾春华,易鸣,梅冬成编著. —北京:科学出版社,2020.3

ISBN 978-7-03-064603-3

I. ①随… II. ①曾… ②易… ③梅… III. ①非线性科学—物理学—研究 IV. ①O415

中国版本图书馆CIP数据核字(2020)第041444号

责任编辑:郭勇斌 邓新平/责任校对:王萌萌
责任印制:张 伟/封面设计:众轩企划

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2020年3月第一版 开本:720×1000 1/16

2020年3月第一次印刷 印张:20 1/2

字数:406 000

定价:128.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

1827年英国植物学家布朗(Brown)首先发现花粉颗粒在水中进行永不停息的无规则运动,这种现象称为布朗运动。人们一开始不清楚布朗运动的原因,直到1877年德耳索(Delsaulx)才指出,布朗运动是颗粒受到液体介质分子碰撞所引起的不规则运动。20世纪初,爱因斯坦(Einstein)于1905年、斯莫卢霍夫斯基(Smoluchowski)于1906年和朗之万(Langevin)于1908年各自独立地发表了关于布朗运动的理论,这些理论不仅正确地阐述了布朗运动的本质,而且预言了布朗运动的一些特性。这些预言后来得到了法国物理学家皮兰(Perrin)的实验工作的证实。朗之万首次将粒子所受到的无规则碰撞看成是“随机力(或噪声)”,提出布朗运动的朗之万方程。噪声在自然界中无处不在,无时不有。通常,人们认为噪声是消极的东西,它产生杂乱的运动,起破坏性作用。但是,在非线性系统中,噪声往往起着与人们直觉相反的作用。普里高津(Prigogine)指出,在系统发生非平衡相变的分岔点,噪声起着非常重要的作用。噪声的积极性与建设性越来越受到人们的关注。噪声诱导定向输运、噪声增强稳定性等都是噪声积极性方面的例子。噪声可以使输入非线性系统的弱信号放大和优化,这就是被广泛研究的随机共振现象。

时间延迟普遍存在于自然界中,它反映了通过系统传输相关的物质、能量、信息的时间。众所周知,噪声与时间延迟的结合是自然界的普遍规律,并且改变系统的动力学,使系统产生许多更丰富、更复杂的动力学行为。比如,生物生理学控制、生物和人工神经网络中的信号发射、双稳系统的随机动力学性质的影响等。近年来,人们已在随机动力学系统的时间延迟方面开展了大量的理论和实验研究工作。比如,奥希拉(Ohira)等研究了时间延迟随机行走的有关现象;吉尤齐克(Guillouzic)和弗兰克(Frank)等发展了一套关于随机延迟动力学的统计描述方法;钦林(Tsimring)和皮科夫斯基(Pikovsky)研究了具有时间延迟反馈的典型双稳系统;马索尔(Masoller)等通过采用一个顶上有空腔的表面发出有延迟的光电子反馈的激光,从试验上分析了有噪声双稳系统的行为。

随机延迟动力学发展比较迅速,已成为一个比较成熟的研究方向,在物理学、系统科学、生物学、数学、生态学、化学等自然科学,以及经济与金融等社会科学中都得到了广泛应用。随机延迟动力学及其应用对未来社会的推动作用将是难以估量的,故本书取材于发表在 *Nature*、*Science*、*Physical Review Letters* (PRL)、*Proceedings of the National Academy of Sciences* (PNAS) 及 *Physical Review E* (PRE) 等国际重要刊物上的研究成果,以及作者团队在这方面近年来的最新研究成果,包括随机延迟存在时免疫监视下肿瘤细胞增长系统、基因转录调控系统、布朗马达运输、多稳生态系统、表面催化反应体系和金融系统等中的有趣现象(噪声增强稳定性、反常运输、随机共振等),着重从物理学的角度探讨这些现象的潜在机制,并给出相关的物理解释。希望能够激发读者的兴趣,对读者起抛砖引玉的作用,这是作者最大的愿望。

