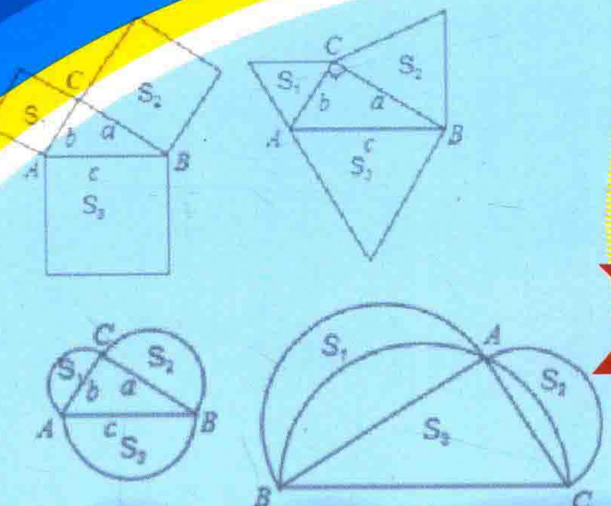
中考满分教程

我爱压轴题



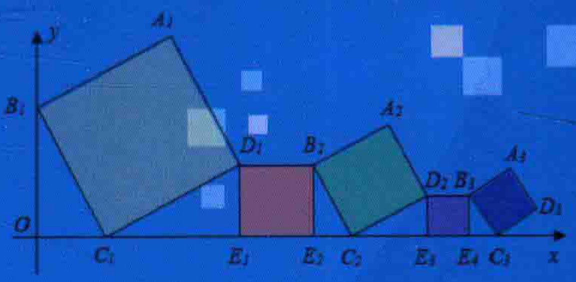
中考数学

选择、填空压轴题

百题冲刺

郑德坤　沈丹　主编

清华大学出版社



清华大学出版社数字出版网站

WQBook 书文局泉

www.wqbook.com

ISBN 978-7-302-46930-8

9 7873

定价

（含

我爱压轴题

中考数学选择、填空压轴题百题冲刺

郑德坤 沈丹 主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书精选近五年中考数学试题中的100道题为典型例题，并对应100道变式练习，全面总结了中考数学选择、填空压轴题的出题方向及考查类型，同时归纳了各种数学思想方法及解题技巧，并提供四套综合训练试题供考生进行实战演练，希望可以帮助广大考生在短期内突破中考数学选择题与填空题的最后一道题，获得理想的分数.

图书在版编目(CIP)数据

我爱压轴题. 中考数学选择、填空压轴题百题冲刺/郑德坤，沈丹主编. —北京：清华大学出版社，2017

ISBN 978-7-302-46930-8

Ⅰ. ①我… Ⅱ. ①郑… ②沈… Ⅲ. ①中学数学课—初中—习题集—升学参考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第074542号

责任编辑：赵铁华
封面设计：常雪影
责任校对：赵琳爽
责任印制：杨　艳

出版发行：清华大学出版社
　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京富博印刷有限公司
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：13.5　　**字　　数**：308千字
版　　次：2017年5月第1版　　**印　　次**：2017年5月第1次印刷
印　　数：1～2000
定　　价：39.80元

产品编号：074130-01

FOREWORD 前 言

考试的目的就是为了得分，如何在考试中得高分、得满分，这是很重要的. 我们要巧妙地复习，保证减负高效，争取更多的时间.

我们可以发现历年中考数学试题中选择、填空压轴题有以下几个特点.

(1) 常考的内容是函数的性质、几何证明、新定义问题、找规律等.

(2) 部分城市中考试题重复出现，被直接引用或者适当改编.

(3) 万变不离其宗，考查知识点、解题思路方法类似.

为了帮助广大考生突破选择、填空压轴题，在中考中获得更优异的成绩，特别编写了本书. 本书从近 1000 套试卷，2000 道选择、填空压轴题中，精选 200 多道题目. 确保题目典型、常见的同时，兼顾方法的覆盖. 针对中考数学试题命题的特点和趋势，本书有以下几个重要特点.

(1) 选题经典：精选 100 道代表性例题组成 7 个专题，精讲精练.

(2) 选题新颖：精选自近五年的中考试题.

(3) 方法全面：方法、技巧归纳总结全面，一题多解，解析详细.

(4) 内容实用：思想技巧篇介绍数学思想方法，选择题、填空题的解题技巧. 综合训练篇可以检测学习水平，也可以作为冲刺训练.

