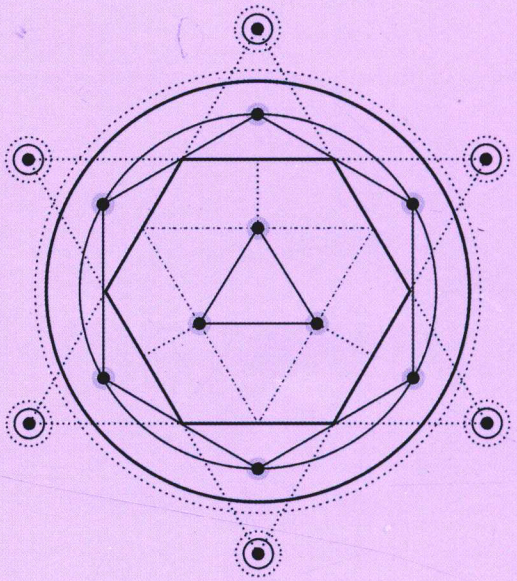
# 系统、稳定与控制基础

# Fundamentals of Systems Stability and Control

时宝 袁建 程业 著



中国工信出版集团
電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

# 系统、稳定与控制基础

时宝　袁建　程业　著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

## 内 容 简 介

本书系统地介绍了微分方程和控制理论及其应用。第一部分为预备知识，从集合和影射的基本概念开始，介绍度量空间和线性空间，以及回顾矩阵理论的一些重要结果和其他方面的一些基本知识；第二部分介绍非线性系统的一般理论和 Lyapunov 稳定性理论的系统理论；第三部分为线性系统的系统理论，先介绍时变系统，再介绍时不变系统，最后介绍线性系统理论知识；第四部分介绍离散系统（特别是与连续系统不同的内容）；第五部分是应用部分，分别介绍分数阶系统、时滞系统和多智能体系统。

本书读者需具备一定的矩阵分析基础知识。本书适合高等学校数学类专业和控制类专业高年级学生、理工类研究生和博士后研究人员学习和研究之用，也可供高等学校教师教学和科研参考。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有，侵权必究。

**图书在版编目（CIP）数据**

系统、稳定与控制基础 / 时宝等著 . — 北京 : 电子工业出版社 , 2020. 3
ISBN 978-7-121-38381-6

Ⅰ . ①系… Ⅱ . ①时… Ⅲ . ①非线性系统 ( 自动化 ) – 研究 Ⅳ . ① TP271

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2020）第 021846 号

责任编辑：张正梅 特约编辑：欧阳光 郭伟 等
印　　刷：三河市君旺印务有限公司
装　　订：三河市君旺印务有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编 100036
开　　本：720 × 1 000　1/16　印张：38　字数：723 千字
版　　次：2020 年 3 月第 1 版
印　　次：2020 年 3 月第 1 次印刷
定　　价：168.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题者，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888、88258888。

质量投诉请发电子邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发电子邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：（010）88254757。

# 编著者的话

J. Poincaré[①]在 1908 年的 *Science and method* 中指出: "The true method of foreseeing the future of mathematics is to study its history and its actual state" (若要预见数学的未来, 适当的途径就是研究这门科学的历史和现状). Sir Dampier[②]曾经说过: "再没有什么故事能比科学思想发展的故事更有魅力了." 陈省身[③]也指出: "了解历史的变化是了解这门科学的一个步骤." H. Weyl[④]也说过: "如果不去追溯自古希腊以来各个时代所发现与发展起来的概念、方法和结果, 我们就不能理解前 50 年数学的目标, 也不能理解它的成就."

本书从讲述微分方程和控制理论的历史开始, 感受学习乐趣, 树立科学精神.

① Jules Henri Poincaré (1854.04.29-1912.07.17), 法国人, C. Hermite 的学生, 被称为 "对数学及其应用具有全面知识的最后一个人", 1887 年当选为法国科学院院士 (1906 年任院长), 1894 年当选为皇家学会会员, 1897 年当选为荷兰皇家科学与人文院院士, 1908 年 3 月 5 日当选为法兰西研究院院士, 月球的一个火山口和其上的一座环形山, 以及第 2021 号小行星以其命名.

② Sir William Cecil Dampier (1867.12.27-1952.12.11), 英国人, 1901 年当选为皇家学会会员.

③ 陈省身 (Shiing-shen Chern, 1911.10.26-2004.12.03), 浙江嘉兴人, W. Blaschke (Wilhelm Johann Eugen Blaschke, 1885.09.13-1962.03.17, 奥地利人) 的学生, 杨振宁 (Chen-ning Franklin Yang, 1922.10.01-, 安徽肥西人) 赞其是 Euclid, J. Gauß, G. Riemann 与 É. Cartan 的继承开拓者, 1985 年当选为皇家学会会员, 1961 年当选为美国国家科学院院士, 1963 年当选为美国人文与科学院院士, 1971 年当选为巴西科学院院士, 1989 年当选为意大利国家科学院和法国科学院院士, 1994 年当选为中国科学院外籍院士, 2001 年当选为俄罗斯科学院院士, 1975 年获美国国家科学奖, 1984 年获 Wolf 数学奖, 分别创建 Mathematical Sciences Research Institute 和南开数学研究所.

④ Hermann Klaus Hugo Weyl (1885.11.09-1955.12.09), 德国人, D. Hilbert 的学生, 1936 年当选为皇家学会会员, 月球上的一座环形山以其命名. 儿子 F. Weyl (Fritz Joachim Weyl, 1915.02.19-1977.07.20) 也是一个著名数学家.

长久以来, 人们一直利用反馈来控制系统. 最早的反馈系统出现在公元前330 年的古希腊, 这种系统运用在一种改进的浮球控制器装置上. Ktesibios[①]的水钟就运用了浮球控制器的原理, 这项发明至今仍在使用. 李约瑟[②]在 *Science and civilisation in China* (中国科学技术史) 中称其为 "中国古代最伟大的科学家之一". 大约在公元前 250 年, 为了使燃油在油泵中能保持恒定的液位, Philon[③]在一种油泵装置中采用了浮球控制器. Heron[④]的 "Pneumatica" 中有很多应用浮球控制器的例子.

在我国古代, 人们就凭借着对反馈概念的朴素认识, 发明了许多闪耀着控制理论智慧火花的杰作, 有了自动控制技术的萌芽. 两千多年前我国发明的指南针就是一种开环自动调节系统; 苏颂[⑤]和韩公廉[⑥]利用天衡装置制造的水运仪象台, 就是按负反馈原理构成的一个闭环非线性自动控制系统.

微分方程是伴随着微积分学一起发展起来的学科. 1614 年, Sir Napier[⑦]创立对数时讨论过微分方程的近似解. da Vinci[⑧]的饿狼扑兔问题涉及了微分方程的思想. Sir Newton[⑨]和 von Leibniz[⑩]在创建微积分时都处理过与微分方程有关的问题. 例如, Sir Newton 就给出了级数展开法和待定系数法, 在 *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* 中主要研究了在天文学中的应

---

① Ktesibios of Alexandria (公元前 285-222), 古希腊人, 被称为 "闭环控制理论之父". 希腊文: $Κτησιβιος\ ο\ Αλεξανδια$.

② Noel Joseph Terence Montgomery Needham (1900.12.09-1995.03.24), 英国人, 皇家学会会员, 英国学术院院士, 1994 年当选为中国科学院首批外籍院士.

③ Philon of Byzantium (公元前 280-220), 古希腊人. 希腊文: $Φιλωνι\ ο\ Βυζαντιον$.