本书从筹划、汇编到成册历时较长,并经数次修改完善,最终定稿。特别感谢国家自然科学基金项目(11305079、11665014、11165016、11675060、91730301)、云南省首届优秀青年基金(2019FI002)、“万人计划”青年拔尖人才计划、云南省自然科学基金项目(2015HB025, 2017FB003)、云南省统计物理与复杂系统创新团队建设项目、昆明理工大学计算物理及其应用创新团队项目、华中农业大学自主科技创新基金项目(2015RC021)、中国地质大学地大学者青年拔尖人才项目对本书的经费支持。在作者编写书稿的过程中,聂林如教授、谢崇伟教授、贾亚教授、李保文教授、贾正林教授、王参军教授等给予了大力帮助和支持,作者在这里表示衷心的感谢。此外,还要感谢杜鲁春博士、段卫龙博士、桂容博士、李江城博士、蔡建春博士、向友林博士、郭伟博士、郑雅允博士、吴风艳博士等的有益讨论。囿于作者学识,书中难免存在疏漏之处,敬祈斧正。

作 者

2019年7月

目 录

前言

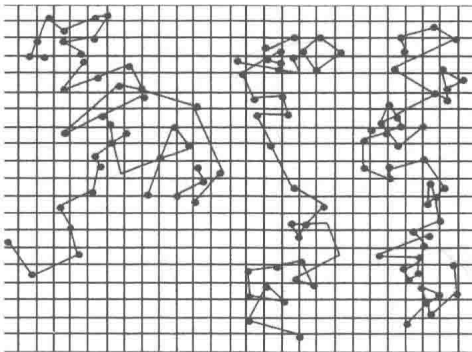
第 1 章 绪论	1
1.1 布朗运动与噪声	1
1.2 噪声与朗之万方程	2
1.3 噪声和时间延迟	5
参考文献	6
第 2 章 随机延迟动力学理论	10
2.1 理论分析	10
2.2 随机模拟	41
参考文献	44
第 3 章 免疫监视下肿瘤细胞增长系统中的随机延迟动力学	55
3.1 免疫监视下肿瘤细胞增长系统中的关联噪声效应	55
3.2 免疫监视下肿瘤细胞增长系统中的色噪声效应	61
3.3 噪声和时间延迟协同作用下的免疫监视下肿瘤细胞增长系统	73
参考文献	76
第 4 章 基因调控网络中的随机延迟效应	78
4.1 基因调控网络的随机延迟效应	79
4.2 基因转录调控网络的随机延迟效应	81
4.3 单基因调控网络中的随机延迟效应	95
4.4 <i>comK</i> 基因表达系统中的随机延迟效应	116
参考文献	130
第 5 章 布朗马达的反常输运行为	136
5.1 布朗马达	136

5.2 布朗马达的多次流反转·····	140
5.3 布朗马达中反常输运行行为的控制·····	151
5.4 振动马达中的反常输运行行为·····	158
参考文献·····	172
第 6 章 生态系统中的随机延迟效应 ·····	177
6.1 生态系统中临界转换的早期预警信号·····	177
6.2 植被生态系统中噪声和时间延迟效应·····	181
6.3 Levins 模型描述的生态系统·····	198
6.4 Lotka-Volterra 模型下的生态系统·····	207
参考文献·····	237
第 7 章 表面催化反应体系中的随机延迟动力学 ·····	246
7.1 噪声诱导非平衡动力学相变·····	248
7.2 复杂表面催化反应体系中的随机延迟效应·····	249
7.3 表面局域吸附催化反应体系中随机延迟诱导非平衡相变·····	250
7.4 表面随机吸附催化反应体系中噪声关联性诱导非平衡相变·····	261
参考文献·····	276
第 8 章 金融系统中的随机延迟动力学 ·····	282
8.1 金融物理学的研究现状·····	282
8.2 金融危机环境下的价格动力学分析·····	284
8.3 金融系统的随机共振·····	292
8.4 投资组合·····	310
参考文献·····	315

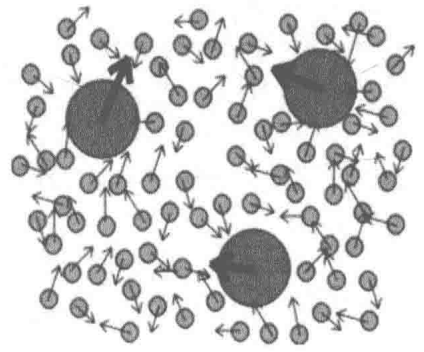
第1章 绪 论

1.1 布朗运动与噪声

利用显微镜观察悬浮在液体中的微小颗粒（如花粉），可以看到颗粒在不停地进行着无规则运动，这是英国植物学家布朗于 1827 年首先发现的，这种现象称为布朗运动[图 1.1 (a)]。爱因斯坦在 1905 年和 1906 年发表的两篇关于分子热运动的论文^[1,2]，对布朗运动做了令人满意的解释。布朗运动是由于颗粒受到液体介质分子碰撞的不平衡所引起的[图 1.1 (b)]。