我们深入题海的目的是为了让大家摆脱题海，希望通过本书的学习，让大家的思路更加清晰，遇到难题的时候都可以找到切入点并迎刃而解.

本书在编写过程中，吸收了很多一线教师的建议，做了很多的改进，但难免存在疏漏之处. 我们真诚希望大家在使用过程中，提出宝贵的意见和建议，使本书更加丰富、实用，帮助更多考生实现理想！

编　者

2017 年 3 月

CONTENTS 目录

PART

1

第一部分

百题精讲精练

专题一 数 与 式

001 定义新运算

典型例题

例 001.（13 定西）现定义运算“★”，对于任意实数 a,b，都有 $a★b=a^2-3a+b$，如：$3★5=3^2-3\times3+5$. 若 $x★2=6$，则实数 x 的值是________.

【解析】

$\because a★b=a^2-3a+b$，

$\therefore x★2=x^2-3x+2=6$，即 $x^2-3x-4=0$，解得 $x_1=4,x_2=-1$，

则实数 x 的值是 -1 或 4.

故答案为：-1 或 4.

【总结】 根据新定义表示出 $x★2$，即可建立等量关系求出 x 的值.

拓展延伸

“新定义”问题，主要是指在问题中定义了初中数学中没有学过的一些新概念、新运算、新符号，要求学生读懂题意并结合已有知识、能力进行理解，根据新定义进行运算、推理、迁移的一种题型.

常见的定义新运算有以下几种.

(1) 在平面直角坐标系中，对于平面内任意一点 (x,y)，规定以下两种变换.

① $f(x,y)=(y,x)$. 如 $f(2,3)=(3,2)$.

② $g(x,y)=(-x,-y)$，如 $g(2,3)=(-2,-3)$.

(2) 规定符号 $[m]$ 表示一个实数 m 的整数部分，例如：$\left[\dfrac{2}{3}\right]=0$，$[3.14]=3$.

(3) 现定义运算“★”，对于任意实数 a,b，都有 $a★b=a^2-3a+b$.

(4) 对于实数 a,b，定义运算“$*$”：$a*b=\begin{cases}a^2-ab(a\geqslant b)\\ ab-b^2(a<b)\end{cases}$.

(5) 对于点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，定义一种运算：$A\oplus B=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)$. 例如：$A(-5,4)$，$B(2,-3)$，$A\oplus B=(-5+2)+(4-3)=-2$.

(6) 对非负实数 x“四舍五入”到个位的值记为 $<x>$，即当 n 为非负整数时，若 $n-\dfrac{1}{2}\leqslant x<n+\dfrac{1}{2}$，则 $<x>=n$，例如：$<0.46>=0$，$<3.67>=4$.

(7) 对于实数 a,b,定义一种运算“$\otimes$”为：$a\otimes b=a^2+ab-2$.

(8) 定义符号 $\min\{a,b\}$ 的含义为：当 $a\geqslant b$ 时，$\min\{a,b\}=b$；当 $a<b$ 时，$\min\{a,b\}=a$. 例如：$\min\{1,-3\}=-3$，$\min\{-4,-2\}=-4$.

举一反三

001.（16 岳阳）对于实数 a,b，我们定义符号 $\max\{a,b\}$ 的意义为：当 $a\geqslant b$ 时，$\max\{a,b\}=a$；当 $a<b$ 时，$\max\{a,b\}=b$. 例如：$\max\{4,-2\}=4$，$\max\{3,3\}=3$. 若关于 x 的函数为 $y=\max\{x+3,-x+1\}$，则该函数的最小值是（　　）.

A. 0　　B. 2　　C. 3　　D. 4

002　与高中知识点有关的新定义问题

典型例题

例 002.（14 常德）阅读理解：如图 1.1.1 所示，在平面内选一定点 O，引一条有方向的射线 Ox，再选定一个单位长度，那么平面上任一点 M 的位置可由 $\angle MOx$ 的度数 θ 与 OM 的长度 m 确定，有序数对 (θ,m) 称为 M 点的“极坐标”，这样建立的坐标系称为“极坐标系”.

应用：在图 1.1.2 的极坐标系下，如果正六边形的边长为 2，有一边 OA 在射线 Ox 上，则正六边形的顶点 C 的极坐标应记为（　　）.

