WEIGHTED MEASUREMENT FUSION ESTIMATION THEORY FOR NONLINEAR SYSTEMS AND ITS APPLICATION

非线性系统加权观测融合估计理论及其应用

郝 钢◎著

中国工信出版集团
電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

非线性系统加权观测融合估计理论及其应用

郝 钢 著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书系统地介绍了由作者提出的非线性系统的信息融合估计新方法、新理论及应用。本书主要介绍了几种非线性系统的估计方法，并从优缺点、适用范围、算法精度、复杂度等方面进行性能分析。为了提高单个传感器的估计精度，提出了非线性系统的多传感器信息融合方法——加权观测融合方法，该方法有效地解决了非线性系统的融合问题。

本书反映了非线性系统融合估计领域的最新研究成果，内容新颖，论述严谨，理论体系完整，并含有大量的仿真例子，可作为高等学校控制科学与工程、电子科学与技术、通信与信息技术、计算机应用技术等相关专业高年级本科生和研究生的教材或参考书，且对信号处理、控制、通信、航天、导航、制导、目标跟踪、GPS 定位、检测与估计、故障诊断、石油勘探等领域从事非线性系统融合估计的科研和工程技术人员有重要参考价值。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有，侵权必究。

图书在版编目（CIP）数据

非线性系统加权观测融合估计理论及其应用 / 郝钢著. —北京：电子工业出版社，2019.8
ISBN 978-7-121-37415-9

Ⅰ. ①非… Ⅱ. ①郝… Ⅲ. ①非线性系统（自动化）—应用—传感器—数据融合—研究
Ⅳ. ①TP271②TP212

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 197448 号

责任编辑：刘小琳　　文字编辑：崔　彤
印　　刷：北京七彩京通数码快印有限公司
装　　订：北京七彩京通数码快印有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编：100036
开　　本：720×1 000　1/16　印张：20.75　字数：332 千字
版　　次：2019 年 8 月第 1 版
印　　次：2019 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：129.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：liuxl@phei.com.cn，（010）88254538。

主要符号

$\boldsymbol{R}^n$ ——n 维实数向量据全体

$\boldsymbol{R}^{n\times m}$ ——$n\times m$ 维实数矩阵据全体

$\in$ ——属于

$\boldsymbol{I}_n$ ——n 维单位矩阵

$\mathrm{E}\{\bullet\}$ ——数学期望

$\|\boldsymbol{A}\|$ ——矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的范数

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ ——矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置

$\boldsymbol{A}^{-1}$ ——矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆

$\boldsymbol{A}^{+}$ ——矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伪逆，$\boldsymbol{A}^{+}=\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

$\mathrm{Rank}(\boldsymbol{A})$ ——矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩

$\det(\boldsymbol{A})$ ——矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式

$\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ ——以 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为对角元素的对角矩阵

$(\bullet)$ ——表示与前一个相同

$\hat{\boldsymbol{x}}(k\mid k)=\mathrm{E}\left\{\boldsymbol{x}(k)\middle|\boldsymbol{Z}_{0\sim k}\right\}$ ——随机变量 $\boldsymbol{x}$ 基于数据 $\boldsymbol{Z}_{0\sim k}$ 的滤波估计

$\hat{\boldsymbol{x}}(k\mid k-\tau)=\mathrm{E}\left\{\boldsymbol{x}(k)\middle|\boldsymbol{Z}_{0\sim k-\tau}\right\}$ ——随机变量 $\boldsymbol{x}$ 基于数据 $\boldsymbol{Z}_{0\sim k-\tau}$ 的 τ 步预报估计

$\boldsymbol{P}_{xz}(k\mid k-\tau)=\mathrm{E}\left\{\left(\boldsymbol{x}(k)-\hat{\boldsymbol{x}}(k\mid k-\tau)\right)\left(\boldsymbol{z}(k)-\hat{\boldsymbol{z}}(k\mid k-\tau)\right)^{\mathrm{T}}\middle|\boldsymbol{Z}_{0\sim k-\tau}\right\}$，$\tau=1,\cdots,k$ ——随机变量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{z}$ 基于数据 $\boldsymbol{Z}_{0\sim k-\tau}$ 的 τ 步预报误差方差阵

$\boldsymbol{P}_{z}(k\mid k-\tau)=\mathrm{E}\left\{\tilde{\boldsymbol{z}}(k\mid k-\tau)(\bullet)^{\mathrm{T}}\middle|\boldsymbol{Z}_{0\sim k-\tau}\right\}$ ——随机变量 $\boldsymbol{z}$ 基于数据 $\boldsymbol{Z}_{0\sim k-\tau}$ 的 τ 步预报误差方差阵