(a) 实验观测结果 (宏观现象)



(b) 微观原理

图 1.1 布朗运动

布朗粒子是非常微小的宏观颗粒，其直径的大小一般为 $10^{-7} \sim 10^{-6}$ m。由于布朗粒子不断受到液体介质分子的碰撞，在任一瞬间，介质分子从各个方向对一个布朗粒子的碰撞作用力一般是不平衡的，使得布朗粒子就沿着净作用力的方向运动。由于分子运动的无规则性，施加在布朗粒子上的净作用力涨落不定，力的方向和大小都不断发生变化，布朗粒子就不停地进行着无规则的运动。爱因斯坦于 1905 年、斯莫卢霍夫斯基 (Smoluchowski) 于 1906 年和朗之万 (Langevin) 于 1908 年各自独立地发表了关于布朗运动的理论，这些理论不仅阐述了布朗运动的本质，而且预言了布朗运动的一些特性。这些预言后来得到了法国物理学家皮兰 (Perrin) 的实验证实。布朗运动是当时能够以最直接的方式把分子运动显示出来的物理过程，这些研究对后来物质原子论的确立起到重要的促进作用。布朗运动

是一个最简单的随机过程例子，对布朗运动的研究为随机过程的研究开辟了道路。目前，布朗运动理论有着广泛的应用，例如，电子在导体内的无规则热运动会引起热噪声——主要有散粒噪声^[3-5]和约翰逊（Johnson）噪声^[6, 7]两种；激光光场会形成由光子构成的一种称为光学黏胶的黏滞介质，这种介质对处于其中作布朗运动的原子产生多普勒（Doppler）致冷效应^[8]；激光陷阱对原子的冷却机制也被研究^[9-12]。

随机力，也称噪声或涨落力，是指从系统的微观描述过渡到确定性宏观描述时，被忽略的部分。它体现了微观运动对宏观变量的一种杂乱无规则的作用，其作用的变化时标相对宏观运动而言非常小，因此对宏观运动会产生突变的、随机的、不可预言的影响^[13]。在物理上，噪声最早是指不规则的、间歇的或随机的声振动，后来把电路或通信系统中由于电子持续的杂乱运动形成的所有干扰也称为噪声^[14]。由于布朗运动中碰撞产生的净作用力涨落的不确定性与之非常类似，所以也把这种涨落力称为噪声^[15]。随机动力学系统中的噪声多种多样：按照噪声的含时关联统计的不同，噪声可以分为白噪声和色噪声；按照噪声所满足的统计分布规律的不同，噪声可分为高斯噪声和非高斯噪声；按照起源的不同，噪声可分为内部噪声和外部噪声，内部噪声一般被认为是系统内部动力学的结果，而外部噪声通常被认为是系统外部对所研究的系统的影响；按照噪声与系统的作用关系的不同，噪声可分为乘性噪声和加性噪声；按噪声产生机制的不同，噪声的种类就更为广泛，如射击噪声、温度噪声、电磁噪声、量子噪声和泵噪声等。

1.2 噪声与朗之万方程

众所周知，在力学的一般表述中，最基本的物理量是广义坐标和广义动量。对 N ($\gg 1$) 粒子组成的宏观系统，其广义坐标 q_j 和广义动量 p_j 时间变化率遵循哈密顿正则方程：

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}. \quad (1.1)$$

这里 H 是系统的哈密顿量， $H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ ； $j = 1, 2, 3, \dots, 3N$ 。在这组方程中蕴含着系统发展演化的全部细致信息。从微观的层面完整地描述宏观系统的演化规律，就意味着要对刻画该系统的哈密顿正则方程 (1.1) 进行求解，从而确定系统在 $6N$ 维相空间的运动轨道。但是要求解如此众多相互耦合在一起的方程 (1.1)，由于初始条件的测量、外界环境的扰动、量子效应等诸多问题，实际上根本不可能做到。