A. $(60°,4)$　　B. $(45°,4)$　　C. $(60°,2\sqrt{2})$　　D. $(50°,2\sqrt{2})$

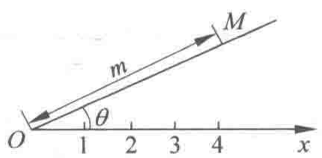


图 1.1.1

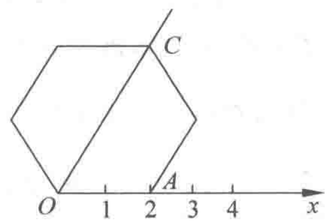


图 1.1.2

【解析】

如图 1.1.3 所示，设正六边形的中心为 D，连接 AD.

$\because \angle ADO=360°\div 6=60°$，$OD=AD$，

$\therefore \triangle AOD$ 是等边三角形，$\therefore OD=OA=2$，$\angle AOD=60°$，

$\therefore OC=2OD=2\times 2=4$，

$\therefore$ 正六边形的顶点 C 的极坐标应记为 $(60°,4)$.

故答案为：A.

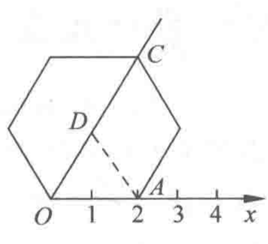


图 1.1.3

【总结】 根据题意，求出 $\angle AOC$ 的度数与 OC 的长度，即可表示出点 C 的极坐标.

拓展延伸

常见的与高中知识点有关的新定义问题有以下几种.

(1) 我们知道,一元二次方程 $x^2=-1$ 没有实数根,即不存在一个实数的平方等于-1.若我们规定一个新数“i”,使其满足 $i^2=-1$(即方程 $x^2=-1$ 有一个根为 i),并且进一步规定:一切实数可以与新数进行四则运算,且原有运算律和运算法则仍然成立,于是有 $i^1=i$,$i^2=-1$,$i^3=i^2\cdot i=-i$,$i^4=(i^2)^2=1$.

(2) 一般地,我们把研究对象统称为元素,把一些元素组成的总体称为集合.一个给定集合中的元素是互不相同的,也就是说,集合中的元素是不重复出现的.如一组数 1,1,2,3,4 就可以构成一个集合,记为 $A=\{1,2,3,4\}$.

类比实数有加法运算,集合也可以“相加”.集合 A 与集合 B 中的所有元素组成的集合称为集合 A 与集合 B 的和,记为 $A+B$.

(3) 规定:$\sin(-x)=-\sin x$,$\cos(-x)=\cos x$,$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y$.

(4) 一般地,从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素,按照一定的顺序排成一列,叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列(arrangement).

从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有不同排列的个数叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数,用符号 A_n^m 表示.公式 $A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m-1)$,这里,$n,m\in\mathbf{N}^*$,并且 $m\leqslant n$,这个公式叫作排列数公式.

(5) 正整数 1 到 n 的连乘积,叫作 n 的阶乘,用 $n!$ 表示.n 个不同元素的全排列数公式可以写成 $A_n^n=n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1$.另外规定 $0!=1$.

(6) 一般地,从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素合成一组,叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合(combination).

从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有不同组合的个数叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数,用符号 C_n^m 表示.公式 $C_n^m=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m-1)}{m!}$,这里,$n,m\in\mathbf{N}^*$,并且 $m\leqslant n$,这个公式叫作组合数公式.

举一反三

002. (13 永州)我们知道,一元二次方程 $x^2=-1$ 没有实数根,即不存在一个实数的平方等于-1.若我们规定一个新数“i”,使其满足 $i^2=-1$(即方程 $x^2=-1$ 有一个根为 i).并且进一步规定:一切实数可以与新数进行四则运算,且原有运算律和运算法则仍然成立,于是有 $i^1=i$,$i^2=-1$,$i^3=i^2\cdot i=-i$,$i^4=(i^2)^2=1$.从而对于任意正整数 n,我们可以得到 $i^{4n+1}=i^{4n}\cdot i=(i^4)^n\cdot i=i$,同理可得 $i^{4n+2}=-1$,$i^{4n+3}=-i$,$i^{4n}=1$.那么 $i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{2012}+i^{2013}$ 的值为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. i

003　定义新概念

典型例题

例 003.（14 泰州）如果三角形满足一个角是另一个角的 3 倍，那么我们称这个三角形为“智慧三角形”. 下列各组数据中，能作为一个智慧三角形三边长的一组是（　　）.