④ Heron of Alexandria (10-75), 古希腊人, Heron 公式 $\left(S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\right)$ 是在 "Metrica" 中给出的, 其中 $a,b,c$ 是三角形三边边长, $p$ 是三角形半周长. 希腊文: $Ηρωνι\ ο\ Αλεξανδια$.

⑤ 苏颂 (辽圣宗天禧四年至宋徽宗建中靖国元年, 1020.12.10-1101.06.18), 字子容, 泉州同安 (福建厦门) 人, 宋真宗时任刑部和吏部尚书, 封太子太保、观文殿大学士、赵郡公, 追赠司空、魏国公, 谥正简.

⑥ 苏颂任吏部尚书时的吏部守当官, 还参与制造了假天仪.

⑦ Sir Napier (1550-1617.04.04), 英国人, 月球上的一座环形山以其命名.

⑧ Leonardo da Vinci (1452.04.15-1519.05.02), 意大利人, 他说过: "一个人若怀疑数学的极端可靠性就是陷入混乱, 他永远不能平息诡辩科学中只会导致不断空谈的争辩 ····· 因为人们的探讨是不能称为科学的, 除非通过数学上的说明和论证." 月球和火星上的各一座环形山以其命名.

⑨ Sir Isaac Newton (1643.01.04-1727.03.31), 英国人, 与 Archimedes (Archimedes of Syracuse, 公元前 287-212, 古希腊人. 希腊文: $Αρχιμηδης\ ο\ Συρακοσαι$) 和 J. Gauß 并称为 "三大数学家", 被称为划时代的科学巨匠, 1669 年任 Lucas (Reverend Henry Lucas, 1610-1663.07, 1663 年设立 Lucas 教授职位) 教授, 1672 年当选为皇家学会会员 (1703-1727 年任会长), 1689 年当选为法国科学院院士, 1701 年, von Leibniz 说: "综观有史以来的全部数学家中, Sir Newton 做了一多半的工作", "力" 的单位和月球上的一座环形山以其命名. 反映其创立微积分发展过程的三部著作是 *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (数学史上了不起的八本著作之一), *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* 和 *Tratatus de quadratura curvarum*.

⑩ Freiherr Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646.07.01-1716.11.14), 德国人, J. Thomasius (Jakob Thomasius, 1622.08.27-1684.09.09, 德国人) 的学生, 被誉为 "17 世纪的 Aristotle (Aristotle, 公元前 384-公元前 322, 古希腊人. 希腊文: $Αριστοτελης$)", 引入变量、常数、函数、参数和坐标等术语, 创用符号 " $\sim$" 和 "$\cong$", 广泛使用了符号 "=", 反对用容易与 X 混淆的符号 "×", 赞成用符号 ".", 1679 年提出二进制, 1693 年提出行列式, 1673 年 4 月 19 日当选为皇家学会会员, 1700 年当选为法国科学院院士, 1700 年创建德国科学院, 还建议成立了彼得堡科学院. 反映其创立微积分发展过程的两部著作是 *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illi calculi genus* 和 *De geometria recondia et analysi indivisibilium atque infinitorum*. 月球上的一座环形山以其命名.

用. 1842 年, Baron de Cauchy[①]完善了待定系数法, 给出 "行列式" 术语. Sir Newton 在研究天体力学和机械动力学时发现了行星运动规律. le Verrier[②]和 J. Adams[③]分别计算出那时尚未发现的海王星的位置. 这使人们深信微分方程的巨大力量.

17 世纪末对单摆运动、弹性理论和天体力学等实际问题的研究引出了一系列微分方程. 1690 年, Jacob Bernoulli[④]提出了 "等周问题" "悬链线问题" 以及 "正交轨线问题", 他本人解决了 "等周问题". 1691 年, von Leibniz, C. Huygens[⑤] 和 Johann Bernoulli[⑥]独立地解决了 "悬链线问题". 1716 年, Sir Newton 解决了 "正交轨线问题"; 进一步的工作是 Nicolaus (II) Bernoulli[⑦]解决的; J. Hermann[⑧]于 1717 年给出了一般规则. 还是在 1691 年, Jacob Bernoulli 在研究船帆在风力下的形状问题, 即 "模盖问题" 时, 得到了一个二阶方程; Johann Bernoulli 处理了这个方程, 并指出 "模盖问题" 与 "悬链线问题" 问题在数学上是相同的. 1693 年, C. Huygens 明确说到了微分方程, 他还设计了单摆时钟, 研究了速度控制问题, 这是控制理论的近代发端. 那时, 航海对科技有着强烈的推动作用, 提出了准确时钟的需求.

有了微分方程, 就要求解, 并对结果进行物理解释, 从而预测物理过程的特定性质, 所以求解就成为核心问题. 但求解困难很大, 一个看似简单的微分方程也没有普遍适用的方法使人们在所有的情况下得出它的解. 因此, 人们起初还只是采用特殊的技巧来解决特殊的方程, 然后才逐渐开始寻找带有普遍性的方法.

1691 年, von Leibniz 提出分离变量法, 解决了一阶齐次方程的求解问题; 1694 年, 使用常数变易法把一阶微分方程化成积分; 1696 年又解决了 1695 年由 Jacob Bernoulli 提出的 "Bernoulli 方程"; 还曾试图利用变量代换方法统一

① Baron Augustin Louis Cauchy (1789.08.21-1857.05.23), 法国人, 被称为 "光辉的分析学家", 1816 年当选为法国科学院院士, 1831 年当选为瑞典皇家科学院院士, 1832 当选为美国人文与科学院院士和皇家学会会员, 月球上的一个断崖和一个裂缝以及上的一座环形山以其命名.

② Urbain Jean Joseph le Verrier (1811.03.11-1877.09.23), 法国人, 1847 年当选为皇家学会会员, 月球和火星上的各一座环形山, 木星的一个环形山和第 1997 号小行星以其命名.

③ John Couch Adams (1819.06.05-1892.01.21), 英国人, 1849 年当选为皇家学会会员, 还是美国人文与科学院院士, 月球上的一座环形山和第 1996 号小行星以其命名.

④ Jacob (Jacques, James) Bernoulli (1654.11.27-1705.08.16), 瑞士人, Bernoulli 家族长子, P. Werenfels (Peter Werenfels, 1627.05.20-1703.05.23, 瑞士人) 的学生, 1689 年证明调和级数的发散性, 1690 年提出积分术语, 1691 年发明极坐标, 1692 年引入坐标概念, 1713 年, 遗著 *Ars Conjectandi* 给出 Bernoulli 大数定律, 月球上的一座环形山以其命名.

⑤ Christiaan Huygens (1629.04.14-1695.07.08), 荷兰人, 1657 年引入数学期望概念, 1663 年当选为皇家学会会员, 创建法国科学院, 火星上的一座环形山以其命名.

⑥ Johann (Jean) Bernoulli (1667.07.27-1748.01.01), 瑞士人, Jacob Bernoulli 的弟弟与学生, 奠基变分法, 1694 年发现 L'Hôpital 法则, 1712 年当选为皇家学会会员, 月球上的一座环形山以其命名.

⑦ Nicolaus (II) Bernoulli (1695.02.06–1726.07.31), 瑞士人, Johann Bernoulli 长子, 1720 年证明了在一定条件下二阶混合偏导数与求导顺序无关.

⑧ Jakob Hermann (1678.07.16-1733.07.11), 瑞士人, Johann Bernoulli 的学生, 1733 年当选为法国科学院院士, 月球上的一座环形山以其命名.

解决一阶微分方程的求解问题. Jacob Bernoulli 和 Johann Bernoulli 也给出了各自解法, 本质上都是分离变量法.