对许多物理问题，我们感兴趣的并非是构成系统的每一个粒子微观运动的详

情，而是众多微观粒子运动的集体效应在宏观尺度上所体现的性质，所以我们不需要从微观层次上对系统给予描述，而是对系统进行宏观描述。宏观描述只涉及少数几个自由度，或者说只考虑 $6N$ 维相空间中的一极小子空间，为此我们用某种随机方式涨落的宏观变量来刻画系统，即用朗之万方程来进行随机描述，或者根本不考虑随机涨落扰动，用确定性方程进行热力学描述。三种系统描述的关系如图 1.2 所示。

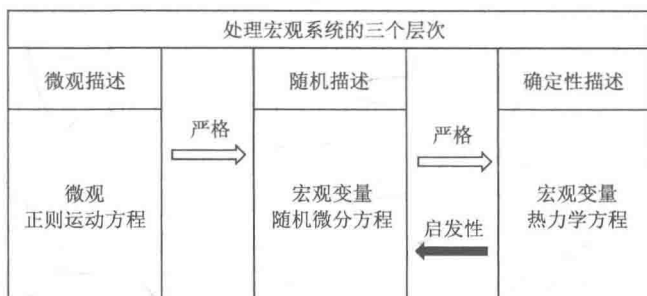


图 1.2 三种系统描述的关系^[16]

对复杂系统进行随机描述，首先需要确定系统所满足的随机微分方程。那么如何得到描述系统随时间演化的随机微分方程呢？至今被广泛采用的是朗之万方程。van Kampen 和 Risken 将朗之万方程归纳如下^[16,17]。

1) 写出系统运动遵循的确定性宏观方程：

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t). \quad (1.2)$$

2) 根据实际问题，在确定性方程上增加具有某种统计性质的随机力 $\zeta(t)$ ，得到随机微分方程（或称朗之万方程）：

$$\dot{x}(t) = \psi(x(t), \zeta(x(t), t)). \quad (1.3)$$

3) 利用其他的手段（如均分定理）或从其他的角度来调整随机力 $\zeta(t)$ 的性质参数，如随机力强度。

采用朗之万方程对系统做随机描述处理，实质暗含了这样一个基本假设，即系统变量可以分为两类：慢变的宏观量和在非常短的时标上快变的微观量，微观量以随机扰动的方式对宏观量产生影响。在这里需要特别指出两点。

其一，由于采用朗之万方程对系统进行随机处理，是通过引入随机力来考虑无规则随机微观运动对宏观系统的影响，是系统微观描述的简化，所以在随机层面上进行宏观系统的处理时，我们对产生这种随机力的微观运动详细情况不做研究，而只研究随机力对宏观运动的影响及它产生的各种重要效应。

1908 年，Langevin^[18]将牛顿第二定律运用到布朗粒子，把液体分子施于粒子的力唯象地分为黏滞力与随机力，写出了布朗粒子阻尼运动遵循的随机运动方程：

$$m\dot{v} = -\gamma mv + \xi(t). \quad (1.4)$$

随机力 $\xi(t)$ 的统计性质假设^[19]:

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= 0, \\ \langle \xi(t)\xi(t') \rangle &= 2\gamma kT \delta(t-t'). \end{aligned}$$

在此基础上研究了布朗粒子的运动, 得出了爱因斯坦关系——布朗粒子位移的平方均值:

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \frac{2kT}{\gamma} t. \quad (1.5)$$

从 1908 年以来, 采用朗之万方程对宏观系统进行随机描述这一方法已经被广泛地应用于物理学、化学、生物学及金融学等许多领域。朗之万方程中的噪声项并非源于分子热运动的涨落或粒子的离散涨落(如电路中载流子数密度的涨落), 虽然我们对噪声的起源和详细情况不甚了解, 但是朗之万方程仍然获得了相当的成功^[17]。

其二, 由于朗之万方程在处理布朗运动和非平衡系统许多问题时的有效性, 因而相当多的工作都试图从系统的微观描述导出朗之万方程。投影算子方法即是其中之一。在系综的基础上, 系统的微观描述方程(1.1)可以等效转化为刘维尔(Liouville)方程:

$$\frac{\partial P(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} = -iLP(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (1.6)$$

$$= \{H, P\},$$

$$\{H, P\} = \sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial P}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial P}{\partial q_j} \right]. \quad (1.7)$$

