北京金星创新教育研究中心成果
BEIJINGJINXINGCHUANGXINJIAOYUYANJIUZHONGXINCHENGGUO

中国高考揭秘

数学

总主编 薛金星

北京教育出版社

北京·金星创新
beijingjinxingchuangxin

北京金星创新教育研究中心成果

ZHONGGUOGAOKAOJIEMI

中国高考揭秘

总 主 编　薛金星
本册主编　王心升
副 主 编　王付平 李文斌 王国强 黄 敏
李振东 常发友 林立晔 孙光华

数学

325

北京教育出版社

目 录

第一章

集合与简易逻辑

第一单元 集合及运算（含不等式的解法）

考纲揭秘 高考考什么？

1. 理解集合、子集、补集、交集、并集的概念. 了解空集和全集的意义. 了解属于、包含、相等关系的意义，掌握有关的术语和符号，并会用它们表示一些简单的集合.

2. 掌握二次不等式、简单的绝对值不等式的解法.

3. 本单元是高考中的考查内容，近年来高考第一小题总是考查集合知识的选择题，试题体现了集合在中学数学中的基础性及其工具作用，难度不大，要求概念清楚，会正确表示集合.

解不等式的题常以填空题或解答题出现，在解答题中，含字母参数的不等式较多，需对字母参数进行讨论，一元二次不等式是基础，也是工具，所以它的解法很重要，由于分类讨论有好的区分度，高考命题注重对分类讨论思想的考查. 尤其三个“二次”（即一元二次函数、一元二次方程、一元二次不等式）是中学数学的重要内容，具有丰富的内涵和密切的联系，同时也是研究包含二次曲线在内的许多内容的工具，高考试题中几乎近一半的试题与这三个“二次”问题有关.

考题通鉴 过去考什么？

高考年份	1999 年	2000 年	2001 年	2002 年	2003 年	2004 年
考查题目	全国(1) 上海(17)	京春(2) 广东(1) 全国文(1) 上海(12)(17)	上海(11)	全国文(6)理(5) 京皖春(1)京(1) 上海(3)	京春理(1)(11) 上海(6)(17)	京春理(15) 新课程文(1)理(6)

考点秘笈 过去怎么考？

点击考点一：基本概念题

集合概念题主要考查集合知识的理解、集合的相等、集合之间的关系、集合的基本运算等. 这种题型为基础题，在高考中要求概念清晰，解法得当.

例 1 （2002 年全国）设集合 $M=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，则（　　）

A. $M=N$　B. $M\subsetneqq N$　C. $M\supsetneqq N$　D. $M\cap N=\varnothing$

命题目的：本题考查集合的相等及集合之间的关系.

解析：当 k 为偶数时，设 $k=2m,m\in\mathbf{Z}$，

此时 $N=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{m}{2}+\frac{1}{2},m\in\mathbf{Z}\right\}=M$；

当 k 为奇数时，设 $k=2m+1,m\in\mathbf{Z}$，

此时 $N=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{m}{2}+\frac{3}{4},m\in\mathbf{Z}\right\}$.

$\therefore N\supsetneqq M$.

答案：B

评注：对 N 中的 $k\in\mathbf{Z}$，分 k 为偶数和奇数讨论，能够从 N 中分离出 M.

例 2 （2002 年北京）满足条件 $M\cup\{1\}=\{1,2,3\}$ 的集合 M 的个数是（　　）

A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 4 个

命题目的：考查集合的运算、子集、并集等知识点.

解析：由 $M\cup\{1\}=\{1,2,3\}$ 可知

$M=\{2,3\}$，或 $M=\{1,2,3\}$.

答案：B

评注：从已知条件出发，对集合 M 进行分类. 注意别遗漏.

例 3 （2000 年上海）若集合 $S=\{y\mid y=3^x,x\in\mathbf{R}\}$，$T=\{y\mid y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$，则 $S\cap T=$（　　）

A. S　B. T　C. $\varnothing$　D. 有限集

命题目的：考查对集合知识的理解.

解析：$\because S=\{y\mid y=3^x,x\in\mathbf{R}\}=\{y\mid y>0\}$，

$T=\{y\mid y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}=\{y\mid y\geqslant -1\}$，

$\therefore S\cap T=S$.

答案：A

评注：将两个集合化简，求出元素的具体范围，以便进行运算. 对描述法表示集合，一定要搞清楚是以什么为元素构成的集合（本例是以函数的值为元素构成的集合即函数值域）.

点击考点二：集合的运算(含有关不等式的解法)

集合的运算多种多样、千姿百态，关键是理解并掌握交、并、补、子集等概念、运算性质、运算律及运算法则，做到无遗漏、无重复。

例 4 (1999 年全国文理)如图 1-1-1 所示，U 是全集，M、P、S 是 U 的三个子集，则阴影部分所表示的集合是(　　)

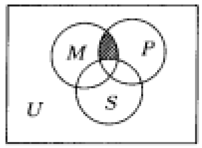

图 1-1-1

A. $(P\cap M)\cap S$

B. $(M\cap P)\cup S$

C. $(M\cap P)\cap(\complement_U S)$

D. $(M\cap P)\cup(\complement_U S)$

命题目的：此题主要考查用几何图形表示集合的运算.

解析：由图知，阴影部分表示的集合是 $M\cap P$ 与 S 的补集的交集.

答案：C

> **评注：**
> 此题出自课本，是比较简单的题目. 解答思路方法为：(1)将各选择项逐一检验；(2)根据集合运算的几何表示观察得出.

例 5 (2000 年春季北京、安徽)设全集 $U=\{a,b,c,d,e\}$，$M=\{a,b,c\}$，$N=\{b,d,e\}$，那么 $(\complement_U M)\cap(\complement_U N)$ 是(　　)

A. $\varnothing$　　B. $\{d\}$　　C. $\{a,c\}$　　D. $\{b,e\}$

命题目的：主要考查集合间的基本运算.

解析：$\because \complement_U M=\{d,e\}$，$\complement_U N=\{a,c\}$，

$\therefore (\complement_U M)\cap(\complement_U N)=\varnothing$.

答案：A

> **评注：**
> 此题源于课本，是最简单的题目.

例 6 (2000 全国文)设集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid -10\leqslant x\leqslant -1\}$，$B=\{x\in\mathbf{Z}\mid |x|\leqslant 5\}$，则 $A\cup B$ 中元素的个数是(　　)

A. 11 个　　B. 10 个　　C. 16 个　　D. 15 个

命题目的：主要考查集合的基本运算.

解析：$\because A=\{x\in\mathbf{Z}\mid -10\leqslant x\leqslant -1\}=\{-10,-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1\}$，

$B=\{x\in\mathbf{Z}\mid |x|\leqslant 5\}=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$，

$\therefore A\cup B=\{-10,-9,-8,\cdots,-1,0,1,2,3,4,5\}$.

则共有 16 个元素.

答案：C

> **评注：**
> 此题思路比较清楚，是一个很简单的题目.

例 7 (2001 年上海)设集合 $A=\{x\mid 2\lg x=\lg(8x-15)\}$，$B=\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,\cos\frac{x}{2}>0\right\}$，则 $A\cap B$ 的元素个数为________.

命题目的：综合考查对数方程、三角不等式及集合的运算.

解析：$\because A=\{x\mid 2\lg x=\lg(8x-15)\}=\{3,5\}$，

$B=\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,\cos\frac{x}{2}>0\right\}$

$=\{x\mid 4k\pi-\pi<x<4k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，

$\therefore A\cap B=\{3\}$.

答案：1

> **评注：**
> 先将集合化简，然后再参与运算.

例 8 (2000 年上海春)设 U 是全集，非空集合 P、Q 满足 $P\subsetneqq Q\subsetneqq U$，若含有 P、Q 的一个集合运算表达式，使运算结果为 $\varnothing$，则这个运算表达式可以是________(只写出一个表达式即可).

命题目的：(1)从另一个方面考查集合的运算；(2)对题目本身的灵活掌握.

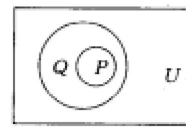

图 1-1-2

解析：由图 1-1-2 可知 $P\cap(\complement_U Q)=\varnothing$.

答案：$P\cap(\complement_U Q)$

> **评注：**
> 解题思路是：观察图形，捕捉信息，本题答案不唯一，也可填 $(\complement_U Q)\cap(P\cap Q)$ 或 $(\complement_U Q)\cap(P\cup Q)$.

例 9 (2002 年上海春)若全集 $I=\mathbf{R}$，$f(x)$、$g(x)$ 均为 x 的二次函数，$P=\{x\mid f(x)<0\}$，$Q=\{x\mid g(x)\geqslant 0\}$，则不等式组 $\begin{cases}f(x)<0,\\g(x)<0\end{cases}$ 的解集可用 P、Q 表示为________.

命题目的：主要考查集合的运算在二次不等式(组)解集中的正确表示.

解析：$\begin{cases}f(x)<0,\\g(x)<0\end{cases}\Leftrightarrow f(x)<0$，且 $g(x)<0$.

而 $f(x)<0$ 的解集为 P，$g(x)<0$ 的解集为 $\complement_{\mathbf{R}}Q$，故所求为 $P\cap(\complement_{\mathbf{R}}Q)$.

答案：$P\cap(\complement_{\mathbf{R}}Q)$

> **评注：**
> 集合运算在解不等式(组)中的应用，特别是补集思想的运用.

例 10 (2003 年上海(6))设集合 $A=\{x\mid |x|<4\}$，$B=\{x\mid x^2-4x+3>0\}$，则集合 $\{x\mid x\in A$，且 $x\notin A\cap B\}=$________.

命题目的：主要考查不等式的解法和集合的有关概念.