A. 1，2，3　　B. $1,1,\sqrt{2}$　　C. $1,1,\sqrt{3}$　　D. $1,2,\sqrt{3}$

【解析】

（1）$\because 1+2=3$，不能构成三角形，故选项 A 错误.

（2）$\because 1^2+1^2=(\sqrt{2})^2$，是等腰直角三角形，故选项 B 错误.

（3）$\because$ 底边上的高是 $\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$，可知是顶角 120°，底角 30°的等腰三角形，故选项 C 错误.

（4）$\because 1^2+(\sqrt{3})^2=2^2$，易得该三角形是三个角分别是 90°，60°，30°的直角三角形，其中 $90°\div 30°=3$，符合“智慧三角形”的定义，故选项 D 正确.

故答案为：D.

【总结】 根据三角形三边的大小关系得到角的关系，需要利用特殊三角形三边的关系求出对应三角形的角度. 本题可以使用排除法逐一排除错误的答案.

拓展延伸

常见的定义新概念问题有以下几种.

（1）在 $\triangle ABC$ 中，P 是 AB 上的动点（P 异于 A，B），过点 P 的直线截 $\triangle ABC$，使截得的三角形与 $\triangle ABC$ 相似，我们不妨称这种直线为过点 P 的 $\triangle ABC$ 的相似线，简记为 $P(l_x)$（x 为自然数）.

（2）定义：直线 l_1 与 l_2 相交于点 O，对于平面内任意一点 M，点 M 到直线 l_1，l_2 的距离分别为 p，q，则称有序实数对（p，q）是点 M 的“距离坐标”.

（3）连接一个几何图形上任意两点间的线段中，最长的线段称为这个几何图形的直径.

（4）当三角形中一个内角 α 是另一个内角 β 的两倍时，我们称此三角形为“特征三角形”，其中 α 称为“特征角”.

（5）如图 1.1.4 所示，在 10×10 的网格中，每个小方格都是边长为 1 的小正方形，每个小正方形的顶点称为格点. 若抛物线经过图中的三个格点，则以这三个格点为顶点的三角形称为抛物线的“内接格点三角形”.

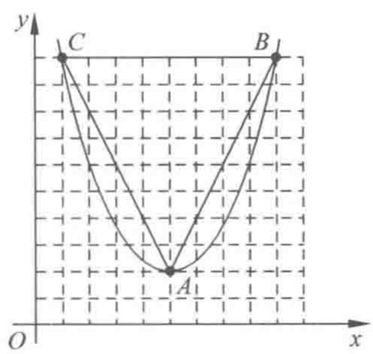


图　1.1.4

(6) 在平面直角坐标系 xOy 中，对于点 $P(x,y)$，我们把点 $P'(-y+1,x+1)$ 叫作点 P 的“伴随点”.

(7) 如果三角形满足一个角是另一个角的 3 倍，那么我们称这个三角形为“智慧三角形”.

(8) 对于平面直角坐标系中任意两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，称 $|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$ 为 P_1，P_2 两点的直线距离.

(9) 统计学规定：某次测量得到 n 个结果 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，当函数 $y=(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\cdots+(x-x_n)^2$ 取最小值时，对应 x 的值称为这次测量的“最佳近似值”.

(10) 已知点 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，且它到三角形的三个顶点距离之和最小，则 P 点叫作 $\triangle ABC$ 的费马点(Fermat point). 已经证明：在三个内角均小于 $120°$ 的 $\triangle ABC$ 中，当 $\angle APB=\angle APC=\angle BPC=120°$ 时，P 就是 $\triangle ABC$ 的费马点.

举一反三

003. (16 常德)平面直角坐标系中有两点 $M(a,b)$，$N(c,d)$，规定 $(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$，则称点 $Q(a+c,b+d)$ 为 M,N 的“和点”. 若以坐标原点 O 与任意两点及它们的“和点”为顶点能构成四边形，则称这个四边形为“和点四边形”. 现有点 $A(2,5)$，$B(-1,3)$，若以 O,A,B,C 四点为顶点的四边形是“和点四边形”，则点 C 的坐标是________.

004 流 程 图

典型例题

例 004. (13 湘潭)根据图 1.1.5 所示程序计算，若输入 $x=\sqrt{3}$，则输出结果为________.