1733 年, Daniel Bernoulli① 关于振动弦的工作引进了一阶 Bessel②方程; 1736 年, L. Euler③得到极为相似的结果, 但结果更数学化, 并得到任意阶的 Bessel 方程, 还用积分表达式求出了解, 这可能是二阶方程的解用积分来表达的第一个结果; 1739 年, 又研究了谐振子方程, 得到两种不同形式的特解 $2\cos x$ 和 $\mathrm{e}^{-x\mathrm{i}}+\mathrm{e}^{x\mathrm{i}}$, 并用级数展开的方法证明它们恒等, 而这使他得到了著名的 Euler 公式 $\mathrm{e}^{x\mathrm{i}}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$, 并重新发现了共振现象.

1734 年, L. Euler 给出了恰当方程的定义. 他和 A. Clairaut④找到了方程是恰当方程的条件. 1739 年, A. Clairaut 提出了积分因子法的概念, L. Euler 确定了可采用积分因子法的方程类属, 证明了凡能用分离变量法求解的方程都可用积分因子法求解, 但反之不然; 还证明对高阶方程用分离变量法求解是行不通的; 还曾试图利用积分因子的方法统一解决一阶微分方程的求解问题.

1736 年, L. Euler 出版的 *Mechanica* 是用微分方程分析方法发展 Sir Newton 质点动力学的第一本著作.

到 18 世纪中叶, 人们已经知道几乎所有求解一阶方程的初等方法.

1734 年, A. Clairaut 处理了 Clairaut 方程, 他给出了一个新的解, 从而提出了奇解的问题. 奇解是不能通过给积分常数以一个确定的值由通解来求得的. Marquis de Laplace⑤将奇解 (他称特殊解) 的概念推广到高阶方程.

---

① Daniel Bernoulli (1700.02.08-1782.03.17), 瑞士人, Johann Bernoulli 次子与学生, 1738 年中提出流体力学的基本定理之一——Bernoulli 定律, 奠基和开拓数理方程, 1725 年当选为彼得堡科学院名誉院士, 1747 年当选为德国科学院院士, 1748 年当选为法国科学院院士, 1750 年当选为皇家学会会员.

② Friedrich Wilhelm Bessel (1784.07.22-1846.03.17), 德国人, J. Gauß 的学生, 1812 年当选为德国科学院院士, 1825 年当选为皇家学会会员, 月球上的一座环形山以其命名.

③ Leonhard Euler (1707.04.15-1783.09.18), 瑞士人, Johann Bernoulli 的学生, 被称为 "应用数学大师" 和 "数学界的 Shakespeare (William Shakespeare, 1564.04.26-1616.04.23, 英国人)", 1736 年解决了 Königsberg (今俄罗斯的飞地 Kaliningrad) 七桥问题, 开创图论和拓扑学, 1737 年证明 e 是无理数, 1760 年的 "Recherches sur la courbure des surfaces" 是微分几何史上的一个里程碑, 1765 年奠基分析力学, 微积分史上里程碑式的三部著作是 *Introductio in Analysin infinitorum*, *Institutiones Caculi differentialis* 和 *Institutiones Caculi integralis* (书中引进了一批标准的符号, 如函数符号 $f(x)$, 求和符号 $\sum$, 自然对数底 e 和虚数单位 i 等), 1747 年当选为皇家学会会员, 1755 年当选为瑞典皇家科学院外籍院士, 1782 年当选为美国人文与科学院外籍院士, 还是彼得堡科学院院士, 月球上的一个裂缝和其上的一座环形山, 以及第 2002 号小行星以其命名, 头像印在瑞士 10 法郎上.

④ Alexis Claude Clairaut (1713.05.07-1765.05.17), 法国人, 给出曲线积分和全微分概念, 开创空间曲线理论, 是微分几何的重要一步, 1737 年当选为皇家学会会员, 月球上的一座环形山以其命名.

⑤ Pierre-Simon Marquis de Laplace (1749.03.23-1827.03.05), 法国人, J. d'Alembert 的学生, 被称为 "法国的 Newton", 1760 年给出 "变分" 概念, 曾任内政部长, 1789 年当选为皇家学会会员, 1806 年当选为瑞典皇家科学院院士, 1816 年当选为法兰西研究院院士 (一年后任院长), 月球上的一个岬以其命名. 遗言是 "我们知道的, 是很微小的; 我们不知道的, 是无限的".

1774 年, Comte de Lagrange[①]对奇解和通解的联系做了系统的研究, 他给出了从通解中消去常数, 从而得到奇解的一般方法. 但在奇解理论中, 有些特殊的困难他并没有认识到. 奇解的完整理论是于 19 世纪发展起来的, 其中 G. Riemann[②]做出了突出的贡献.

1728 年, 由于力学问题的推动, L. Euler 把一类二阶微分方程用变量替换成一阶微分方程组, 这标志着二阶方程系统研究的开始. Johann Bernoulli 和 L. Euler 还求解了 Euler 方程. 1743—1750 年, L. Euler 完整解决了高阶常系数线性齐次方程; 1750—1751 年, 对非齐次方程又提出了一种降阶的解法, 并最早区分了通解和特解. 1762—1765 年, Comte de Lagrange 引出伴随方程的概念, 推广了 L. Euler 于 1750—1751 年的部分结果, 还知道了高阶方程若已知 $m$ 个特解可将方程降低 $m$ 阶.

1754 年, Comte de Lagrange 在 "等周问题" 上取得重要进展, 开创了变分学.

早期研究中出现的一类重要的非线性方程是 Riccati[③]方程. 它最先是 J. Riccati 于 1723—1724 年通过变量代换从一个二阶方程降阶得到的一个一阶方程, 而这种降阶法后来成为处理高阶方程的主要手段; 1725 年, Daniel Bernoulli 用初等方法求解了一个特殊的 Riccati 方程; 1760—1761 年, L. Euler 证明在已知一个特解的情况下, 通过变换将一类 Riccati 方程化为线性方程. J. d'Alembert[④]最先研究了一般形式的 Riccati 方程. N. Abel[⑤]研究了 Abel 第一类和第二类方程的若干特殊类型[⑥], 特别对 Jacobi[⑦]方程得到了通解. 然而, J. Liouville[⑧]在 1841 年证明 Riccati 方程除某些特殊情形以外, 其通解不可能

① Joseph-Louis Comte de Lagrange (1736.01.25-1813.04.10), 法国人, L. Euler 的学生, 1756 年 9 月 2 日当选为德国科学院院士 (后任院长), 1772 年当选为法国科学院院士, 1776 年当选为彼得堡科学院名誉院士, 1791 年当选为皇家学会会员, 1806 年当选为瑞典皇家科学院院士, 月球上的一座环形山以其命名.

② Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826.09.17-1866.07.20), 德国人, J. Gauß 的学生, 1851 年引入 Riemann 曲面和 Riemann 可积概念; 1854 年提出 Riemann 几何, 为 A. Einstein 的广义相对论提供数学框架, 成为历史上数学应用最伟大的例子, 人们称其 "把数学向前推进了几代人的时间", 1859 年提出了迄今未解决的 Riemann 假设, 1866 年当选为皇家学会会员, 他的 *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* 是数学史上了不起的八本著作之一, 月球上的一座环形山以其命名.

③ Jacopo Francesco Riccati (1676.05.28-1754.04.15), 意大利人.

④ Jean Baptiste le Rond d'Alembert (1717.11.17-1783.10.29), 法国人, 1746 年提出波动方程, 1747 年开创偏微分方程理论, 1748 年当选为皇家学会会员, 1763 年提出广义波动方程, 月球上的一座环形山以其命名.

⑤ Niels Henrik Abel (1802.08.05-1829.04.06), 挪威人, 开创近世代数和椭圆函数论, 月球上的一座环形山以其命名.