$P = P(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ 是系综分布函数, L 为刘维尔算子。这样动力学变量 $\mathbf{x}(t)$ 的时间演化满足:

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial t} = iL\mathbf{x}(t) = \{\mathbf{x}(t), H\}, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{x}(t) = \exp(iLt)\mathbf{x}(0).$$

从方程(1.8)出发, 按照 Mori 方法^[20-26], 利用投影算子技巧, 可以严格地导出宏观系统所遵循的广义朗之万方程:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = i\Omega \cdot \mathbf{x}(t) - \int_0^t \mathbf{K}(t-\tau) \cdot \mathbf{x}(\tau) d\tau + \mathbf{R}(t). \quad (1.9)$$

其中, $i\Omega$ 是频率矩阵; $\mathbf{K}(t-\tau)$ 是阻尼矩阵, 作为与 $\mathbf{R}(t)$ 的时间关联函数成正比

的量,代表时间滞后的阻尼耗散作用。而 $\mathbf{R}(t)$ 与 $\mathbf{x}(t)$ 是 $\dot{\mathbf{x}}(t)$ 的垂直分量,并在垂直于 \mathbf{x} 的子空间中随时间演化,它起着“噪声”的作用。只要取 $i\Omega = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}(t - \tau) = -2\beta I\delta(t - \tau)$, 广义朗之万方程 (1.9) 蜕变为方程:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = -\beta\mathbf{x}(t) + \mathbf{R}(t). \quad (1.10)$$

这恰好是与方程 (1.4) 形式一致的典型朗之万方程。可见,朗之万方程是建立在牢固基础之上的^[25, 26]。

1.3 噪声和时间延迟

在实际情况下,系统的状态具有长时间相关性并且受过去某一时刻影响,产生延迟时间 τ , 如图 1.3 所示。在以往随机系统的研究中,往往认为系统变量的变化是在一瞬间完成的,但是事实并非如此,这个过程需要一定的时间。例如,电视直播与现场同一场景在时间上存在一定的延迟。时间的延迟也存在于电话信号中,工业控制中的零点漂移,元件的老化形成的滞后,视觉、听觉的延迟,生命体血液的再生,种群动态的成熟期,神经网络的传输时间,瞳孔光反射的传输时间,以及在跟踪动作时视觉反馈的假象延迟,等等,这些全部是时间延迟效应的展现,描述这些时间延迟效应的动力学系统称为时间延迟动力学系统,因此时间延迟是真实系统中一个不可忽略的重要因素^[27]。

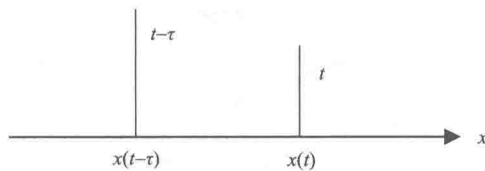


图 1.3 时间延迟示意图

时间延迟普遍存在于自然界中,它反映了通过系统传输相关的物质、能量、信息的时间^[28, 29]。很多实际过程都需要考虑时间延迟效应。在理论模型中引入时间延迟能更真实地反映自然规律,如生物生理学控制、生物和人工神经网络中的信号发射、双稳系统的随机动力学性质的影响等。近年来,人们已在随机动力学系统的时间延迟方面开展了大量的理论和试验研究工作。Ohira 等研究了时间延迟随机游走的有关现象^[30, 31], Guillozic 等发展了一套关于随机延迟动力学的统计描述方法^[32, 33], Tsimring 等研究了具有时间延迟反馈的典型的双稳系统^[34], 基于 SS-model 的细胞内钙离子振荡^[35], Ying 和 Huang 研究了时间延迟对细胞内钙离子浓度的振荡作用^[36], Masoller 研究了有噪声驱动的双稳性时间延迟反馈系统,

计算并分析了暂留时间的分布^[37], Huber 和 Tsimring 从理论和数值模拟上研究了噪声影响下具有全局时间延迟的双稳系统所组成的动力学^[38], Houlihan 等通过采用一个顶上有空腔的表面发出有延迟的光电子反馈的激光, 从试验上分析了有噪声的 Nonmarkovian 双稳系统的行为^[39], Piwonski 等还研究了时间延迟反馈影响下的双稳态系统的随机动力学性质^[40]。