解析：$\because A=\{x\mid -4<x<4\}$，$B=\{x\mid x<1$，或 $x>3\}$，

$\therefore A\cap B=\{x\mid -4<x<1$，或 $3<x<4\}$，

$\therefore \{x\mid x\in A$，且 $x\notin A\cap B\}=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$.

答案：$\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$

> **评注：**
> 应熟练掌握绝对值不等式和一元二次不等式的解法，正确理解其涵义，熟练掌握在数轴上表示区间(集合)的交与并的方法.

例 11 (2003 年北京(1))设集合 $A=\{x\mid x^2-1>0\}$，

$B=\{x|\log_2 x>0\}$，则 $A\cap B$ 等于(　　)

A. $\{x|x>1\}$　　B. $\{x|x>0\}$

C. $\{x|x<-1\}$　　D. $\{x|x<-1$，或 $x>1\}$

命题目的：主要考查集合的运算和不等式的解法.

解析：$A=\{x|x<-1$，或 $x>1\}$，$B=\{x|x>1\}$，

$\therefore A\cap B=\{x|x>1\}$.

答案：A

评注：

此题的关键在于先将集合进行化简.

例 12　(1999 年上海)设全集 $A=\{A||x-a|<2\}$，$B=\left\{x\left|\frac{2x-1}{x+2}<1\right.\right\}$，若 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

命题目的：考查解不等式、集合运算等综合知识.

解：$A=\{x||x-a|<2\}=\{x|a-2<x<a+2\}$，

$B=\left\{x\left|\frac{2x-1}{x+2}<1\right.\right\}=\{x|-2<x<3\}$，

为使 $A\subseteq B$，

必须 $\begin{cases}a-2\geqslant-2,\\a+2\leqslant3\end{cases}\Rightarrow 0\leqslant a\leqslant1$.

评注：

此题虽然 A 不可能为空集，但在做这类题目时应注意 A 有可能是空集的情况.

高考预测

集合及运算是高考考查的热点之一，在高考中以选择题、填空题出现，属中低档题，若与不等式等其他知识相联系，可能考查解答题，预测会从以下几方面命题：

(1)继续考查集合的基本知识，如基本概念的理解、基本方法的掌握等.

(2)继续考查集合的基本运算，如交、并、补、包含关系等.

(3)可能考查以不等式为载体的综合性题目，特别是对三个“二次”的考查.

预测考点一：基本概念

本题型主要考查集合的基本概念，常用的解法为紧扣定义，并注意集合语言、数学语言之间的转换.

例 1　(2004 年北京、黄冈预测卷)定义 $A-B=\{x|x\in A$，且 $x\notin B\}$，若 $A=\{2,4,6,8,10\}$，$B=\{1,4,8\}$，则 $A-B$ 等于(　　)

A. $\{4,8\}$　　B. $\{1,2,6,10\}$

C. $\{1\}$　　D. $\{2,6,10\}$

命题目的：考查元素集合的从属关系.

解析：$A-B=\{x|x\in A$，且 $x\notin B\}=\{2,6,10\}$.

答案：D

评注：

理解 $A-B$ 的元素是属于 A 但不属于 B 的元素组成的.

例 2　(2003 年海淀区模拟题)已知 $A=\{a+2,(a+1)^2,a^2+3a+3\}$，若 $1\in A$，求实数 a 的值.

命题目的：考查集合中元素的互异性和分类讨论的思想.

解：(1)若 $a+2=1$，则 $a=-1$，此时 $A=\{1,0,1\}$ 与集合中元素的互异性矛盾(舍去).

(2)若 $(a+1)^2=1$，则 $a=0$，或 $a=-2$.

当 $a=0$ 时，$A=\{2,1,3\}$，满足题意；

当 $a=-2$ 时，$A=\{0,1,1\}$ 与集合中元素的互异性矛盾(舍去).

(3)若 $a^2+3a+3=1$，则 $a=-1$ 或 $a=-2$(舍去).

综上所述，$a=0$.

评注：

在解决集合的元素问题时，元素的互异性至关重要.

例 3　(2004 年 100 所名校示范重组卷)已知集合 $A=\{0,2,3\}$，$B=\{x|x=a\cdot b,a,b\in A\}$，则集合 B 的子集的个数是(　　)

A. 4 个　　B. 8 个　　C. 16 个　　D. 15 个

命题目的：考查元素与集合、集合与集合的从属、子集等关系.

解析：$B=\{x|x=a\cdot b,a,b\in A\}=\{0,6\}$.

子集可分为：含一个元素的子集有 C_2^1 个，含两个元素的子集有 C_2^2 个，再加上空集，可看成不含 $\{0,6\}$ 中元素的子集有 C_2^0 个.

$\therefore$ 集合 B 的子集共有 $C_2^0+C_2^1+C_2^2=2^2=4$ 个.

答案：A

评注：

由此可得含 n 个元素 $\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$ 的子集的个数，非空子集的个数，非空真子集的个数.

例 4　(2004 年北京、黄冈最后冲刺卷)已知集合 $P=\{(x,y)||x|+|y|=1\}$，$Q=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant1\}$，则(　　)

A. $P\subsetneqq Q$　B. $P=Q$　C. $P\supsetneqq Q$　D. $P\cap Q=Q$

命题目的：考查集合知识与其他知识的综合应用.

解析：分四类讨论化简方程 $|x|+|y|=1$ 得点集 P 表示的图形为如图 1-1-3 中的正方形，而点集 Q 表示单位圆面如图 1-1-4.

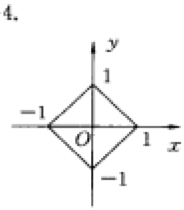

图 1-1-3

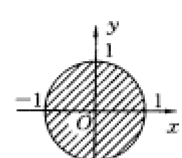

图 1-1-4

$\therefore P$ 是 Q 的真子集.

答案：A

评注：

化简集合中的方程应掌握去绝对值号的技巧.

预测考点二：基本运算

理解并掌握集合的交、并、补运算，能够利用集合语言、

集合思想解决有关问题.

例 5 (1995 年全国文理)已知 U 为全集,集合 M、N 都为 U 的真子集,如果 $M\cap N=N$,则(　　)

A. $\complement_U M\supseteq\complement_U N$　　B. $M\subseteq\complement_U N$

C. $\complement_U M\subseteq\complement_U N$　　D. $M\supseteq\complement_U N$

命题目的:主要考查抽象集合的运算、转化思想的运用、逻辑思维能力.

解析:将已知用图形表示如图 1-1-5 所示,由图形知应选 $\complement_U M\subseteq\complement_U N$.

答案:C

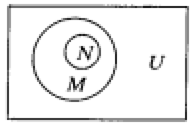

图 1-1-5

> **评注:**
> 具体集合没有给出,而给出的是抽象的集合,但又给出了集合间的关系,故可采用数形结合法来解决,明了有效.

例 6 (1996 年上海卷)已知集合 $M=\{(x,y)\mid x+y=2\}$,$N=\{(x,y)\mid x-y=4\}$,那么 $M\cap N=$(　　)

A. $x=3,y=-1$　　B. $(3,-1)$

C. $\{3,-1\}$　　D. $\{(3,-1)\}$

命题目的:(1)集合中的代表元素;(2)选择题的基本技巧.

解析一:两个集合均为点集,故两个点集经过运算之后,该集合中的元素仍为一些点,所以只有 D 正确.

解析二:解方程组 $\begin{cases}x+y=2,\\x-y=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3,\\y=-1.\end{cases}$

则 $M\cap N=\{(x,y)\mid x=3,y=-1\}=\{(3,-1)\}$.

答案:D

> **评注:**
> 此题的关键是搞清集合元素特性,从而将问题转化. $M\cap N$ 中的元素即为两直线 $x+y=2$ 与 $x-y=4$ 的交点.

例 7 (1997 年全国文理)设集合 $M=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$,$N=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$,则集合 $M\cap N=$(　　)

A. $\{x\mid 0\leqslant x<1\}$　　B. $\{x\mid 0\leqslant x<2\}$

C. $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$　　D. $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$

命题目的:主要考查用数轴法求两个集合的交集的方法.

解析:先将 N 化简,即 $N=\{x\mid x^2-2x-3<0\}=\{x\mid -1<x<3\}$. 如图 1-1-6 所示,则 $M\cap N=\{x\mid 0\leqslant x<1\}$.

答案:B

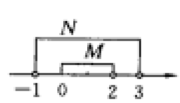

图 1-1-6

> **评注:**
> 本题所涉及的集合中的元素实际上是不等式的解,这就考查了对集合的理解与掌握.

例 8 (2002 年黑龙江省模拟题)设全集 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$,$A=\{|2a-1|,2\}$,$\complement_U A=\{5\}$,求实数 a 的值.

命题目的:主要考查补集概念以及逆向思维、数形结合的能力.

解法一:$\because\complement_U A=\{5\}$,则 $A\cup(\complement_U A)=U$.

$\therefore\begin{cases}a^2+2a-3=5,\\|2a-1|=3.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=2,\text{或 }a=-4,\\a=2,\text{或 }a=-1.\end{cases}$

$\therefore a=2$.

解法二:由图 1-1-7 知,

$\begin{cases}a^2+2a-3=5,\\|2a-1|=3.\end{cases}$ 解得 $a=2$.

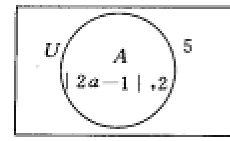

图 1-1-7

> **评注:**
> 集合的子、交、并、补运算首先要明确各运算的定义,并适时运用数轴、文氏图、图形等,可提高思维起点,缩短运算过程,以提高数形结合的能力.

例 9 (2002 年山东临沂市模拟题)设 $A=\{x\mid x^2-8x+15=0\}$,$B=\{x\mid ax-1=0\}$,若 $B\subsetneqq A$,求 a 的取值集合.