⑥ 在这一工作中, N. Abel 实际上已经引入了 "域" 的概念.

⑦ Carl Gustav Jacob Jacobi (1804.12.10-1851.02.18), 德国人, E. Dirksen (Enno Heeren Dirksen, 1788.01.03-1850.07.16, 德国人) 的学生, 开拓椭圆函数论, 19 世纪 40 年代引入偏导数符号, 创造 "讨论班" 的教学形式, 1827 年当选为德国科学院院士, 1833 年当选为皇家学会会员, 1836 年当选为瑞典皇家科学院院士, 还是彼得堡科学院院士, 月球上的一座环形山以其命名.

⑧ Joseph Liouville (1809.03.24-1882.09.08), 法国人, Baron de Poisson (Siméon Denis Baron de Poisson, 1781.06.21-1840.04.25, 法国人) 的学生, 1836 年创办 "Journal de Mathématiques Pures et Appliquées", 称为 "Liouville 杂志", 开拓椭圆函数论, 1839 年 6 月当选为法国科学院院士, 1850 年当选为皇家学会会员, 1851 年当选为瑞典皇家科学院院士, 月球上的一座环形山以其命名.

用初等函数或初等函数的积分来表示. 另外, 在物理学和力学中所提出的微分方程问题, 大部分都要求满足某种附加条件的特解, 即定解问题的解. 这样, 人们不再去求通解, 转而开始从事定解问题的研究.

在 18 世纪前半叶, 微分方程的研究重点是对初等函数施行有限次代数运算、变量代换和不定积分把解表示出来; 到下半叶, 人们又讨论了求线性微分方程解的常数变易法和无穷级数解法等方法; 至世纪末, 微分方程已经成为有自己的目标和方法的新的数学分支. 而其最高成就是 Comte de Lagrange 在 1774—1775 年提出的常数变易法. 1780 年, 他讨论了平衡位置的稳定性问题. 1788 年出版的 *Traite de mécanique analytique* 中, 他将分析方法应用于质点和刚体力学, 总结了 Sir Newton 以来的结果, 重要的是应用微分方程将力学变成数学的一个分支. 他研究了微分方程的积分及在流体力学中的应用, 在木星和土星轨线研究中的应用, 也给出用特征值求解线性微分方程组的方法.

1600 年, C. Drebble[①]发明的温度控制器应该是现代意义的第一个反馈系统. 1681 年, D. Papin[②]发明了锅炉压力调节器. 1765 年, I. Polzunov[③]发明了蒸汽锅炉水位调节器. 1769 年, J. Watt[④]创造性地将离心式调速器用在了 T. Newcomen[⑤]发明的蒸汽机上, 普及了控制的应用, 并且由此引发了随后的工业革命.

在 18 世纪, 风力车的设计及其速度控制就是在 R. Hooke[⑥]和 C. Huygens 的思想基础上制造出来的. 最重要的工作是飞球作为反馈控制作用的使用.

人们用分离变量法求解二阶线性数理方程时提出了微分方程的边值问题. J. Liouville 在 1836—1837 年在微分方程边值问题的工作和 J. Sturm[⑦]在 1836 年的工作形成了 Sturm-Liouville 理论. 他们研究了一般的二阶线性微分方程特征值的性质、特征函数的性态和任意函数用这些特征函数进行级数展开. 1893 年, C. Picard[⑧]研究了特殊的边值问题. 1894 年, H. Burkhardt[⑨]又研究了一般边值条件下方程的边值问题, 并引入了 Green[⑩]函数的概念. 到 20 世

---

① Cornelis Jacobszoon Drebble (1572-1633.11.07), 荷兰人, 1620 年建造了世界上第一艘潜艇.

② Denis Papin (1647.08.22-1713.08.26), 法国人, 1682 年当选为皇家学会会员.

③ Ivan Ivanovich Polzunov (1726-1766), 俄罗斯人. 俄文: Иван Иванович Ползунов.

④ James Watt (1736.01.19-1819.08.25), 英国人. 功率的单位以其命名.

⑤ Thomas Newcomen (1664.02.24-1729.08.05), 英国人.

⑥ Robert Hooke (1635.07.18-1703.03.03), 英国人, R. Boyle (Robert Boyle, 1627.01.25-1691.12.31, 英国人) 的学生, 发现并命名了细胞, 1663 年当选为皇家学会会员, 月球和火星上的各一座环形山以其命名.

⑦ Jacques Charles François Sturm (1803.09.29-1855.12.18), 法国人, 1836 年当选为法国科学院院士, 1840 年当选为皇家学会会员.

⑧ Charles Émile Picard (1856.07.24-1941.12.11), 法国人, C. Hermite 的女婿, J. Darboux 的学生, 曾任法国数学会会长, 1889 年当选为法国科学院院士 (1917 年任终身秘书), 1909 年当选为皇家学会会员.

⑨ Heinrich Friedrich Karl Ludwig Burkhardt (1861.10.15-1914.11.02), 德国人.

⑩ George Green (1793.07-1841.05.31), 英国人, 开创剑桥数理学派, 月球上的一座环形山以其命名.

纪初, 由 D. Hilbert[①]和 M. Bôcher[②]奠基微分方程边值理论.

18 世纪用分离变量法解偏微分方程时引出了一系列的特殊函数, 如 1784 年, A. Legendre[①]在测定旋转椭球面在矢径方向的拉力时发现 Legendre 多项式; 1817 年, F. Bessel 在研究 J. Kepler[②]的在相互引力作用下决定三体问题时发现 Bessel 函数; 1837 年, G. Lamé[③]在研究椭球内稳态的热分布时发现 Lamé 函数等.

19 世纪初叶, 随着极限和连续性等严格概念和方法的建立, 极大推动了微分方程基础理论的发展. 1820 年, Baron de Cauchy 首先严格证明了在相当一般的条件下非线性系统解的存在惟一性, 1825 年开始对解的延拓等问题进行研究, 坚实奠基非线性系统理论. 1838 年, J. Liouville 在研究热传导方程时提出了逐次逼近法. 1876 年, R. Lipschitz[④]使用 "Lipschitz 条件" 简化了 Baron de Cauchy 关于非线性系统解的存在惟一性的证明. 1893 年, C. Picard 把 J. Liouville 的逐次逼近法应用到一般的非线性系统上来, 建立了 Cauchy-Picard 解的存在惟一性 (定理 2.2.1), 并给出了逐次逼近法的普遍形式, 逐步形成了非线性系统的一般理论. 这一理论无论对求解还是研究解的各种性质都是最基本的, 也是比较经典的方法.

人们很早就考虑了系统右端不满足 Lipschitz 条件的情况. 若只需保证解的存在性, 是否只要系统右端是连续的就足够了呢? 1768 年, L. Euler 最早考虑了一般微分方程解的存在性问题, 并提出了 Euler 折线法 (见 2.2.1 节). 1836 年, Baron de Cauchy 用优级数法证明了解析系数非线性系统解的存在性. 1890 年, G. Peano[⑤]又给出有两个解的例子. 1925 年, M. Lavrentyev[⑥]甚

---

① David Hilbert (1862.01.23-1943.02.14), 德国人, von Lindemann 的学生, 有 "无冕数学之王" 之称, 1899 年 *Grundlagen der Geometrie* 是数学史上了不起的八本著作之一, 其公理化思想已成为现代数学甚至某些物理领域中普遍使用的科学方法, 首次使用术语 "环", 1900 年提出 23 个数学问题, 1904-1910 年建立 Hilbert 空间理论, 1928 年当选为皇家学会会员, 月球上的一座环形山以其命名, 名言: 我们必须知道, 我们将会知道.