噪声与时间延迟的协同作用是自然界的普遍规律, 并且改变系统的动力学, 使系统产生许多更丰富、更复杂的动力学行为^[41-44]。在一个包含记忆效应动力学系统中, 系统的状态具有长时间相关性并且受过去某一时刻影响, 产生了时间延迟反馈效应^[34, 37]。近来许多研究暗示时间延迟反馈效应广泛存在于自然界中^[39, 45], 如光学反馈的激光动力学^[46]、振荡系统中噪声诱导运动^[47]、非线性系统中随机共振等^[48]。同时, 噪声和时间延迟的结合在动力学系统中扮演重要角色^[49-53]。

对复杂系统进行随机延迟描述, 首先需要确定系统所满足的随机延迟微分方程。为得到描述复杂系统随时间演化的随机延迟微分方程, Guillouzic 和 Frank 等^[28, 29, 32, 33]将朗之万方程延展为延迟朗之万方程。

1) 写出系统运动遵循的确定性延迟方程:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau), t). \quad (1.11)$$

2) 根据实际问题, 在确定性延迟方程上增加具有某种统计性质的随机力 $\xi(t)$, 得到随机延迟微分方程或延迟朗之万方程:

$$\dot{x}(t) = \psi(x(t), x(t-\tau), \xi(x(t), t)). \quad (1.12)$$

3) 利用延迟反馈手段或从其他的角度来调整时间延迟或反馈强度的大小^[34, 37-39]。

噪声和时间延迟是复杂系统中不可分割的一个整体因素, 噪声或时间延迟既能单独引起系统向有序转变, 同时又能结合相互作用^[54]。因此研究复杂系统中的噪声和时间延迟协同作用效应是迫切需要解决的问题, 这也成为近几年物理学的重要研究方向之一。本书正是从这个基点出发, 利用随机延迟动力学理论研究了肿瘤细胞增长系统、基因调控网络、布朗马达的反常运输、生态系统、表面催化 (DM) 反应体系和金融系统等随机延迟效应, 着重从物理学的角度探讨这些现象潜在的机制, 并给出相关的理论解释。

参 考 文 献

- [1] Einstein A. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen[J]. Ann Phys (Leipzig), 1905, 322(8): 549-560.
- [2] Einstein A. Das Prinzip von der Erhaltung der Schwerpunktsbewegung und die Trägheit der Energie[J]. Ann

- Phys(Leipzig), 1906, 19: 371-377.
- [3] Rice S O. Mathematical analysis of random noise[J]. Bell Syst Tech J, 1944, 23(3): 282-332.
- [4] Rice S O. Mathematical analysis of random noise[J]. Bell Syst Tech J, 1945, 24(1): 46-156.
- [5] Schottky W. Über spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern[J]. Ann Phys(Leipzig), 1918, 57: 541-567.
- [6] Johnson J B. Thermal agitation of electricity in conductors[J]. Phys Rev, 1928, 32(1): 97-109.
- [7] Nyquist H. Thermal agitation of electric charge in conductors[J]. Phys Rev, 1928, 32(1): 110-113.
- [8] 汪志诚. 热力学·统计物理[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [9] Dalibard J, Cohen-Tannoudji C. Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients: simple theoretical models[J]. J Opt Soc Am B, 1989, 6(11): 2023-2045.
- [10] Ungar P J, Weiss D S, Riis E, et al. Optical molasses and multilevel atoms: theory[J]. J Opt Soc Am B, 1989, 6: 2058-2071.
- [11] Aspect A, Arimondow E, Kaiser R, et al. Laser cooling below the one-photon recoil energy by velocity-selective coherent population trapping[J]. Phys Rev Lett, 1988, 61: 826-829.
- [12] Kasevich M, Chu S. Laser cooling below a photon recoil with three-level atoms[J]. Phys Rev Lett, 1992, 69: 1741-1744.
- [13] 胡岗. 随机力与非线性系统[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1994.
- [14] 荣毓敏, 王伟. 物理学词典[M]. 北京: 科学出版社, 1988.
- [15] von Smoluchowski M. Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen[J]. Ann Phys (Leipzig), 1906, 21: 756-780.
- [16] van Kampen N G. Stochastic Processes in Physics and Chemistry[M]. Amsterdam: North Holland Publ Co, 1981.
- [17] Risken H. The Fokker-Planck Equation Methods of Solution and Applications[M]. New York: Springer-Verlag, 1984.
- [18] Langevin P. Sur la théorie du mouvement brownien[J]. CR Acad Sci Paris, 1908, 146(530-533): 530.
- [19] Coffey W T. Development and application of the theory of Brownian motion[J]. Adv Chem Phys, 1985, 63: 69.
- [20] Mori H. Transport, collective motion and Brownian motion[J]. Progr Theor Phys, 1965, 33: 423-455.
- [21] Kawasaki K. Simple derivations of generalized linear and nonlinear Langevin equations[J]. J Phys A, 1973, 6(9): 1289-1295.
- [22] Nordholm S, Zwanzig R. A systematic derivation of exact generalized Brownian motion theory[J]. J Stat Phys, 1975, 13(4): 347-371.
- [23] Berne B J, Pecora R. Dynamic Light Scattering[M]. New York: John Wiley, 1976.
- [24] Hänggi P. Generalized Langevin equations: a useful tool for the perplexed modeller of nonequilibrium fluctuations[J]. Lect Notes Phys, 1997, 484: 15-22.
- [25] 黄祖洽, 丁鄂江. 输运理论[M]. 北京: 科学出版社, 1987.
- [26] Grigolini P. Non-Markoffian excitation-relaxation processes[J]. Nuovo Cimento B, 1981, 63(1): 174-205.