命题目的:主要考查子集概念和解方程基本运算.

解:由已知得 $A=\{3,5\}$,

为使 $B\subsetneqq A$,

当 $B=\varnothing$ 时,$a=0$;

当 $B\neq\varnothing$ 时,$B=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{1}{a}\right\}$,此时有 $\dfrac{1}{a}=3$,或 $\dfrac{1}{a}=5$.

解得 $a=\dfrac{1}{3}$,或 $a=\dfrac{1}{5}$.

综上所述,a 的取值集合为 $\left\{0,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{5}\right\}$.

> **评注:**
> 本题很容易忽略 $B=\varnothing$ 的情况,空集是一个特殊的集合,必须引起充分重视. 本题体现了分类讨论思想在解题中的作用,分类时注意不重不漏.

预测考点三:和不等式、方程等有关的综合性题型

一元一次不等式、一元二次不等式,含绝对值的不等式的解法是解其他不等式和解决不等关系问题的基础,而解不等式的指导思想是转化为一次或二次不等式(组)求解,因此,要切实掌握好一元一次、一元二次不等式和含绝对值的不等式的解法,这是解决不等关系的关键.

例 10 (2002 年东城区模拟题)解不等式 $|2x+1|+|x-2|>4$.

命题目的:考查绝对值不等式的解法及不含参数的分类讨论问题.

解:原不等式等价于

$\begin{cases}x\leqslant-\dfrac{1}{2},\\-(2x+1)-(x-2)>4,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-\dfrac{1}{2}<x\leqslant 2,\\(2x+1)-(x-2)>4,\end{cases}$

或 $\begin{cases}x>2,\\(2x+1)+(x-2)>4.\end{cases}$

解得 $x<-1$,或 $1<x\leqslant 2$,或 $x>2$.

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x\mid x<-1$,或 $x>-1\}$.

> **评注:**
> 去绝对值号是解题的指导思想,分段讨论是基本方法. 各段的解集要取并集,分界点的找法是令绝对值符号里面的代数式为零得到解. 本例也可画出 $y_1=|2x+1|+|x-2|$ 与 $y_2=4$ 的图象,求出交点后观察求解.

例 11 (2000 年宣武区模拟题)关于实数 x 的不等式 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$ 与 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$ (其中 $a\in\mathbf{R}$)的解集依次记为 A 与 B,求使 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围.

命题目的:主要考查绝对值不等式、二次不等式的解法及分类讨论思想方法.

解:由 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2}(a-1)^2$,得

$-\frac{1}{2}(a-1)^2\leqslant x-\frac{(a+1)^2}{2}<\frac{1}{2}(a-1)^2$,

$\therefore\ \frac{1}{2}[(a+1)^2-(a-1)^2]\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}[(a+1)^2+(a-1)^2]$.

$\therefore\ A=\{x|2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$.

由 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$,

得 $(x-2)[x-(3a+1)]\leqslant 0$.

当 $3a+1\geqslant 2$ 即 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 时,得 $B=\{x|2\leqslant x\leqslant 3a+1\}$;

当 $3a+1<2$ 即 $a<\frac{1}{3}$ 时,$B=\{x|3a+1\leqslant x\leqslant 2\}$.

$\therefore$ 当 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 时,若使 $A\subseteq B$ 成立,只要 $\begin{cases}2a\geqslant 2,\\ a^2+1\leqslant 3a+1,\end{cases}$

解得 $1\leqslant a\leqslant 3$;

当 $a<\frac{1}{3}$ 时,若使 $A\subseteq B$ 成立,只要 $\begin{cases}2a\geqslant 3a+1,\\ a^2+1\leqslant 2,\end{cases}$

解得 $a=-1$.

综上,使 $A\subseteq B$ 成立的 a 的取值范围是 $\{a|1\leqslant a\leqslant 3,或\ a=-1\}$.

评注:

先解不等式求出集合 A、B,再由 $A\subseteq B$ 的关系求解,需有扎实的基本功.

例 12 (1998 年江西模拟题)若 $A=\{x|x^2+px+q=0\}$,$B=\{x|x^2-3x+2=0\}$,$A\cup B=B$,求 p,q 满足的条件.

命题目的:考查转化思想、分类讨论思想和逻辑推理能力.

解:$\because\ A\cup B=B$,$\therefore\ A\subseteq B$.

$\because\ B=\{1,2\}$,

$\therefore$ 当 $A=\{1,2\}$ 时,$p=-3,q=2$;

当 $A=\{1\}$ 时,$p=-2,q=1$;

当 $A=\{2\}$ 时,$p=-4,q=4$;

当 $A=\varnothing$ 时,$p^2<4q$.

综上,当 $p=-3,q=2$ 时,$A=B$;

当 $p=-2,q=1$,或 $p=-4,q=4$ 时,$A\subsetneqq B$ 且 A 为单元素集;

当 $p^2<4q$ 时,$A=\varnothing$,有 $A\subsetneqq B$.

评注:

本例是已知两集合的并集,求参数满足的条件问题,应注意将 $A\cup B=B$ 转化为 $A\subseteq B$,并且当 $A=\varnothing$ 时也满足此关系,勿漏讨论.

例 13 (2004 年山东临沂市模拟题)已知集合 $A=\{(x,y)|x^2+mx-y+2=0\}$ 和 $B=\{(x,y)|x-y+1=0,0\leqslant x\leqslant 2\}$,如果 $A\cap B\neq\varnothing$,求实数 m 的取值范围.

命题目的:主要考查直线与抛物线的位置关系以及数形结合的思想.

解:由 $\begin{cases}x^2+mx-y+2=0,\\ x-y+1=0(0\leqslant x\leqslant 2),\end{cases}$ 消去 y,

得 $x^2+(m-1)x+1=0$. ①

$\because\ A\cap B=\varnothing$,

$\therefore$ 方程①在区间$[0,2]$上至少有一个实数解.

由 $\Delta\geqslant 0$,得 $m\leqslant -1$,或 $m\geqslant 3$.

当 $m\leqslant -1$ 时,

由 $x_1+x_2=-(m-1)>0$ 及 $x_1x_2=1>0$ 知,

方程①至少有一个根在区间$[0,2]$内,满足要求;

当 $m\geqslant 3$ 时,

由 $x_1+x_2=-(m-1)<0$ 及 $x_1x_2=1>0$ 知,

方程①有两负根,不符合要求.

综上,m 的取值范围是 $m\in(-\infty,-1]$.

评注:

上述解法应用了数形结合的思想.如果注意到抛物线 $x^2+mx-y+2=0$ 与线段 $x-y+1=0(0\leqslant x\leqslant 2)$ 的公共点在线段上,本题也可以利用公共点内分线段的比 λ 的取值范围建立关于 m 的不等式组求解.

仿真模拟 高考大揭秘

一、选择题

1. 由实数 $x,-x,|x|,\sqrt{x^2},-\sqrt[3]{x^3}$ 组成的集合中,最多含有元素(　　)

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

2. 已知集合 $A=\{x|x^2-5x+6=0\}$,$B=\{x|mx+1=0\}$,且 $A\cup B=A$,则实数 m 组成的集合为(　　)

A. $\left\{-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right\}$　　B. $\left\{0,\frac{1}{2}\right\}$

C. $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\}$　　D. $\left\{0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right\}$

3. 已知 A 和 B 是任意两个集合,集合 C 和集合 D 满足 $C=A\cup B$,$D=A\cap B$,则 C 和 D 的关系是(　　)

A. $C\subsetneqq D$　　B. $C\supsetneqq D$

C. $C=D$　　D. 以上都不对

4. 设 $f:x\to x^2(x>0)$ 是集合 A 到集合 B 的映射,如果 $B=\{1,2\}$,则 $A\cap B$ 一定是(　　)

A. $\varnothing$　　B. $\{1\}$

C. $\varnothing$ 或 $\{1\}$　　D. $\varnothing$ 或 $\{2\}$

5. 已知集合 $M=\left\{x\middle|x=m+\frac{1}{6},m\in\mathbf{Z}\right\}$,$N=\left\{x\middle|x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}$,$P=\left\{x\middle|x=\frac{p}{2}+\frac{1}{6},p\in\mathbf{Z}\right\}$,则 M,N,P 满足关系(　　)

A. $M=N\subsetneqq P$　　B. $M\subsetneqq N=P$

C. $M\subsetneqq N\subsetneqq P$　　D. $N\subsetneqq P\subsetneqq M$

6. 设 U 为全集,非空集合 P,Q 满足 $P\subsetneqq Q\subsetneqq U$,则下列集

合运算表达式中运算结果为空集$\varnothing$的表达式个数为(　　)

①$P\cap(\complement_U Q)$　②$(\complement_U Q)\cap(P\cap Q)$　③$(\complement_U Q)\cap(P\cup Q)$　④$(\complement_U P)\cap(Q\cap U)$

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

二、填空题

7. 已知集合$A=\{1,3\}$，$B=\{x\mid mx-3=0\}$，且$A\cup B=A$，则m的值为________.

8. 用描述法表示图1-1-8中阴影部分的点(包括边界上的点)的坐标的集合，应为________.

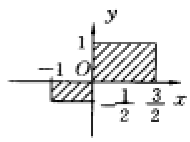

图1-1-8

9. 设全集U是实数集$\mathbf{R}$，$M=\{x\in\mathbf{R}\mid x\leqslant 1+\sqrt{2}\}$，$N=\{1,2,3,4\}$，则$(\complement_U M)\cap N=$________.

10. 不等式$|x+2|>|x-1|$的解集为________.