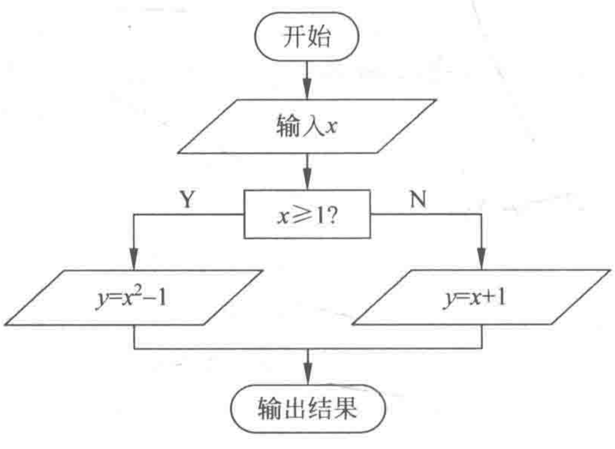


图 1.1.5

【解析】

$\because x=\sqrt{3}>1$，$\therefore y=(\sqrt{3})^2-1=3-1=2$.

故答案为：2.

【总结】 从上至下观察流程图，了解整个流程，通过判定“$x\geqslant 1$”是否成立，得到相应的结论.

拓展延伸

流程图(程序框图)是一种用规定的图形、指向线及文字说明来准确、直观地表示算法的图形.

举一反三

004.（16 青岛）输入一组数据，按图 1.1.6 所示的程序进行计算，输出结果如表 1.1.1 所示.

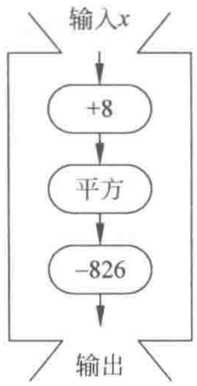


图　1.1.6

表　1.1.1

x	20.5	20.6	20.7	20.8	20.9
输出	−13.75	−8.04	−2.31	3.44	9.21

分析表格中的数据，估计方程$(x+8)^2-826=0$的一个正数解 x 的大致范围为(　　).

A. $20.5<x<20.6$　　B. $20.6<x<20.7$

C. $20.7<x<20.8$　　D. $20.8<x<20.9$

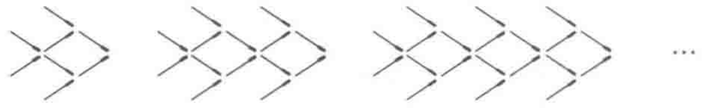
005　等差数列

典型例题

例 005.（13 遂宁）为庆祝“六一”儿童节，某幼儿园举行用火柴棒摆“金鱼”比赛. 如图 1.1.7 所示. 按照图中的规律，摆第(n)个图，需用火柴棒的根数为________.

【解析】

第(1)个图形有 8 根火柴棒，第(2)个图形有 14 根火柴棒，第(3)个图形有 20 根火柴棒，…，第(n)个图形有 $6n+2$ 根火柴棒.



(1) (2) (3)

图 1.1.7

故答案为：$6n+2$.

【总结】 观察图形，得出火柴棒的数目，发现相邻两个图形增加 6 根火柴棒，可得这是等差数列的规律. 利用高中数学中等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$，得 $a_n=8+6(n-1)=6n+2$.

拓展延伸

按照一定顺序排列着的一列数称为数列(sequence of number)，数列中的每一个数叫作这个数列的项. 数列中的每一项都和它的序号有关，排在第 1 位的数称为这个数列的第 1 项(通常也叫作首项)，排在第 2 位的数称为这个数列的第 2 项，…，排在第 n 位的数称为这个数列的第 n 项. 所以，数列的一般形式可以写成

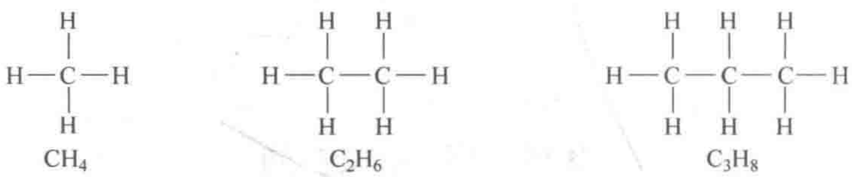
$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

简记为 $\{a_n\}$. 项数有限的数列叫作有穷数列，项数无限的数列叫作无穷数列.

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，那么这个数列就叫作等差数列(arithmetic sequence)，这个常数叫作等差数列的公差(common difference)，公差通常用字母 d 表示.

举一反三

005. (13 崇左)如图 1.1.8 所示是三种化合物的结构式及分子式. 请按其规律，写出后面第 2013 种化合物的分子式________.