- [27] 王参军. 非线性生物系统中的噪声和延迟效应[M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 2015.
- [28] Frank T D. Delay Fokker-Planck equations, perturbation theory, and data analysis for nonlinear stochastic systems with time delays[J]. *Phys Rev E*, 2005, 71: 031106.
- [29] Frank T D. Delay Fokker-Planck equations, Novikov's theorem, and Boltzmann distributions as small delay approximations[J]. *Phys Rev E*, 2005, 72(1): 011112.
- [30] Ohira T, Milton J G. Delayed random walks[J]. *Phys Rev E*, 1995, 52(3): 3277-3280.
- [31] Ohira T, Sato Y. Resonance with noise and delay[J]. *Phys Rev Lett*, 1999, 82(14): 2811-2815.
- [32] Guillouzic S, Heux I L, Lonhtin A. Small delay approximation of stochastic delay differential equations[J]. *Phys Rev E*, 1999, 59(4): 3970.
- [33] Guillouzic S, Heux I L, Lonhtin A. Rate processes in a delayed, stochastically driven, and overdamped system[J]. *Phys Rev E*, 2000, 61(5): 4906.
- [34] Tsimring L S, Pikovsky A. Noise-induced dynamics in bistable systems with delay[J]. *Phys Rev Lett*, 2001, 87(25): 250602-250605.
- [35] Smogyi R, Stucki J W. Hormone-induced calcium oscillations in liver cells can be explained by a simple one pool model[J]. *J Biol Chem*, 1991, 266(17): 11068-11077.
- [36] Ying Y J, Huang Z Q. Effects of time-delay on intracellular Ca^{2+} concentration oscillations[J]. *Chin Phys Lett*, 2001, 18(5): 695-697.
- [37] Masoller C. Distribution of residence times of time-delayed bistable systems driven by noise[J]. *Phys Rev Lett*, 2003, 90(2): 020601-020607.
- [38] Huber D, Tsimring L S. Dynamics of an ensemble of noisy bistable elements with global time delayed coupling[J]. *Phys Rev Lett*, 2003, 91: 260601.
- [39] Houlihan J, Goulding D, Busch T, et al. Experimental investigation of a bistable system in the presence of noise and delay[J]. *Phys Rev Lett*, 2004, 92(5): 050601.
- [40] Piwonski T, Houlihan J, Busch T, et al. Delay-induced excitability[J]. *Phys Rev Lett*, 2005, 95(4): 040601.
- [41] Wu D, Zhu S, Luo X. Effects of two different time delays on transport properties of coupled ratchets[J]. *EPL-Europhys Lett*, 2010, 91(4): 40007. 5.
- [42] Sun X, Nie L, Li P. Effect of time delay on current of symmetric Brownian motor[J]. *EPL-Europhys Lett*, 2011, 95(5): 50007.
- [43] Zeng C H, Sun Y L, Chen G X. The relaxation time of a bistable system with two different kinds of time delays[J]. *Mod Phys Lett B*, 2009, 23(18): 2281-2292.
- [44] Zeng C H, Zeng C, Gong A, et al. Effect of time delay in FitzHugh—Nagumo neural model with correlations between multiplicative and additive noises[J]. *Physica A*, 2010, 389(22): 5117-5127.
- [45] Curtin D, Hegarty S P, Goulding D, et al. Distribution of residence times in bistable noisy systems with time-delayed feedback[J]. *Phys Rev E*, 2004, 70: 031107. 4.
- [46] Masoller C. Noise-induced resonance in delayed feedback systems[J]. *Phys Rev Lett*, 2002, 88(3): 034102.