三、解答题

11. 已知集合$M=\{x\mid |x-a|<1\}$，$N=\{x\mid x^2-(a+3)x+3a>0,a\in\mathbf{R}\}$，若$M\cup N=\mathbf{R}$，求$a$的取值范围.

12. 已知$P=\{(x,y)\mid (x+2)^2+(y-3)^2\leqslant 4\}$，$Q=\left\{(x,y)\,\middle|\,(x+1)^2+(y-m)^2<\frac{1}{4}\right\}$，且$P\cap Q=Q$，求$m$的取值范围.

13. 集合$A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+(a-1)=0\}$，$C=\{x\mid x^2-mx+2=0\}$，已知$A\cup B=A$，$A\cap C=C$，求$a,m$的值.

14. 已知集合$M=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$N=\{0,|x|,y\}$，并且$M=N$，求$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{y^3}\right)+\cdots+\left(x^{2004}+\frac{1}{y^{2004}}\right)$的值.

仿真模拟答案

揭秘大参考

1. A　解析：根据互异性可知，集合应为$\{x,-x\}(x\neq 0)$或$\{0\}$，故最多含2个元素.

2. D　解析：$A=\{2,3\}$，由$A\cup B=A$，知$B\subseteq A$. 若$B=\varnothing$，则$m=0$；若$B\neq\varnothing$，则$m\neq 0$，此时$x=-\frac{1}{m}$.

$\because B\subseteq A$，$\therefore -\frac{1}{m}\in A$，$\therefore \left(-\frac{1}{m}\right)^2-5\left(-\frac{1}{m}\right)+6=0$，

得$m=-\frac{1}{2}$，或$m=-\frac{1}{3}$，故m组成的集合是$\left\{0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right\}$.

3. D　解析：根据交集与并集的定义易知$D\subsetneqq C$；但当$A=B$时，$C=D$，故$D\subseteq C$.

4. C　解析：根据映射的概念，集合A为$\{1,\sqrt{2}\}$或$\{1\}$或$\{\sqrt{2}\}$，则$A\cap B=\{1\}$或$\varnothing$.

5. B　解析：对于集合M：$\left\{x\,\middle|\,x=\frac{6m+1}{6},m\in\mathbf{Z}\right\}$，对于集合$N$：$\left\{x\,\middle|\,x=\frac{3n-2}{6}=\frac{3(n-1)+1}{6},n\in\mathbf{Z}\right\}$，对于集合$P$：$\left\{x\,\middle|\,x=\frac{3p+1}{6},p\in\mathbf{Z}\right\}$，由于$3(n-1)+1$和$3p+1$都表示被3除余1的数，而$6m+1$表示被6除余1的数，故$M\subsetneqq N=P$.

6. C　解析：根据图1-1-9可知，①、②、③的运算结果为$\varnothing$，此题是由本单元【考点秘笈】例8改编的，虽然考查的内容相同，但这种题型值得注意，要十分细心才行.

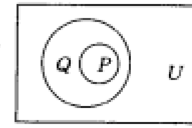

图1-1-9

7. 0,1,3　解析：若$m=0$，则$m=\varnothing$，满足$A\cup B=A$，符合题意；若$m\neq 0$，则$B=\left\{\frac{3}{m}\right\}$，要使$A\cup B=A$，应使$\frac{3}{m}=1$，或$\frac{3}{m}=3$，解得$m=3$，或$m=1$. 故$m$的值为0,1,3.

8. $\left\{(x,y)\,\middle|\,-1\leqslant x\leqslant\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1,xy\geqslant 0\right\}$　解析：把图形语言转化为数学语言，要做到精确，不多，不少.

9. $\{3,4\}$　解析：$\complement_U M=\{x\in\mathbf{R}\mid x>1+\sqrt{2}\}$，故$(\complement_U M)\cap N=\{3,4\}$.

10. $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$　解析：将不等式两边平方得$x^2+4x+4>x^2-2x+1$，解得$x>-\frac{1}{2}$.

此题若用基本的去绝对值号的方法求解，比较复杂. 本题也可通过画出$y=|x+2|$和$y=|x-1|$的图象，求出交点后，观察求解.

11. 解：易得$M=\{x\mid a-1<x<a+1\}$，

$N=\{x\mid x<x_1$，或$x>x_2$，$x_1=\min\{3,a\}$，$x_2=\max\{3,a\}\}$.

$a=3$时，显然有$M\cup N=\mathbf{R}$；

$a>3$时，要使$M\cup N=\mathbf{R}$，需有$\begin{cases}3>a-1,\\a+1>a,\end{cases}$解得$a<4$；

$a<3$时，要使$M\cup N=\mathbf{R}$，需有$\begin{cases}a>a-1,\\3<a+1,\end{cases}$解得$a>2$.

综上得$2<a<4$.

12. 解：根据题意知，

点集P表示以$O_1(-2,3)$为圆心，以2为半径的圆面(包含边界圆)，

点集Q表示以$O_2(-1,m)$为圆心，以$\frac{1}{2}$为半径的圆面(不包含边界圆).

为使$P\cap Q=Q$，应使圆O_2内含或内切于圆O_1.

故有$|O_1O_2|^2\leqslant(r_1-r_2)^2$，

即$(-1+2)^2+(m-3)^2\leqslant\left(2-\frac{1}{2}\right)^2$.

解得$3-\frac{\sqrt{5}}{2}\leqslant m\leqslant 3+\frac{\sqrt{5}}{2}$.

13. 解：$A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$，

$B=\{x\mid x^2-ax+(a-1)=0\}=\{x\mid (x-1)[x-(a-1)]=0\}$.

当$a-1=1$，即$a=2$时，$B=\{1\}$，满足$A\cup B=A$；

当$a-1\neq 1$，即$a\neq 2$时，$B=\{1,a-1\}$，要使$A\cup B=A$，需有$a-1=2$，即$a=3$.

又$A\cap C=C$，$\therefore C\subseteq A$，因此集合C有三种情况：

①$A=C$，此时$m=3$；

②$C=\{1\}$或$C=\{2\}$，将$x=1,x=2$，代入$x^2-mx+2=0$，得$m=3$，

但此时方程应有两个相等的实根，$\Delta=0$，得$m=\pm2\sqrt{2}$，此为矛盾；

③$C=\varnothing$，$\Delta=m^2-8<0$，得$-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$.

综上可知，a的值为2，3；

m的值为3或是一个范围$(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$.

14. 解：因为$\{x,xy,\lg(xy)\}=\{0,|x|,y\}$，

所以$\lg(xy)=0$(因为当x,y之一为0时，$\lg(xy)$无意义).

即$xy=1$，再由集合N知$|x|=1$，或$y=1$.

当$y=1$时，由$xy=1$得$x=1$，根据元素的互异性知$y=1$不可能.

当$|x|=1$时，同理，由元素的互异性可知，$x=1$不可能.

故只能取$x=-1$，由$xy=1$得$y=-1$.

由$x=-1,y=-1$，知$x^{2n}=y^{2n}=1,x^{2n-1}=y^{2n-1}=-1(n\in\mathbf{N}_+)$.

所以$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{y^3}\right)+\cdots+\left(x^{2006}+\frac{1}{y^{2006}}\right)$

$=(-1-1)+(1+1)+(-1-1)+\cdots+(1+1)$

$=0$.

第二单元　简易逻辑

考纲揭秘　高考考什么?

1. 理解逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义，理解四种命题及其相互关系，掌握充要条件的意义.

2. 本单元虽然是新增内容，但逻辑是研究思维方式及其规律的一门基础学科，逻辑知识是认识问题、研究问题不可缺少的工具，在高考题中几乎每一题都要用到逻辑知识. 在学习中应先理清概念，熟记有关定义，学会进行四种命题的转换，并能判断命题的真假，掌握充要条件的意义，会判断两个命题的充分、必要关系. 掌握反证法证明题的步骤、适用的题型等. 主要考查逻辑推理能力.

考题通鉴　过去考什么?

高考年份	1999年	2000年	2001年	2002年	2003年	2004年春
考查题目	全国(18)	上海春(15)	上海(3) 天津理(15) 全国(12)	河南、广西、广东(7) 全国(9)	辽宁(16) 北京(3)、(4) 上海(15)	北京春(7)

考点秘笈　过去怎么考?

点击考点一：真假命题及四种命题等概念

有关命题真伪的试题，主要是对数学概念有准确的记忆和深层次的理解. 一般以选择题、填空题的形式出现，考查逻辑推理能力.

例1　(2001年天津理(15))在空间中

①若四点不共面，则这四点中任何三点都不共线；

②若两条直线没有公共点，则这两条直线是异面直线.

以上两个命题中，逆命题为真命题的是________.

命题目的：本题考查点共线、点共面和异面直线的基本知识，考查命题的有关概念.

解析：①中的逆命题是：若四点任何三点都不共线，则这四点不共面.

用正方体AC_1做模型来观察：上底面$A_1B_1C_1D_1$中任何三点都不共线，但A_1、B_1、C_1、D_1四点共面，所以①中逆命题不真.

②中的逆命题是：若两条直线是异面直线，则两条直线没有公共点，所以②中逆命题是真命题.

答案：②

> **评注**：本题以立体几何的知识为载体，考查四种命题的关系及其命题的真伪.

例2　(1999全国(18))α、β是两个不同的平面，m、n是平面α及β之外的两条不同直线. 给出四个论断：

①$m\perp n$　②$\alpha\perp\beta$　③$n\perp\beta$　④$m\perp\alpha$

以其中三个论断作为条件，余下一个论断作为结论，写出你认为正确的一个命题：________.

命题目的：本题主要考查直线与直线，直线与平面，平面与平面的位置关系等基础知识以及空间想象能力与逻辑推理能力.