② Maxime Bôcher (1867.08.28-1918.09.12), 美国人, 1908 年创办 "Transactions of the American Mathematical Society", 1909-1910 年任美国数学会会长, 1909 年当选为美国国家科学院院士.

① Adrien-Marie Legendre (1752.09.18-1833.01.10), 法国人, 1783 年当选为法国科学院助理院士 (两年后为正式院士), 1789 年当选为皇家学会会员, 1795 年当选为法兰西研究院常任院士, 1811 年、1817 年和 1819 年的三卷书 *Exercices du calcul intégral* 奠基椭圆积分理论, 1832 年当选为美国人文与科学院外籍院士, 月球上的一座环形山和第 26950 号小行星以其命名.

② Johannes Kepler (1571.12.27-1630.11.15), 德国人, 1609 年提出行星运动三大定律, 奠基天体力学, 月球和火星上的各一座环形山以其命名.

③ Gabriel Lamé (1795.07.22-1870.05.01), 法国人.

④ Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832.05.14–1903.10.07), 德国人.

⑤ Giuseppe Peano (1858.08.27-1932.04.20), 意大利人, E. D'Ovidio (Enrico D'Ovidio, 1842.08.11-1933.03.21, 意大利人) 的学生, 1889 年给出 Peano 公理; 1890 年构造充满正方形的连续曲线例子.

⑥ Mikhail Alekseevich Lavrentyev (1900.11.19–1980.10.15), 俄罗斯人, N. Luzin (Nikolai Nikolaevich Luzin, 1883.12.09-1950.02.25, 俄罗斯人. 俄文: Николай Николаевич Лузин) 的学生, 五次获列宁奖, 1957 年当选为捷克科学院院士, 1957-1975 年任苏联科学院副院长, 1966 年当选为保加利亚科学院院士, 1969 当选为德国科学院院士和芬兰科学与人文院院士, 1971 年当选为法国科学院院士和波兰科学院院士. 俄文: Михайл Алексеевич Лаврентьев.

至指出可能有无穷多解的情况. 1892 年, G. Peano 第一次对解的存在性给出了正面的回答, 给出了 Cauchy-Peano 解的存在性 (定理 2.2.3). 1896 年, E. Lindelöf[①]得到了最好的优级数, 还在 1899 年证明了隐函数定理 (定理 6.8.1).

离心式调速器虽然普及了控制的应用, 但随之而来的是稳态误差的出现, 使得其变得太不可靠了, 引起工程师和科学家们引入积分反馈来试图解决这些问题. 大约在 1840 年, Sir Airy[②]第一个试图研究调节器及类似的装置. 到 1868 年, 已经开始使用 75 000(W) 的调节器. 同年, J. Maxwell[③]在 "On Governors" 中第一个引入反馈概念成功阐明了蒸汽机调速器的数学理论并进行了完整的处理, 开辟了用数学方法研究控制系统的途径, 引起了第一波对控制问题的理论研究, 从而开创了经典控制理论.

这一时期发展起来的控制理论不对控制的内部状态做具体的研究, 而只从系统的外部联系上去把握系统的行为, 系统的描写采用所谓的 "黑箱模型", 即

$$\boxed{\text{输入}} \Longrightarrow \boxed{\text{黑箱}} \Longrightarrow \boxed{\text{输出}}$$

"稳定性" 一词来源于拉丁文 "stabilitas", 其含义是 "恒定性". 17 世纪中叶, 人们就曾研究太阳系的稳定性问题, 即随着时间的无限增大, 行星是否会无限接近或远离太阳, 或处于稳定状态中. 1644 年, E. Torricelli[④]给出了 Torricelli 原理. 后来, Marquis de Laplace 证明了太阳系的稳定性, 并提出 Laplace 方程; 1788 年, Comte de Lagrange 也证明了太阳系的稳定性, 建立了力学系统孤立平衡的稳定性定理. J. Dirichlet[⑤]第一个给出证明, 奠基近代力学. 事实上, J. Poincaré 证明以往研究三体问题时所用的级数是收敛的, 但不是一致收敛的. 例如, C. Delaunay[⑥]所使用的级数就是如此. 这样, Marquis de Laplace 和 Comte de Lagrange 关于太阳系的稳定性证明还是值得怀疑了.

1868 年, J. Maxwell 关于离心调速系统的研究以及 Lord Kelvin[⑦]和 P.

---

① Ernst Leonard Lindelöf (1870.03.07–1946.06.04), 芬兰人.

② Sir George Biddell Airy (1801.07.27-1892.01.02), 英国人, G. Peacock (George Peacock, 1791.04.09-1858.11.08, 英国人) 的学生, 1826 年任 Lucas 教授, 1836 年当选为皇家学会会员 (1971-1873 年任皇家学会会长), 月球与火星上的各一座环形山以其命名.

③ James Clerk Maxwell (1831.06.13-1879.11.05), 英国人, 1873 年提出 Maxwell 方程, 开创经典电磁场理论, 1861 年当选为皇家学会会员, 月球上的一座环形山以其命名.

④ Evangelista Torricelli (1608.10.15-1647.10.25), 意大利人, 以发明气压计而闻名, von Leibniz 曾说: "Torricelli 在特殊的例子中看到了变化率本质上是面积的反问题 ····· 但是他没有看到普遍情况." 故他的工作只差一步便迈进了微积分的重要领域, 月球上的一座环形山以其命名.

⑤ Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805.02.13-1859.05.05), 德国人, Baron de Fourier 和 Baron de Poisson 的学生, 奠基 Fourier 级数理论和解析数论, 1829 年给出著名的 Dirichlet 函数, 1855 年当选为皇家学会会员, 月球上的一座环形山以其命名.

⑥ Charles Eugène Delaunay (1816.04.09-1872.08.05), 法国人, 1869 当选为皇家学会会员, 月球上的一座环形山以其命名.

⑦ William Thompson Lord Kelvin (1824.06.26-1907.12.17), 英国人, 奠基热力学, 1851 年当选为皇家学会会员 (1890-1895 年任会长).

Tait[①]也采用过稳定性的概念, 但都没有给出稳定性的精确定义. E. Routh[②]在1877 年给出了某些循环运动稳定性的判别法; 1895 年, A. Hurwitz[③]也提出了Routh-Hurwitz 判据 (定理 5.1.4). 但这些工作都没有在理论上解决一般稳定性问题. 至于对某些具体问题所建立非线性系统稳定性的研究, J. d'Alembert, Comte de Lagrange, J. Maxwell, H. Minkowski[④]和 A. Ctodola[⑤]等人都曾用一次近似系统进行研究.

19 世纪下半叶, 对微分方程的理论研究开拓了微分方程研究的新局面, 其中的重大发展都与 J. Poincaré 的名字联系着. J. Poincaré 独创了 19 世纪微分方程研究的定性理论. 1881—1886 年, 他在同一标题 "Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle" 下连续发表了四篇论文, 寻找只通过考察微分方程本身就可回答关于稳定性等问题的方法, 坚实奠基微分方程定性理论. 1892—1898 年, J. Poincaré 描述天体力学系统运动的特征, 并引导到微分方程定性理论的创立. 他发现微分方程的奇点起着关键作用. 他把奇点分为鞍点、结点、焦点和中心四类 (见 1.5.3节), 讨论了解在各种奇点附近的性态, 还发现了极限环. 1928 年, A. Liénard[⑤]最早给出了极限环的惟一性定理, 并最早应用于三极管电路中得到的 van der Pol[⑥]方程. J. Poincaré 的定性理论就是把微分方程 Cauchy 问题的局部结果推广到全局.