- [47] Janson N B, Balanov A G, Schöll E. Delayed feedback as a means of control of noise-induced motion[J]. *Phys Rev Lett*, 2004, 93(1): 010601.
- [48] Yang R, Song A. Effect of positive feedback with threshold control on stochastic resonance of bi-stable systems[J]. *Int J Mod Phys B*, 2012, 26(3): 1250019.
- [49] To T L, Maheshri N. Noise can induce bimodality in positive transcriptional feedback loops without bistability[J]. *Sci*, 2010, 327(5969): 1142-1145.
- [50] Zhang X P, Cheng Z, Liu F, et al. Linking fast and slow positive feedback loops creates an optimal bistable switch in cell signaling[J]. *Phys Rev E*, 2007, 76(3): 031927.
- [51] Tang J, Yang X, Ma J, et al. Noise effect on persistence of memory in a positive-feedback gene regulatory circuit[J]. *Phys Rev E*, 2009, 80(1): 011907.
- [52] Tian X J, Zhang X P, Liu F, et al. Interlinking positive and negative feedback loops creates a tunable motif in gene regulatory networks[J]. *Phys Rev E*, 2009, 80(1): 011926.
- [53] Zeng C H, Wang H. Noise-and delay-induced phase transitions of the dimer-monomer surface reaction model[J]. *Chem Phys*, 2012, 402: 1-5.
- [54] Mei D C, Du L C, Wang C J. The effects of time delay on stochastic resonance in a Bistable system with correlated noises[J]. *Stat Phys*, 2009, 137(4): 625-638.

第 2 章 随机延迟动力学理论

随机力与时间延迟的结合是自然界的普遍规律，改变系统的动力学可使系统产生许多更丰富、更复杂的动力学行为。本章概述本书所需随机延迟动力学基础知识及研究方法，包括理论分析和随机模拟两个部分。理论分析部分介绍了从朗之万方程到福克尔-普朗克 (Fokker-Planck) 方程的推导及噪声、关联噪声等基本概念。随机模拟部分介绍了从朗之万方程出发利用计算机对参量进行直接模拟的方法。通常，随机模拟也被认为是对理论分析的良好检验。

2.1 理论分析

一维随机系统在单一噪声作用下，其典型动力学方程具有如下形式：

$$\frac{dq}{dt} = h(q) + g(q)\eta(t). \quad (2.1)$$

式中， q 是我们感兴趣的物理量； $\eta(t)$ 是噪声； $h(q)$ 和 $g(q)$ 是已知函数。

用朗之万方程对系统做随机处理时，除给定朗之万方程如式 (2.1) 外，还需要对噪声的统计性质作进一步的假设，以此为基础求解问题。一种常用的假设：噪声 $\eta(t)$ 是高斯噪声。高斯噪声是指概率密度函数服从正态分布（即高斯分布）的一类噪声，其一维概率密度函数可用数学表达式表示为

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (2.2)$$

从式 (2.2) 可知，高斯噪声的分布函数完全由平均值 a 和噪声方差 σ^2 确定，此外其高阶矩满足伊塞利 (Isserlis) 定理^[1]，即对于 $2n$ 个 $\eta(t)$ ，有

$$\langle \eta(t_1)\eta(t_2)\cdots\eta(t_{2n}) \rangle = \sum \prod_{k_i < k_j} \langle \eta(t_{k_i})\eta(t_{k_j}) \rangle.$$

对各种可能的方式组成的二阶矩乘积进行求和。而对奇数个 $\eta(t)$ ，有

$$\langle \eta(t_1)\eta(t_2)\cdots\eta(t_{2n+1}) \rangle = 0.$$

噪声的有限平均值 a 可以合并到 $h(q)$ 中，所以通常采用零平均高斯噪声的假设^[2]。