解析一：以$m\perp n$作为结论，其余3个论断作为前提条件，检查命题是否正确：

因为$\alpha\perp\beta,n\perp\beta$，所以$n/\!/\alpha$，或$n\subset\alpha$.

当$n\subset\alpha$时，由$m\perp\alpha$得$m\perp n$；

当$n/\!/\alpha$时，过n作一平面与平面α相交于直线n'，则由前证知$m\perp n'$，根据线面平行性质这时$n/\!/n'$，故得$m\perp n$.

综合得正确的命题：$\alpha\perp\beta,n\perp\beta,m\perp\alpha\Rightarrow m\perp n$.

解析二：以$\alpha\perp\beta$作为结论，其余3个论断作为前提条件，检查命题是否正确.

因为$m\perp\alpha$，记垂足A，过A作直线$n'/\!/n$，

因为$n\perp\beta,m\perp n$，

所以$n'\perp\beta,n'\perp m$，

由于n'过α上的点A，故由$m\perp\alpha$知$m\perp n'$，

可知$n'\subset\alpha$，故由$n'\perp\beta$可得$\alpha\perp\beta$.

综合得正确的命题：$m\perp n,n\perp\beta,m\perp\alpha\Rightarrow\alpha\perp\beta$.

对于其余的两个命题，即①②③⇒④与①②④⇒③，都是不正确的. 如果先取它们进行检验，则不能获得所求答案. 这里所说的两个不正确的命题，实质上是一个命题的两种书写形式，用语言陈述，可合并说成："当两条直线互相垂直与两个平面互相垂直时，若其中的一条直线与一个平面垂直，则另一条直线与另一个平面垂直."这个命题可以用特例证明其不正确. 当所有条件成立时，另一条直线与另一个平面既可能平行，也可能斜交，当然也有可能垂直.

答案：$\alpha\perp\beta,n\perp\beta,m\perp\alpha\Rightarrow m\perp n$，或$m\perp n,n\perp\beta,m\perp\alpha\Rightarrow\alpha\perp\beta$(二者任选一个即可)

又若 $f(x)=x|x+a|+b$ 是奇函数，

即 $f(-x)=(-x)|(-x)+a|+b=-f(x)$.

则必有 $a=b=0$，则 $a^2+b^2=0$.

∴ $a^2+b^2=0$ 是 $f(x)$ 为奇函数的必要条件.

答案:D

评注:

需要搞清充分性与必要性之间的关系.

例 8 (2002 年北京)设命题甲:"直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 ACB_1 与对角面 BB_1D_1D 垂直";命题乙:"直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体". 那么，甲是乙的(   )

A. 充分必要条件　　　　B. 充分非必要条件

C. 必要非充分条件　　　D. 既非充分又非必要条件

命题目的:考查充要条件、棱柱的性质，以及逻辑推理能力和空间想象能力.

解析:若甲成立，乙不一定成立.

因为直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，只要满足底面对角线 $AC\perp BD$，则平面 $ACB_1\perp BB_1D_1D$，但底面四边形 $ABCD$ 不一定为正方形.

显然，若乙成立时，甲一定成立.

答案:C

评注:

注意直四棱柱成为正方体所满足的条件是底面是正方形，侧棱与底面边长相等. 此题在解答过程中要根据充要条件的概念进行判断.

例 9 (2003 年北京文理)"$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$"是"$\alpha=k\pi+\frac{5}{8}\pi,k\in\mathbf{Z}$"的(   )

A. 必要非充分条件　　　B. 充分非必要条件

C. 充分必要条件　　　　D. 既非充分又非必要条件

命题目的:考查充要条件及三角函数的有关知识.

解析:由 $\cos 2\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，得 $2\alpha=2k\pi+\frac{3}{4}\pi$，或 $2\alpha=2k\pi+\frac{5}{4}\pi,k\in\mathbf{Z}$，

即 $\alpha=k\pi+\frac{3}{8}\pi$，或 $\alpha=k\pi+\frac{5}{8}\pi,k\in\mathbf{Z}$.

则"$\alpha=k\pi+\frac{3}{8}\pi$，或 $\alpha=k\pi+\frac{5}{8}\pi,k\in\mathbf{Z}$"是"$\alpha=k\pi+\frac{5}{8}\pi,k\in\mathbf{Z}$"的必要非充分条件.

答案:A

评注:

关键是把握对三角函数的给值求角的准确运算.

例 10 (2002 年上海)已知函数 $y=f(x)$(定义域为 D，值域为 A)有反函数 $y=f^{-1}(x)$，则 $f(x)=0$ 有根为 a 且 $f(x)>x(x\in D)$ 的充要条件是 $y=f^{-1}(x)$ 满足________.

命题目的:考查充要条件和反函数的有关知识，以及数形结合的能力.

解析:因为 $y=f(x)$ 有反函数，则 $y=f(x)$ 必为单调函数，由方程 $f(x)=0$ 有解 $x=a$，则 $f(a)=0$.

又 $f(x)>x$，说明在定义域 D 内，函数 $y=f(x)$ 的图象在直线 $y=x$ 的上方.

而 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

因此，从代数角度回答有 $f^{-1}(0)=a$，且 $f^{-1}(x)<x(x\in A)$；从几何角度回答有 $y=f^{-1}(x)$ 图象在直线 $y=x$ 的下方，且与 y 轴的交点为 $(0,a)$.

答案:$f^{-1}(0)=a$，且 $f^{-1}(x)<x(x\in A)$，或 $y=f^{-1}(x)$ 图象在直线 $y=x$ 的下方，且与 y 轴的交点为 $(0,a)$

评注:

试题没有给出具体的函数，因此对抽象思维能力和逻辑思维能力有较高的要求，而且概念性也比较强. 解答本题的关键是抓住反函数的概念及其性质，并注意准确全面地进行数学三种语言的转换.

高考预测

明年怎么考?

简易逻辑是新高考考查的热点之一，在高考中以选择题、填空题出现，属中档题，若以函数、数列、立体几何等知识为载体，可能考查解答题. 可以说，高考无处不逻辑，预测会从以下几方面命题:

(1)可能考查逻辑联结词及其判断复合命题的真假;

(2)可能考查命题的四种形式及相互关系，初步掌握反证法;

(3)继续对充要条件进行考查.

预测考点一:命题的概念

本题型主要考查逻辑联结词及判断复合命题的真假，一般地，若两个命题属于同时都要满足的为"且"，属于并列的为"或";"且"的否定为"或"，"或"的否定为"且"，借助真值表判断复合命题的真假更有效.

例 1 (2004 年北京春理)已知三个不等式:$ab>0$，$bc-ad>0$，$\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$(其中 a,b,c,d 均为实数)，用其中两个不等式作为条件，余下的一个不等式作为结论组成一个命题，可组成的正确命题的个数是(   )

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

命题目的:本题主要考查不等式的基本性质，以及逻辑推理与计算技能.

解析:

①$\left.\begin{array}{l}ab>0\Rightarrow\frac{1}{ab}>0\\ bc-ad>0\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$，是真命题;

②$\left.\begin{array}{l}ab>0\\ \frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0\end{array}\right\}\Rightarrow bc-ad>0$，是真命题;

③$\left.\begin{array}{l}\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0\Rightarrow\frac{bc-ad}{ab}>0\Rightarrow\frac{ab}{bc-ad}>0\\ bc-ad>0\end{array}\right\}\Rightarrow ab>0$，是真命题.

答案:D

评注:

判断命题的真假,本题主要靠不等式的性质4的正确运用.

例2 (2004年山东省临沂市模拟题)由下列各组命题构成"p或q","p且q","非p"形式的复合命题中,p或q为真,p且q为假,非p为真的是( )

A. p:3为偶数;q:4是奇数

B. p:$3+2=6$;q:$5>3$

C. p:$a\in\{a,b\}$;q:$\{a\}\subsetneqq\{a,b\}$

D. p:$\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$;$q$:$\mathbf{N}=\mathbf{N}$

命题目的:主要考查对逻辑联结词的理解与判断命题真假的方法.

解析:由"p或q为真,p且q为假,非p为真"得p为假,q为真,∴ 只有B满足.

答案:B

评注:

解答本题需记住真值表,且能判断每个简单命题的真假.

预测考点二:四种命题的关系以及反证法

理解并掌握四种命题及其相互的关系,能够利用原命题与其逆否命题的等价性(即同真或同假)来判断命题的真假是解答这类题型的关键.

例3 (1994年上海高考)某个命题与自然数n有关,若$n=k(k\in\mathbf{N}_+)$时命题成立,那么可推得当$n=k+1$时该命题也成立.现已知当$n=5$时,该命题不成立,那么可推得( )

A. 当$n=6$时该命题不成立

B. 当$n=6$时该命题成立

C. 当$n=4$时该命题不成立

D. 当$n=4$时该命题成立

命题目的:本题考查四种命题的关系以及逻辑思维能力.

解析:因为当$n=k$时,命题成立可推得$n=k+1$时命题成立,所以$n=5$时命题不成立,则$n=4$时,命题也一定不成立.

答案:C

评注:

命题"当$n=k$时命题成立可推得$n=k+1$时命题成立"的逆否命题为"当$n=k+1$时命题不成立可推得$n=k$时命题也不成立".本题就是利用原命题与逆否命题的等价性作出判断的.

例4 (1996年沈阳模拟题)已知函数$f(x)=2x^2+mx+n$,求证:$|f(1)|$、$|f(2)|$、$|f(3)|$中至少有一个不小于1.

命题目的:主要考查逻辑思维能力以及分析问题和解决问题的能力.

证明:假设原命题不成立,

即$|f(1)|$、$|f(2)|$、$|f(3)|$都小于1.