1892 年, A. Lyapunov[⑦]在用 17 年辛勤劳动写成的博士论文《运动稳定性的一般问题》中将 G. Peano, I. Bendixson[⑧], J. Darboux[⑨]等人建立起来的解对初值与输入连续依赖性的概念由有限区间推广到无穷区间, 同时将 J. Poincaré 关于在奇点附近积分曲线随时间变化的定性研究发展至高维一般情形而形成专门的 "运动稳定性" 分支, 第一个给运动稳定性以精确数学定义并

---

① Peter Guthrie Tait (1831.04.28-1901.07.04), 英国人.

② Edward John Routh (1831.01.20-1907.06.07), 加拿大人, de Morgan 和 W. Hopkins (William Hopkins, 1792.02.02-1866.10.13, 英国人) 的学生, 解决了代数数的有理逼近, 1872 年当选为皇家学会会员.

③ Adolf Hurwitz (1859.03.26-1919.11.18), 德国人, F. Klein (Felix Christian Klein, 1849.04.25-1925.06.22, 德国人) 的学生.

④ Hermann Minkowski (1864.06.22-1909.01.12), 立陶宛人, Minkowski 时空为 Einstein 狭义相对论提供了模型, 月球上的一座环形山和第 12493 号小行星以其命名.

⑤ Aurel Boleslav Ctodola (1859.05.11-1942.12.25), 斯洛伐克人.

⑤ Alfred-Marie Liénard (1869.04.02-1958.04.29), 法国人, 1933-1934 年任法国数学会会长.

⑥ Balthasar van der Pol (1889.01.27-1959.10.06), 荷兰人, W. Julius (Willem Henri Julius, 1860.08.04-1925.04.15, 荷兰人) 的学生, 1957 年当选为法国科学院通讯院士, 第 10443 号小行星以其命名.

⑦ Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857.06.06-1918.11.03), 俄罗斯人, P. Chebyshev (Pafnuty Lvovich Chebyshev, 1821.05.16-1894.12.08, 俄罗斯人. 俄文: Пафнтий Львович Чебышёв) 的学生, 1901 年当选为俄国科学院院士, 1909 年当选为意大利国家科学院院士, 1916 年当选为法国科学院院士, 月球上的一座环形山以其命名. 俄文: Александр Михайлович Ляпунов.

⑧ Ivar Otto Bendixson (1861.08.01-1935.11.29), 瑞典人, 1901 年证明了 Poincaré-Bendixson 定理.

⑨ Jean Gaston Darboux (1842.08.14-1917.02.23), 法国人, M. Chasles (Michel Chasles, 1793.11.15-1880.12.18, 法国人) 的学生, 创办 "Darboux 杂志", 曾任法国数学会会长和巴黎大学理学院院长, 1884 年当选为法国科学院院士 (1900 年任秘书), 1902 年当选为皇家学会会员.

系统地解决了运动稳定性问题, 特别是 Lyapunov 直接方法, 也称为 Lyapunov 第二方法 (见本书第 3 章). 随后, Lyapunov 稳定性理论被引入了控制理论.

值得一提的是, J. Hadamard[①]用不同的方法稍后与 A. Lyapunov 独立地证明了有关稳定性的结果.

Lyapunov 第二方法的概念直观、理论严谨, 方法具有一般性, 物理意义清晰, 故当 Lyapunov 第二方法在 1960 年左右被引进系统控制理论后, 很快显示出其在理论上和应用上的巨大重要性, 成为现代系统控制理论中研究稳定性的主要工具, 为非线性系统的稳定性分析提供了一个有效并且方便的工具.

A. Letov[②]在《非线性调节系统的稳定性》的序言中称 "无论现代控制以何种方法描述, 总是建立在一个牢固的基础上, 那就是 Lyapunov 关于运动的稳定性理论".

J. LaSalle[③]在 "The Stability of Dynamical Systems" 的序言中写到 "在某种程度上可以说, Lyapunov 的直接方法在西方重新发现是 20 世纪 50 年代中期的事, 那时至少在非线性控制系统的设计中已广泛地承认了它的重要性, 我对于 Lyapunov 理论的理解和赏识始于 1959 年 ……". 他在 20 世纪 60 年代还说过: "稳定性理论吸引着全世界数学家的注意, 而且 Lyapunov 的直接方法得到了工程师们的广泛赞赏", "稳定性理论在美国正迅速变成训练控制理论方面工程师们的一个标准部分".

之后, 除了 G. Birkhoff[④] 以三体问题为背景继承和开拓了 J. Poincaré 的工作, 并提出动力系统理论外, 关于微分方程定性理论的研究比较沉寂. 直到 20 世纪 30 年代, 由于新的物理、力学以及工程技术和自动控制等问题的推动, 使微分方程定性理论中的概念、问题和方法又在新的条件下得到发展.

1937 年, A. Andronov[⑤]和 L. Pontryagin[⑥]提出结构稳定性概念, 使动力系统研究向大范围发展.

---

① Jacques Salomon Hadamard (1865.12.08-1963.10.17), 法国人, C. Picard 的学生, 1892 年第一次把集论引进复变函数论, 1910 年奠基泛函分析, 并采用 "泛函" 术语, 最先证明素数定理, 1906 年任法国数学会会长, 1912 年底当选为法国科学院院士, 1932 年当选为皇家学会会员. 1936 年曾访问过清华大学, 做了偏微分方程理论的系列讲演.

② Aleksandr Mihailovich Letov (1911.11.11-1974.10.03), 俄罗斯人, 曾任国际自动控制联合会主席. 俄文: Александр Михайлович Летов.

③ Joseph Pierre LaSalle (1916.05.28-1983.07.07), 美国人.

④ George David Birkhoff (1884.03.21-1944.11.12), 美国人, E. Moore (Eliakim Hastings Moore, 1862.01.26-1932.12.30, 美国人) 的学生, 1931 年奠基 Maxwell-Boltzmann 理论, 1925-1926 年任美国数学会会长, 美国国家科学院院士, 美国人文与科学院院士, 法国科学院院士, 意大利科学院院士, 丹麦皇家科学与人文院院士, 秘鲁科学院院士, 月球上的一座环形山以其命名.

⑤ Aleksandr Aleksandrovich Andronov (1901.04.11-1952.10.31), 俄罗斯人. 俄文: Александр Александрович Андронов.

⑥ Lev Semenovich Pontryagin (1908.09.03-1988.05.03), 俄罗斯人, P. Alexandrov (Pavel Alexandrov, 1896.05.07-1982.11.16, 俄罗斯人. 俄文: Павел Сергеевич Александров) 的学生, 1939 年当选为法国科学院助理院士 (1959 年为正式院士), 曾获苏联国家奖. 俄文: Лев Семёнович Понтрягин.

1922 年, N. Minorsky[①]研制出了用于船舶驾驶的伺服系统, 首次提出了 PID 控制方法; 他研究船舶摇摆时, 得到了带有时滞的运动方程. 1927 年, H. Black[②]提出了高性能的负反馈放大器, 首次提出了负反馈控制的重要思想. 1930 年, V. Bush[③]研制出了世界上第一台大型模拟计算机. 1932 年, H. Nyquist[④]提出了在频域内研究系统特性的频率响应法, 建立了以频率特性为基础的稳定性判据, 为具有高质量的动态品质和静态准确度的军用控制系统提供了所需的分析工具, 被称为 "信息时代的教父". 1938 年, H. Bode[⑤]将频率响应法进行了系统研究, 形成了经典控制理论的频域分析法. 1938 年, C. Shannon[⑥]提出了继电器逻辑自动化理论, 奠基数字电路设计理论, 1948 年的 "A Mathematical Theory of Communication" 奠基信息论, 被称为 "信息理论之父". 1942 年, J. Ziegler[⑦]和 N. Nichols[⑧]提出了著名的 Ziegler-Nichols 方法, 是一种启发式的 PID 参数最佳调整法, 迄今仍为主流方法. 1942 年, N. Wiener[⑨]提出了 Wiener 滤波理论, 1948 年的 *Cybernetics*[⑩] *or Control and Communication in the Animal and the Machine* 中着重论述了控制理论有别于其他学科的基本特征和控制理论体系的独立性, 是控制理论诞生的重要标志. 1946 年, von Neumann[⑪]发明了世界上第一台数字计算机, 被称为 "计算机之父". 1948 年, W. Evans[⑫]创立了根轨迹方法, 为分析系统性能随参数变化的规律性提供了有力工具, 被广泛应用于反馈控制系统的分析和设计中.