CH_4 C_2H_6 C_3H_8

图 1.1.8

006 等差数列求和

典型例题

例 006. (13 昭通)图 1.1.9 中每一个小方格的面积为 1，则可根据面积计算得到如

下算式：$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=$________(用 n 表示，n 是正整数).

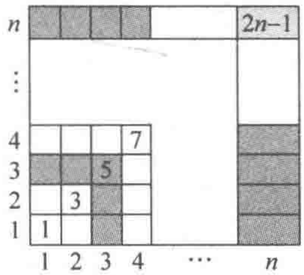


图　1.1.9

【解析】

利用每个小方格的面积为 1，可以得出：

$1+3=4=2^2$，$1+3+5=9=3^2$，$1+3+5+7=16=4^2$，…，$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$.

故答案为：n^2.

【总结】 本题利用正方形的面积来求等差数列的前 n 项和.通过观察易发现，从每个数字开始分别往左往下数，得到的正方形数目恰好等于这个数字，易得所有正方形的面积恰好等于所有正方形的个数.根据面积公式即可求出题目中算式的值.本题也可以利用高中等差数列的前 n 项和的公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，代入得出结论.

举一反三

006.（16 安顺）观察下列砌钢管的横截面(见图 1.1.10).

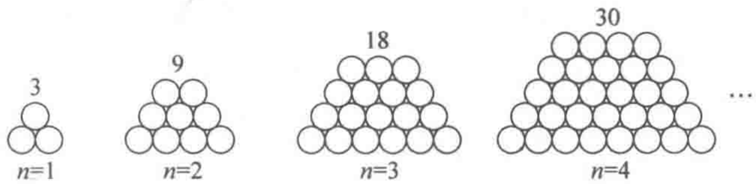


图　1.1.10

则第 n 个图的钢管数是________(用含 n 的式子表示).

007　等比数列

典型例题

例 007. 已知一列数 2，8，26，80，…，按此规律，则第 n 个数是________.（用含 n 的代数式表示）

【解析】

已知一列数 2，8，26，80，…，按此规律，则第 n 个数是 3^n-1.

故答案为：3^n-1.

【总结】 通过观察 $8-2=6$，$26-8=18$，$80-26=54$，发现这些差都是 3 的倍数，易发现这个规律和等比数列有关系，且 $2+1=3$，$8+1=9$，以此类推，可得第 n 个数是 3^n-1.

拓展延伸

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比等于同一个常数，那么这个数列就叫作等比数列(geometric sequence)，这个常数叫作等比数列的公比(common ratio)，公比通常用字母 q 表示($q\neq 0$).

举一反三

007.（16 内江）一组正方形按如图 1.1.11 所示的方式放置，其中顶点 B_1 在 y 轴上，顶点 C_1，E_1，E_2，C_2，E_3，E_4，C_3，…在 x 轴上，已知正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 1，$\angle B_1C_1O=60°$，$B_1C_1 /\!/ B_2C_2 /\!/ B_3C_3$，…则正方形 $A_{2016}B_{2016}C_{2016}D_{2016}$ 的边长是(　　).

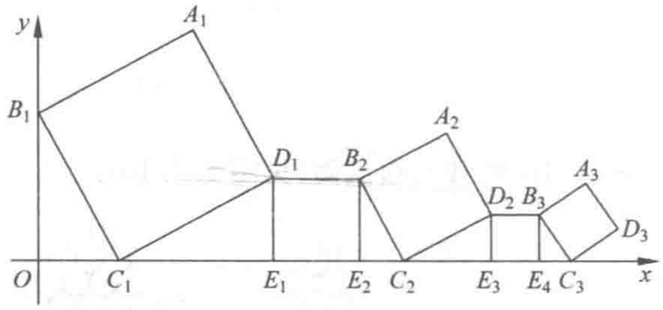


图 1.1.11

A. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2015}$　　B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2016}$　　C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2016}$　　D. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2015}$

008 等比数列求和

典型例题

例 008. 为了求 $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{100}$ 的值，可令 $S=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{100}$，则 $2S=2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{101}$，因此 $2S-S=2^{101}-1$，所以 $S=2^{101}-1$，即 $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{100}=2^{101}-1$，仿照以上推理计算 $1+3+3^2+3^3+\cdots+3^{2014}$ 的值是________.

【解析】

设 $S=1+3+3^2+3^3+\cdots+3^{2014}$. ①