则$\begin{cases}|f(1)|<1,\\|f(2)|<1,\\|f(3)|<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1<2+m+n<1, & ①\\-1<8+2m+n<1, & ②\\-1<18+3m+n<1. & ③\end{cases}$

①+③,得$-11<2m+n<-9$与②$-9<2m+n<-7$矛盾,所以假设不成立.

即$|f(1)|$、$|f(2)|$、$|f(3)|$中至少有一个不小于1.

评注:

(1)用反证法证明命题的一般步骤为:

①假设命题的结论不成立,即假设命题结论的反面成立;

②从这个假设出发,经过推理论证得出矛盾;

③由矛盾判断假设不正确,从而肯定命题的结论正确.

(2)较适宜使用反证法的常见情况:

①以"至少…"或"至多…"的形式为结论的命题;

②涉及"唯一性、存在性"的问题;

③以否定形式为结论的命题;

④以结论的反面更易入手研究的问题.

(3)正确地作出"若p则q"的否定:"p且非q"是正确运用反证法的前提.

(4)反证法的逻辑依据为:要证明命题"若p则q为真",改证:"p且非q为假".因此,反证法的核心:从非q出发去导出矛盾.

例5 (1999年天津市模拟题)已知a、b为实数,若$x^2+ax+b\leqslant0$有非空解集,则$a^2-4b\geqslant0$,写出该命题的逆命题、否命题、逆否命题,并判断这些命题的真假(不需证明).

命题目的:主要考查四种命题的关系及判断命题真假的能力.

解:逆命题:已知a、b为实数,若$a^2-4b\geqslant0$,则$x^2+ax+b\leqslant0$有非空解集.

否命题:已知a、b为实数,若$x^2+ax+b\leqslant0$没有非空解集,则$a^2-4b<0$.

逆否命题:已知a、b为实数,若$a^2-4b<0$,则$x^2+ax+b\leqslant0$没有非空解集.

原命题、逆命题、否命题、逆否命题均为真命题.

评注:

对于命题的条件是什么?结论是什么?有没有前提?必须把握地熟和准,方能解答此类题型,特别地,如所给命题的真假不易判断时,可以转化为判断它的逆否命题.欲说明一个命题为真命题,须通过逻辑证明;而说明一个命题为假命题,则举一反例即可.

预测考点三:对充分、必要条件的考查

充分、必要条件是对命题进行研究的重要途径,这部分知识是每年高考的必考内容,一般以选择题的形式出现,考查逻辑推理能力.

例6 (1996年上海高考(文))若$y=f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的函数,则$y=f(x)$为奇函数的一个充要条件为( )

A. $f(x)=0$

B. 对任意$x\in\mathbf{R}$,$f(x)=0$都成立

C. 存在某$x_0\in\mathbf{R}$,使得$f(x_0)+f(-x_0)=0$

D. 对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)+f(-x)=0$ 都成立

命题目的：主要考查函数奇偶性定义的理解程度.

解析：由奇函数定义可知：若 $f(x)$ 为奇函数，则对定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，即 $f(-x)+f(x)=0$. 反之，若有 $f(x)+f(-x)=0$，即 $f(-x)=-f(x)$，由奇函数的定义可知 $f(x)$ 为奇函数.

答案：D

评注：

对于判断奇偶性问题应注意：x 为定义域内任意值，因此定义域本身应关于原点对称，这是奇偶性问题的必要条件.

例 7 （1995 年上海高考）“$ab<0$”是“方程 $ax^2+by^2=c$ 表示双曲线”的(　　)

A. 必要条件但不是充分条件

B. 充分条件但不是必要条件

C. 充分必要条件

D. 既不是充分条件又不是必要条件

命题目的：本题考查充要条件的推理判断和双曲线的概念.

解析：如果方程 $ax^2+by^2=c$ 表示双曲线，即 $\dfrac{x^2}{\frac{c}{a}}+\dfrac{y^2}{\frac{c}{b}}=1$ 表示双曲线，因此有 $\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{c}{b}<0$，这就是说“$ab<0$”是必要条件；若 $ab<0$，c 可以为 0，此时，方程不表示双曲线，即“$ab<0$”不是充分条件.

答案：A

评注：

充要条件是重要的数学概念，主要用来说明命题的条件和结论之间的关系的.

(1)从逻辑推理关系上看：

①若 $p\Rightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$，则 p 是 q 的充分而不必要条件；

②若 $q\Rightarrow p$ 且 $p\nRightarrow q$，则 p 是 q 的必要而不充分条件；

③若 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$（或 $p\Rightarrow q$ 且 $\neg p\Rightarrow\neg q$），则 p 是 q 的充要条件；

④若 $p\nRightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$，则 p 既不是 q 的充分条件，也不是 q 的必要条件；

(2)从集合与集合之间关系上看：

①若 $A\subseteq B$，则 A 是 B 的充分条件；

②若 $A\supseteq B$，则 A 是 B 的必要条件；

③若 $A=B$，则 A 是 B 的充要条件；

④若 $A\nsubseteq B$ 且 $B\nsubseteq A$，则 A 既不是 B 的充分条件，也不是 B 的必要条件.

在结合具体问题进行判断时，应注意以下三点：

①确定条件是什么，结论是什么；

②尝试从条件推结论，结论推条件；

③确定条件是结论的什么条件.

例 8 （2001 年长沙市模拟题）设 $x,y\in\mathbf{R}$，求证：$|x+y|=|x|+|y|$ 成立的充要条件是 $xy\geqslant0$.

命题目的：本题考查充分、必要条件的推理判断的方向性和实数绝对值的概念.

解：充分性是证：$xy\geqslant0\Rightarrow|x+y|=|x|+|y|$；

必要性是证：$|x+y|=|x|+|y|\Rightarrow xy\geqslant0$.

先证充分性：如果 $xy=0$，那么①$x=0$，$y\neq0$；②$y=0$，$x\neq0$；③$x=0$，$y=0$. 于是 $|x+y|=|x|+|y|$.

如果 $xy>0$，即 $x>0$，$y>0$，或 $x<0$，$y<0$.

当 $x>0$，$y>0$ 时，$|x+y|=|x|+|y|$.

当 $x<0$，$y<0$ 时，$|x+y|=-(x+y)=-x+(-y)=|x|+|y|$.

总之，当 $xy\geqslant0$ 时，有 $|x+y|=|x|+|y|$.

再证必要性：由 $|x+y|=|x|+|y|$ 及 $x,y\in\mathbf{R}$，

得 $(x+y)^2=(|x|+|y|)^2$.

即 $x^2+2xy+y^2=x^2+2|xy|+y^2$，

即 $|xy|=xy$，$\therefore xy\geqslant0$.

评注：

充要条件的证明关键是根据定义确定哪是条件，哪是结论，然后搞清充分性是证明哪一个命题，必要性是证明哪一个命题，它们是两个互逆的命题，一定要把握准方向性.

仿真模拟

高考大揭秘

一、选择题

1. 已知 $U=\mathbf{R}$，$A\subseteq U$，$B\subseteq U$，如果命题 P：$x\in A\cap B$，则命题“非 P”是(　　)

A. $x\notin A$　　B. $x\in\neg B$

C. $x\notin(A\cup B)$　　D. $[x\in(\neg A)\cup(\neg B)]$

2. 命题“p 或 q”是真命题，命题“p 且 q”是假命题，那么(　　)

A. 命题 p 和命题 q 都是假命题

B. 命题 p 和命题 q 都是真命题

C. 命题 p 和命题“非 q”真值不同

D. 命题 p 和命题“非 q”真值相同

3. 若命题 p 的逆命题是 q，命题 q 的否命题是 r，则 p 是 r 的(　　)

A. 逆命题　　B. 逆否命题

C. 否命题　　D. 以上判断都不对

4. 已知 $h>0$，设命题甲为：“两个实数 a,b 满足 $|a-b|<2h$”，命题乙为：“两个实数 a,b 满足 $|a-1|<h$，且 $|b-1|<h$”，那么(　　)

A. 甲是乙的充分条件，但不是乙的必要条件

B. 甲是乙的必要条件，但不是乙的充分条件

C. 甲是乙的必要条件

D. 甲不是乙的充分条件，也不是乙的必要条件

5. 用反证法证明命题“$a,b\in\mathbf{N}$，ab 可被 5 整除，那么 a,b 中至少有一个能被 5 整除”，那么假设的内容是(　　)

A. a,b 都能被 5 整除　　B. a,b 都不能被 5 整除

C. a 不能被 5 整除　　D. a,b 有一个不能被 5 整除

6. 已知真命题：“$a\geqslant b\Rightarrow c>d$”和“$a<b\Leftrightarrow e\leqslant f$”，那么“$c\leqslant d$”是“$e\leqslant f$”的(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

二、填空题

7. 已知集合 A、B、C，$A=\{直线\}$，$B=\{平面\}$，$C=A\cup B$，若 $a\in A$，$b\in B$，$c\in C$，在下列命题中

① $\begin{cases}a\perp b,\\ c\perp b\end{cases}\Rightarrow a//c$；　② $\begin{cases}a\perp b,\\ c//d\end{cases}\Rightarrow a\perp c$；

③ $\begin{cases}a//b,\\ c//b\end{cases}\Rightarrow a//c$；　④ $\begin{cases}a//b,\\ c\perp b\end{cases}\Rightarrow a\perp c$.

正确命题的序号是________.

8. 下列命题：①“若 $xy=1$，则 x,y 互为倒数”的逆命题；
②“四边相等的四边形是正方形”的否命题；
③“梯形不是平行四边形”的逆否命题；
④“若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$”的逆命题；
其中真命题是________.

9. p：$-2<m<0$，$0<n<1$；q：关于 x 的方程 $x^2+mx+n=0$ 有两个小于 1 的正根，则 p 是 q 的________条件.