---

① Nikolai Fyodovich Minorsky (1885.09.23-1970.07.31), 俄罗斯人. 俄文: Николай Федорович Минорский.

② Harold Stephen Black (1898.04.14-1983.12.11), 美国人.

③ Vannevar Bush (1890.03.11-1974.06.28), 美国人, D. Jackson (Dunham Jackson, 1888.07.24-1946.11.06, 美国人) 的学生, "Manhatten 计划" 的组织者和领导者.

④ Harry Nyquist (1889.02.07-1976.04.04), 瑞典人.

⑤ Hendrik Wade Bode (1905.12.24-1982.06.21), 荷兰人.

⑥ Claude Elwood Shannon (1916.04.30-2001.02.24), 美国人, W. Hillis (William Daniel Hillis, 1956.09.25-, 美国人) 和 I. Sutherland (Ivan Edward Sutherland, 1938.05.16-, 美国人) 的学生, 1966 年获美国国家科学奖.

⑦ John G. Ziegler (1909.08.21-1997.12.09), 美国人.

⑧ Nathaniel B. Nichols (1914-1997), 美国人.

⑨ Norbert Wiener (1894.11.26-1964.03.18), 美国人, 奠基计算机科学, 曾获美国国家科学奖, 月球上的一座环形山以其命名.

⑩ N. Wiener 创造的 "cybernetics" 这个术语来源于希腊文 $\kappa\upsilon\beta\varepsilon\rho\nu\eta\tau\eta\varsigma$, 是掌舵人的意思, 定义为对动物和机器中控制和通信的科学研究. 实际上, 在 1834 年, A. Ampère (André Marie Ampère, 1775.01.20-1836.06.10, 法国人) 将其引进了法语, 创造了 "cybernetique", 定义为管理国家的科学. 1935-1936 年, A. Ampère 曾访问过清华大学, 并开设 Fourier 分析的系统课程.

⑪ John von Neumann (1903-1957), 匈牙利人, L. Fejér 的学生, 是最伟大的科学全才之一, 被称为 "博弈论之父", 1947 和 1956 年两次获美国总统奖章, 1951-1952 年任美国数学会会长, 秘鲁国家科学院院士, 美国人文与科学院院士, 美国国家科学院院士, 荷兰皇家科学与人文院院士, 月球上的一座环形山以其命名.

⑫ Walter Richard Evans (1920.01.15-1999.07.10), 美国人.

从 20 世纪 50 年代开始, 控制理论的一般方法已经开始形成, 并且已可处理时变系统和非线性系统了. 1954 年, 钱学森[①]对 N. Wiener 的控制理论在工程系统中的应用进行了总结. 1956 年, L. Pontryagin 发表了《最优过程数学理论》[②], 于 1961 年证明并发表了最大值原理. 1957 年, R. Bellman[③]提出了离散多阶段决策的最优性原理, 创立了动态规划方法, "Dynamic Programming" 奠基了最优控制理论. 最大值原理和动态规划方法为解决最优控制问题提供了理论工具. 1960 年, R. Kálmán[④]发表了 *On the general theory of control systems* 等文章, 引入了状态空间分析系统, 提出可控性、可观性、最优调节器、Kálmán 滤波和线性系统在二次型性能指标下的最优控制问题等概念, 奠基了现代控制理论. 1964 年, E. Jury[⑤]提出了 $Z$ 变换方法, 奠基数字控制及数字信号处理理论. 这一时期发展起来的现代控制理论是以引入状态变量和状态空间来描写系统为标志的, 即

$$\boxed{\text{输入 } \boldsymbol{u} \in U} \Longrightarrow \boxed{\text{状态 } \boldsymbol{x} \in X} \Longrightarrow \boxed{\text{输出 } \boldsymbol{y} \in Y}$$

在读者已有微积分、矩阵理论和泛函分析基本知识的基础上, 从深度和广度两个方面深入讨论稳定性和系统控制的基础理论. 本书试图做到深入浅出和通俗易懂, 能对数学类和控制类的高年级学生和研究生都有用, 既注意到其思想性和逻辑性, 又注意到其直观性和通俗性.

全书内容共 10 章, 大体上可分为五个部分.

第一部分是第 1 章的内容, 是本书需要用到的预备知识, 是非常重要的基础知识. 这一部分主要是集和映射的基本知识, 包括集和映射、基数、半序与格、群环域 *; 线性空间的基本知识, 包括度量空间、开集与闭集、极限与连续性、线性空间和子空间、线性映射与矩阵、压缩映像原理、不变子空间 *、内积空间、对偶空间和伴随算子等; 矩阵理论中的一些基本定理, 包括矩阵函数对矩阵变量的导数、Jacobi 分解、Hamilton[⑥]-Cayley[⑦]定理和最小多

① 钱学森 (Tsien Hsue-shen) (1911.12.11-2009.10.31), 浙江杭州人, 吴越王钱镠第 33 代孙, von Kármán (Theodore von Kármán, 1881.05.11-1963.05.07, 匈牙利人) 的学生, 被誉为 "中国航天之父" 和 "中国导弹之父", 1957 年增补为中国科学院学部委员 (院士).

② 此书使得其获列宁奖.

③ Richard Ernest Bellman (1920.08.26-1984.03.19), 美国人, S. Lefschetz (Solomon Lefschetz, 1884.09.03-1972.10.05, 美国人) 的学生, 1975 年当选为美国人文与科学院院士, 1977 年当选为美国工程院院士, 1983 当选为美国国家科学院院士.

④ Rudolf(Rudi) Emil Kálmán (1930.05.19-2016.07.02), 匈牙利人, 2009 年获美国国家科学奖, 美国国家科学院院士, 美国工程院院士, 美国人文与科学院院士, 匈牙利科学院院士, 法国科学院院士, 苏联科学院院士.

⑤ Eliahu Ibraham Jury (1923.05.23-), 伊拉克人.

⑥ Sir William Rowan Hamilton (1805.08.04-1865.09.02), 爱尔兰人, 引入向量、标量、张量、四元数和结合律等术语, 曾任爱尔兰皇家科学院院长, 去世前当选为美国国家科学院第一位外籍院士, 月球上的一座环形山以其命名.

⑦ Arthur Cayley (1821.08.16-1895.01.26), 英国人, G. Peacock 和 W. Hopkins 的学生, 提出和开创矩阵理论, 并使用行列式记号 $|\ \ |$, C. Jacobi 称其是 "英国的 Lagrange", 1852 年当选为皇家学会会员, 1868-1870 年任伦敦数学会会长, 月球上的一座环形山以其命名.