10. 已知 p：$|2x-3|>1$；q：$\dfrac{1}{x^2+x-6}>0$，则$\neg p$ 是$\neg q$ 的________条件.

三、解答题

11. 如果两个实数的积是有理数，那么这两个数都是有理数. 写出此命题的逆命题、否命题、逆否命题，并判断这些命题的真假.

12. 在图 1-2-2 的各电路图中，闭合开关 A 各是灯泡 B 亮的什么条件.

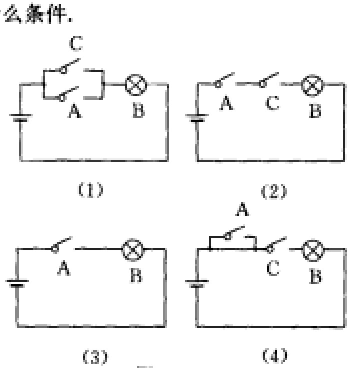

图 1-2-2

13. 设 $0°<\alpha<45°$，求证：2α 可作为一个三边为整数的直角三角形的内角的充要条件是 $\tan\alpha$ 的值是有理数.

14. 求证：抛物线上任取不同 4 点组成的四边形不可能是平行四边形.

仿真模拟答案　揭秘大参考

1. D　解析：根据题意，“非 p”即 $x\notin A\cap B$，所以 $x\in\neg(A\cap B)$，即 $x\in[(\neg A)\cup(\neg B)]$（摩根法则）.

2. D　解析：根据题意，命题 p 与命题 q 一个为真，一个为假，所以命题 p 和命题“非 q”同真或同假，真值相同.

3. B　解析：p 为 q 的逆命题，r 为 q 的否命题，由于逆命题与否命题互为逆否命题，所以 p 与 r 互为逆否命题.

4. B　解析：由 $\begin{cases}|a-1|<h,\\ |b-1|<h,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-h<a-1<h,\\ -h<b-1<h.\end{cases}$

所以 $\begin{cases}1-h<a<h+1,\\ -h-1<-b<h-1,\end{cases}$ 即 $-2h<a-b<2h$，则 $|a-b|<2h$ 成立；

但由 $|a-b|<2h$ 不一定有“$|a-1|<h$，且 $|b-1|<h$”成立.

5. B　解析：由反证法知，假设的内容应为：非“a,b 中至少一个能被 5 整除”，即“a,b 都不能被 5 整除”.

6. A　解析：若“$c\leqslant d$”，由于“$a\geqslant b\Rightarrow c>d$”是真命题，则其逆否命题“$c\leqslant d\Rightarrow a<b$”也是真命题，又“$a<b\Leftrightarrow e\leqslant f$”也是真命题，得“$c\leqslant d\Rightarrow e\leqslant f$”是真命题，即“$c\leqslant d$”是“$e\leqslant f$”的充分条件.

若“$e\leqslant f$”，由“$e\leqslant f\Leftrightarrow a<b$”是真命题，而“$a<b\Rightarrow c\leqslant d$”是“$a\geqslant b\Rightarrow c>d$”的否命题，不一定是真命题，即“$e\leqslant f\Leftrightarrow a<b\not\Rightarrow c\leqslant d$”，即“$c\leqslant d$”不是“$e\leqslant f$”的必要条件.

7. ②　解析：a 是直线，b 是平面，c 是平面或直线，根据直线与直线垂直及线面垂直的判定定理可知，只有②正确.

8. ①②③　解析：①的逆命题为：若 x,y 互为倒数，则 $xy=1$. 是真命题.
②的否命题为：四边不等的四边形不是正方形. 是真命题.
③的原命题是真命题，故其逆否命题是真命题.
④的逆命题是：若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$. 是假命题.

9. 必要不充分　解析：若关于 x 的方程 $x^2+mx+n=0$ 有两个小于 1 的正根，设为 x_1,x_2，则 $0<x_1<1$，$0<x_2<1$. 有 $0<x_1+x_2<2$，且 $0<x_1x_2<1$.

根据韦达定理：$\begin{cases}x_1+x_2=-m,\\ x_1x_2=n,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}0<-m<2,\\ 0<n<1.\end{cases}$

有 $-2<m<0$，$0<n<1$，即有 $q\Rightarrow p$.

反之，取 $m=-\dfrac{1}{3}$，$n=\dfrac{1}{2}$，$x^2-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{2}=0$，$\Delta=\dfrac{1}{9}-4\times\dfrac{1}{2}<0$，

方程 $x^2+mx+n=0$ 无实根，所以 $p\not\Rightarrow q$.

综上所述，p 是 q 的必要不充分条件.

10. 充分不必要　解析：p：$|2x-3|>1\Rightarrow 2x-3>1$，或 $2x-3<-1\Rightarrow x>2$，或 $x<1$；

$\neg p$：$\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$；

q：$\dfrac{1}{x^2+x-6}>0\Rightarrow x^2+x-6>0\Rightarrow(x+3)(x-2)>0\Rightarrow x>2$，或 $x<-3$；

$\neg q$：$\{x|-3\leqslant x\leqslant 2\}$；

根据两集合 $\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$ 和 $\{x|-3\leqslant x\leqslant 2\}$ 的关系知：

$\neg p\Rightarrow\neg q$，$\neg q\not\Rightarrow\neg p$. 故$\neg p$ 是$\neg q$ 的充分不必要条件.

11. 解：逆命题：如果两个实数都是有理数，那么这两个实数的积是有理数.

否命题：如果两个实数的积是无理数，那么这两个实数不都是有理数.

逆否命题：如果两个实数不都是有理数，那么这两个实数的积是无理数.

原命题与逆否命题是假命题，否命题与逆命题是真命题.

12. 解：如图 1-2-2.

(1)先闭合开关 A，发现灯泡 B 亮；反过来，若要灯泡 B 亮，断开开关 A，闭合开关 C 也可达到，故开关 A 闭合是灯泡 B 亮的充分但不必要条件.

(2)闭合开关 A，但不闭合 C，发现灯泡 B 仍然不亮；反

之，灯泡B要亮，不闭合开关A，只闭合开关C，仍然达不到，故开关A闭合是灯泡B亮的必要但不充分条件.

(3)先让开关A闭合，发现灯泡B亮；反之，若要灯泡B亮，开关A非闭合不可，故开关A闭合是灯泡B亮的充要条件.

(4)开关A不闭合，C闭合，发现灯泡B仍然亮；反过来，灯泡B要亮开关A闭合与不闭合都可，只要C闭合就可达到，故开关A闭合是灯泡B亮的既不充分又不必要条件.

13. 证明：(1)先证必要性，如图1-2-3.

设Rt$\triangle ABC$三边a,b,c均为正整数，$\angle C=90°$，$\angle BAC=2\alpha$，延长CA到D，使$AD=AB=c$，则$\angle D=\alpha$，且有$\tan\alpha=\dfrac{a}{b+c}$为有理数.

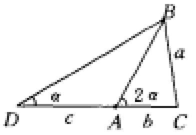

图1-2-3

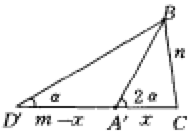

图1-2-4

(2)再证充分性，如图1-2-4.

若$\tan\alpha$为有理数，且$0°<\alpha<45°$，

$\therefore$存在正整数$m,n(m>n)$，使得$\tan\alpha=\dfrac{n}{m}$.

作Rt$\triangle D'B'C'$，$\angle C'=90°$，$B'C'=n$，$D'C'=m$，

在$D'C'$上取$A'C'=x$，使满足$x^2+n^2=(m-x)^2\Rightarrow x=\dfrac{m^2-n^2}{2m}$，$A'D'=m-x=\dfrac{m^2+n^2}{2m}$，$A'C'=x=\dfrac{m^2-n^2}{2m}$，$B'C'=n$且满足$\angle B'A'C'=2\alpha$，只需将Rt$\triangle A'B'C'$三边都扩大$2m$倍，得Rt$\triangle ABC$(与$\triangle A'B'C'$相似)，那么Rt$\triangle ABC$的三边即为内角$\angle BAC=2\alpha$，三边均为正整数$(m^2-n^2,2mn,m^2+n^2)$的直角三角形.

故2α作为一个三边为整数的直角三角形的内角的充要条件是$\tan\alpha$的值是有理数.

14. 证明：如图1-2-5，抛物线方程为$y^2=ax(a>0)$.

假设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$是抛物线上4点，且四边形$ABCD$是平行四边形.

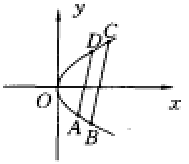

图1-2-5

有$y_i^2=ax_i$，$x_i=\dfrac{y_i^2}{a}(i=1,2,3,4)$.

$\therefore k_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{a}{y_2+y_1}$，$k_{BC}=\dfrac{a}{y_2+y_3}$，$k_{CD}=\dfrac{a}{y_4+y_3}$，$k_{DA}=\dfrac{a}{y_1+y_4}$.

由$\square ABCD$知，$k_{AB}=k_{CD}$，$k_{BC}=k_{AD}$.

$\therefore y_1=y_3$，$y_2=y_4$，进而$x_1=x_3$，$x_2=x_4$，

于是A、C重合，B、D重合.

这与A、B、C、D是抛物线上不同四点矛盾，

故$ABCD$不可能组成平行四边形.

例 4 (2003 年北京春)若 $f(x)=\frac{x-1}{x}$,则方程 $f(4x)=x$ 的根是( )

A. -2 B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

命题目的:本题主要考查函数的对应法则、函数与方程的关系及求方程的根.

解析:$f(4x)=\frac{4x-1}{4x}$,依题意 $\frac{4x-1}{4x}=x$,解得 $x=\frac{1}{2}$.

答案:D

评注:

在函数的解析式 $y=f(\square)$ 中,$\square$ 内可填任意一个代数式.