项式、矩阵指数与对数函数、Rayleigh[①]商等; 最后还简单介绍了 Laplace 变换、Grönwall[②]-Bellman 不等式、平面二次系统、积分方程的基本知识和状态变量图的基本表示方式. 有些内容很重要但不方便展开处理, 就简单罗列了一下, 读者需要进一步了解时, 可以找一些专门的书来读; 有些内容很重要又不是很难, 就简要进行了处理.

下面的思路是这样的, 先由实际问题引出非线性系统, 然后在数学上先研究零输入的非线性系统, 这就是第二部分的内容, 包括第 2 章和第 3 章. 其中, 第 2 章先通过几个引例给出非线性系统和控制系统的一般描述, 再系统地介绍非线性系统解的一般理论, 如解的存在惟一性与存在性、解的延拓和解对初值和输入的连续依赖性与可微性等, 还包括微分和积分不等式与 Chaplygin[③]比较定理. 第 3 章系统地介绍 Lyapunov 稳定性的理论基础, 包括 Lyapunov 函数、Dini[④]导数、Lie[⑤]导数 * 概念和 Lyapunov 稳定性的基本理论.

为了研究非线性系统, 可利用 Taylor[⑥]公式将其进行线性化, 进而研究线性系统的性质, 这就是第三部分的内容, 包括第 4 章 ~ 第 6 章, 是线性系统的一般理论. 其中, 第 4 章先给出了非线性系统的线性化, 再研究时变线性系统和周期线性系统的基本理论, 包括时变线性系统和周期线性系统解的基本理论和稳定性, 以及可控性与可观性的基本概念等; 第 5 章比较详细地介绍时不变线性系统的基础理论及其在控制理论中的应用, 包括时不变线性系统解的基本理论和可控性与可观性的基本概念等, 关于可控性包括可控性与可控子空间、可控性分解、可控标准形、可控性指数和输出可控性等, 关于可观性包括可观性与对偶原理、不可观子空间、可观性分解、可观标准形和可观性指数等, 还介绍了可控性与可观性在稳定性上的应用、线性系统的传递函数与传递矩阵和线性系统的实现等; 第 6 章介绍矩阵线性系统的基本理论和进一步的控制理论, 包括 Lyapunov 矩阵方程、时不变线性系统的可稳性与与极点配置、输出反馈与极点配置和可检性等, 介绍了状态观测器与状态反馈控制器的基本理论

---

① John William Strutt Lord Rayleigh (1842.11.12-1919.06.30), 英国人, E. Routh 的学生, 1871 年的散射理论第一次正确解释了天空为什么是蓝的, 1873 年当选为皇家学会会员, 1876-1878 年伦敦数学会会长, 1904 年获诺贝尔物理学奖, 1905-1908 年任皇家学会会长, 月球和火星上的各一座环形山以其命名.

② Thomas Hakon Grönwall (1877.01.16-1932.05.09), 瑞典人.

③ Sergi Alekseevich Chaplygin (1869.04.05-1942.10.08), 俄罗斯人, 1924 年 12 月 6 日当选为苏联科学院通讯院士 (1929 年 1 月 12 日为正式院士), 1948 年其家乡以其命名, 两次获列宁奖, 月球上的一座环形山以其命名. 俄文: Сергй Алексеевич Чаплыгин.

④ Ulisse Dini (1845.11.14-1918.10.28), 意大利人, E. Betti (Enrico Betti, 1823.10.21-1892.08.11, 意大利人) 的学生, 被称为 "最伟大的推广和构造反例大师".

⑤ Marius Sophus Lie (1842.12.17-1899.02.18), 挪威人, K. Weierstraß 的学生, 1892 年当选为法国科学院院士, 1895 年当选为皇家学会外籍会员和美国国家科学院院士.

⑥ Brook Taylor (1685.08.18-1731.12.29), 英国人, J. Machin (John Machin, 1680-1751.06.09, 英国人) 和 J. Keill (John Keill, 1671.12.01-1721.08.31, 英国人) 的学生, 奠基有限差分理论, 1712 年提出 Taylor 级数, 而 $x = 0$ 的特殊情形后来被 C. Maclaurin (Colin Maclaurin, 1698.02-1746.06.14, 英国人) 重新得到, 称为 Maclaurin 级数, 1712 年当选为皇家学会会员 (1714 年任秘书), 月球上的一座环形山以其命名.

和扰动系统的稳定性与反馈镇定, 还介绍了线性系统的最优控制和变结构控制的基本理论.

将系统进行时间离散化, 或者离散类似, 或者直接从实际问题中提出离散系统, 就可研究离散系统的稳定性和控制等, 这就是第四部分的内容, 即第 7 章的内容, 介绍离散系统的引入和连续时间系统的时间离散化, 虽然有些内容是连续时间系统的离散类似, 但也有些内容并非是简单的离散类似, 甚至有完全不同的结果, 仍然进行了细致处理, 并且尽可能在证明的细节上体现方法的不同, 并省略与连续情形类似的证法, 其中, 举例性地介绍了离散系统的 Lyapunov 稳定性理论; 还介绍了时变和时不变离散线性系统解的基本理论和稳定性, 举例性地介绍了可控性与可观性的基本概念等, 重点是时间离散化线性系统可控性与可观性的保持; 最后介绍了与连续情形有符号差别的最优控制的基本理论.

如果系统中导数是分数阶的, 如果出现时滞, 或者别的什么问题, 应该怎么研究呢? 这方面的问题研究十分浩瀚, 本书只选取了一部分内容进行讨论, 这就是第五部分的内容, 包括第 8 章 ~ 第 10 章, 分别介绍分数阶系统、时滞系统和多智能体一致性的基本理论. 其中, 第 8 章先介绍了几类重要的特殊函数, 然后系统地介绍分数阶系统的理论, 包括分数阶微积分的概念、解的存在惟一性和解对初值的连续依赖性等, 讨论了分数阶时不变线性系统解的基本理论、可控性与可观性、Mittag-Leffler[①]稳定性等. 另外讨论了分数阶系统的记忆效应与初值问题, 包括初始化函数方法、无穷维状态方法、Cauchy 问题和记忆效应表示方法的等价性与统一性等, 还介绍了粘弹性阻尼材料的分数阶本构方程等. 第 9 章介绍了时滞系统的基本理论, 包括时滞系统的基本概念、分步法、解的存在惟一性和解的连续依赖性与解的延拓, 由于时滞系统的特殊性, 讨论了特征方程与特征值的分布, 关于时滞系统的稳定性讨论了 Lyapunov 泛函方法与 Razumikhin[②]方法, 还讨论了时不变时滞线性系统的变结构控制和最优控制器的基本理论等. 第 10 章先介绍了 Gershgorin[③]圆盘定理、图论的基本知识和时滞系统的 Hopf[④]分支方向与稳定性判定, 然后介绍了多智能体系统的一致性问题, 包括带有领航者的一阶非线性多智能体拓扑一致性、非线性时滞多智能体系统一致性和基于状态测量函数的智能体系统有限时间一致性等问题.

① Magnus Gösta Mittag-Leffler (1846.03.16-1927.07.07), 瑞典人, K. Weierstraß 的学生, Cantor 集论的最早支持者之一, 1878 年芬兰科学与人文院院士, 1882 年创办 "Acta Mathematica", 称为 "Mittag-Leffler 杂志", 1883 年当选为瑞典皇家科学院院士, 1896 年当选为皇家学会会员, 还是爱尔兰皇家学会会员和法兰西研究院院士.

② B. S. Razumikhin, 俄罗斯人. 俄文: Б. С. Разумихин.

③ Semyon Aranovich Gershgorin (1901.08.24-1933.05.30), 白俄罗斯人. 俄文: Семён Аранович Гершгорин.

④ Eberhard Frederich Ferdinand Hopf (1902.04.04-1983.07.24), 奥地利人.