例 5 (1999 年上海文)某工程的工序流程图如图 2-1-1(工作单位:天),现已知工程总时数为 10 天,则工序 c 所需工时为______天.

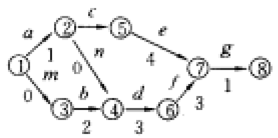

图 2-1-1

命题目的:考查解决实际问题的能力.

解析:设工序 c 所需时数为 x 天,由题意设关键路线是 $a\to c\to e\to g$,需工时 $1+x+4+1=10$,解得 $x=4$,即工序 c 所需时数为 4 天.

答案:4

评注:

本题新颖,属于"优选法"题型,主要考查工序流程图内容的基础知识及数形结合对图形分析的能力,研究此题不需要建立函数关系式,不需要多高的数学知识,考查学生用数学思维解决问题的能力,这是今后高考命题的方向,与 2001 年全国高考第 12 题有异曲同工之妙.

例 6 (2001 年上海高考)根据报道,我国目前成为世界上受荒漠化危害最严重的国家之一.图 2-1-2 中(1)表示我国土地沙化总面积在上个世纪五六十年代、七八十年代、九十年代的变化情况.由图中的相关信息,可将上述有关年代中,我国年平均土地沙化面积在图 2-1-2(2)中表示为:

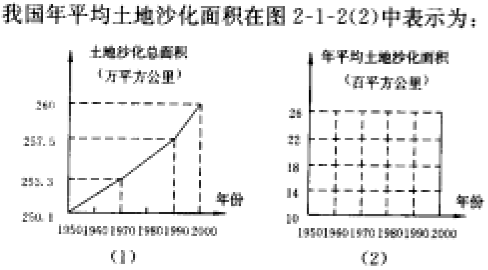

图 2-1-2

命题目的:主要考查函数的表示方法(图象法)及通过识图解决实际问题的能力.

解析:由图中的沙化面积可以利用 $\frac{\text{总面积}}{\text{年代}}=$ 平均面积,因为题中分了五六十年代、七八十年代、九十年代三段,所以可分别求出三段的平均面积.

$\frac{(253.3-250.1)\times10^2}{20}=16$,

$\frac{(257.5-253.3)\times10^2}{20}=21$,

$\frac{(260-257.5)\times10^2}{10}=25$.

答案:如图 2-1-3 所示

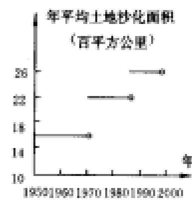

图 2-1-3

评注:

本题考查了学生读图、识图能力,怎样利用已有的信息用图象的形式表示出特定关系,虽属容易题,但在单位换算上易出问题,导致错误.

例 7 (2002 年上海文、理 16)一般地,家庭用电量(千瓦时)与气温(℃)有一定的关系,如图 2-1-4 所示,图(1)表示某年 12 个月中每月的平均气温.图(2)表示某家庭在这年 12 月中每个月的用电量.根据这些信息以下关于家庭用电量与其气温关系的叙述中,正确的选项是( )

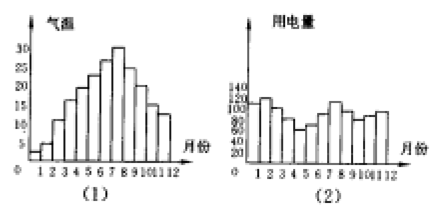

图 2-1-4

A. 气温最高时,用电量最多

B. 气温最低时,用电量最少

C. 当气温大于某一值时,用电量随气温增高而增加

D. 当气温小于某一值时,用电量随气温渐低而增加

命题目的:本题考查学生对函数的表示方法——图象法的识别与理解能力.

解析:经比较可发现,2 月份用电量最多,而 2 月份气温明显不是最高,因此 A 项错误;同理可判断出 B 项错误,由 5、6、7 三个月的气温和用电量可得 C 项正确.

答案:C

评注:

只要把握住图表的特点,加强对图表的认识和理解能力,此类问题不难解决.

点击考点三:函数的定义域

函数的定义域是函数的灵魂,函数定义域决定了函数值域,是研究函数性质的基础.

例 8 (2002 年上海春 1)函数 $y=\frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ 的定义

域为________.

命题目的:求具体函数的定义域.

解析:由题意得 $3-2x-x^2>0$,可得 $-3<x<2$.

答案:$(-3,2)$

评注:求函数定义域,主要涉及以下几种:(1)分式的分母不得为0;(2)偶次方根的被开方式,其值非负;(3)对数函数的真数必须大于0;(4)$y=\tan x, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$;(5)$y=\cot x, x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$;此外,当对数或指数函数的底数中含 x 时,底数需大于0且不等于1,负指数、零指数底数不得为0.

例 9 (2000年上海 2)函数 $y=\log_2\frac{2x-1}{3-x}$ 的定义域为________.

命题目的:本题是求对数函数的定义域.

解析:由 $\frac{2x-1}{3-x}>0$,得 $\frac{2x-1}{x-3}<0$,即 $(2x-1)(x-3)<0$,得 $\frac{1}{2}<x<3$.

答案:$\left(\frac{1}{2},3\right)$

评注:由真数大于零转化到解分式不等式,再转化到解一元二次不等式,注意转化的等价性;分式若是高次的,用标根法求解.

例 10 (2003年全国)设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1, & x\leqslant 0,\\ x^{\frac{1}{2}}, & x>0.\end{cases}$ 若 $f(x_0)>1$,则 x_0 的取值范围是( )

A. $(-1,1)$ B. $(-1,+\infty)$

C. $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ D. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

命题目的:考查分段函数的有关知识及定义域.

解析一:$\because f(x_0)>1$,

当 $x_0\leqslant 0$ 时,$2^{-x_0}-1>1, 2^{-x_0}>2, -x_0>1$,$\therefore x_0<-1$;

当 $x_0>0$ 时,$x_0^{\frac{1}{2}}>1$,$\therefore x_0>1$.

综上,x_0 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

解析二:首先画出函数 $y=f(x)$ 与 $y=1$ 的图象如图 2-1-5,由图中易得 $f(x)>1$ 时所对应 x 的取值范围.

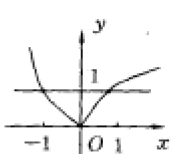

图 2-1-5

答案:D

评注:分段函数中,由函数值的范围去求自变量的范围时,可每段求解后再看相应的定义域,同时数形结合也是解决分段函数的有效手段,对问题的处理简捷明快.

例 11 (2001年上海理 1)设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}, & x\in(-\infty,1],\\ \log_{81}x, & x\in(1,+\infty),\end{cases}$ 则满足 $f(x)=\frac{1}{4}$ 的 x 值为________.

命题目的:已知函数值求自变量的取值.

解析:当 $x\leqslant 1$ 时,函数的值域为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$;当 $x>1$ 时,函数的值域为 $(0,+\infty)$.

$\because y=\frac{1}{4}, y\in(0,+\infty)$,$\therefore$ 此时 $x\in(1,+\infty)$,

$\therefore \log_{81}x=\frac{1}{4}, x=81^{\frac{1}{4}}$,$\therefore x=3$.

答案:3

评注:对于分段函数要分段考虑,从值域的范围看给的函数值是否在范围内,在范围内去求解.此题虽属定义域范围内题目,但由于是求自变量的具体值,难度相对就小了.

点击考点四:函数的值域

函数的值域是较复杂的问题,因与函数的最值密切相关,所以在历届高考试题中经常出现,要掌握各种方法的求解.常用方法有:函数的单调性、配方法、反函数定义域是原函数值域、三角函数有界性、判别式法、换元法、均值不等式、数形结合、导数法等.

例 12 (1999年全国 17)若正数 a,b 满足 $ab=a+b+3$,则 ab 的取值范围是________.

命题目的:本题考查函数的值域.

解析一:由 $ab=a+b+3\geqslant 2\sqrt{ab}+3$(等号成立条件 $a=b$),整理得 $ab-2\sqrt{ab}-3\geqslant 0$,$(\sqrt{ab}-3)(\sqrt{ab}+1)\geqslant 0$,

$\therefore \sqrt{ab}\geqslant 3, ab\geqslant 9$.

解析二:由 $ab=a+b+3$,可得 $b=\frac{a+3}{a-1}(a>0,b>0)$,

$\therefore a>1$.又 $ab=a\cdot\frac{a+3}{a-1}=[(a-1)+1]\frac{a+3}{a-1}=(a+3)+\frac{a+3}{a-1}=a-1+4+\frac{a-1+4}{a-1}=(a-1)+\frac{4}{a-1}+5\geqslant 2\sqrt{(a-1)\frac{4}{a-1}}+5=9$,等号成立条件为 $a-1=\frac{4}{a-1}$,即 $a=3$.

答案:$[9,+\infty)$

评注:本题考查利用均值不等式的应用求解值域以及推理论证能力.

例 13 (2000年上海 15)若集合 $S=\{y|y=3^x, x\in\mathbf{R}\}$,$T=\{y|y=x^2-1, x\in\mathbf{R}\}$,则 $S\cap T$ 是( )

A. S B. T C. $\varnothing$ D. 有限集

命题目的:利用集合的观点考查函数的值域.

解析:$\because y=3^x>0(x\in\mathbf{R})$,$\therefore S=\{y|y>0\}$.

$\because y=x^2-1\geqslant -1(x\in\mathbf{R})$,$\therefore T=\{y|y\geqslant -1\}$.

$\therefore S\subset T$,从而 $S\cap T=S$.

答案:A

评注:只要明确集合的元素是什么,公共属性是谁,结合函数值域,此题很容易解出.

例 14 (2004年全国文理 12)已知 $a^2+b^2=1, b^2+c^2=$