$\boldsymbol{P}(k\mid k-\tau)=\mathrm{E}\left\{\left(\boldsymbol{x}(k)-\hat{\boldsymbol{x}}(k\mid k-\tau)\right)(\bullet)^{\mathrm{T}}\middle|\boldsymbol{Z}_{0\sim k-\tau}\right\}$——随机变量 $\boldsymbol{x}$ 基于数据 $\boldsymbol{Z}_{0\sim k-\tau}$ 的 τ 步预报误差方差阵

$\boldsymbol{P}(k\mid k)=\mathrm{E}\left\{\left(\boldsymbol{x}(k)-\hat{\boldsymbol{x}}(k\mid k)\right)(\bullet)^{\mathrm{T}}\middle|\boldsymbol{Z}_{0\sim k}\right\}$——随机变量 $\boldsymbol{x}$ 基于数据 $\boldsymbol{Z}_{0\sim k}$ 的滤波方差阵

前 言
Preface

20 世纪 70 年代，一门新兴的学科——多传感器信息融合（Multisensor Information Fusion，MSIF）迅速地发展起来，并在各种武器平台上及民事领域得到广泛应用。近年来，随着计算机技术、通信技术的发展，特别是军事上的迫切要求，多传感器信息融合技术得到了迅速发展，并引起了世界范围内的普遍关注。信息融合技术首先应用于军事领域，包括现代 C^3I（指挥、控制、通信与情报）系统和各种武器平台上；在地质科学领域，信息融合应用于遥感技术，包括卫星图像和航空拍摄图像的研究；在机器人技术和智能航行器研究领域，信息融合主要被应用于机器人对周围环境的识别和自动导航；信息融合技术也被应用于医疗诊断和人体模拟及一些复杂工业过程控制领域。信息融合作为一门跨学科的综合信息处理理论，涉及系统论、信息论、控制论、人工智能和计算机通信等众多领域和学科。

几乎所有真实存在的系统内部都含有非线性环节。非线性系统形式复杂多样，不确定因素较多，不满足均匀性和叠加性，使得经典控制理论、线性控制理论及 Kalman 滤波等经典控制理论和方法难以应对。早期非线性系统的处理方法多是以 Taylor 级数为基础的线性化方法。但由于 Taylor 级数收敛条件等因素的影响，很多基于 Taylor 级数的算法存在不稳定或者发散的情况。近年发展起来的依概率逼近的滤波方法得到了很多学者的关注，其中较为经典的估计算法包括：粒子滤波、无迹 Kalman 滤波、容积 Kalman

滤波等。线性系统的多传感器融合问题经过了几十年的发展，基本形成了一套较为完整的理论体系结构。但是应用领域更为广泛的非线性系统的融合估计问题一直没有得到很好的发展。本书以非线性多传感器系统的融合估计为主要研究对象，首先总结了非线性系统常用的估计理论及方法，进而介绍了几种适用于非线性多传感器系统的融合估计方法。

本书共 8 章。第 1 章为绪论；第 2 章为一般非线性系统滤波方法及性能分析；第 3 章为线性系统的多传感器自校正加权观测融合 Kalman 滤波器；第 4 章为非线性系统的最优和自校正加权观测融合 UKF 滤波器；第 5 章为基于 Taylor 级数逼近的非线性系统加权观测融合估计理论；第 6 章为基于 Gauss-Hermite 逼近的非线性系统加权观测融合估计算法；第 7 章为噪声相关的非线性系统加权观测融合估计算法；第 8 章为多传感器加权观测融合 Kalman 滤波器的预测控制算法。本书第 1 章～第 4 章由郝钢执笔，第 5 章~第 8 章由李云执笔，参考文献由李云整理，全书由郝钢统一定稿。

本书的出版曾得到国家自然科学基金项目（61503127 和 61573132）和黑龙江省信息融合估计与检测重点实验室资助，笔者深表感谢。同时感谢黑龙江大学博士生导师邓自立教授和孙书利教授多年来对笔者的指导和帮助，感谢哈尔滨工程大学博士生导师叶秀芬教授多年来对笔者的指导和帮助。最后，还要感谢电子工业出版社刘小琳编辑对本书出版所做的大量工作。

由于作者水平有限，书中缺点和疏漏之处在所难免，望读者批评指证。

目 录
Contents

第 1 章　绪论 ····· 1

1.1　多传感器信息融合理论 ····· 1

1.1.1　多传感器信息融合 ····· 1

1.1.2　信息融合国内外发展现状 ····· 5

1.2　系统辨识 ····· 7

1.2.1　系统辨识的目的 ····· 8

1.2.2　系统辨识的方法 ····· 9

1.2.3　自校正滤波算法 ····· 11

1.3　非线性系统融合估计 ····· 14

1.3.1　信息融合结构模型 ····· 14

1.3.2　信息融合的主要技术方法 ····· 19

1.3.3　非线性系统估计研究现状 ····· 20

1.3.4　融合估计研究现状 ····· 21

1.3.5　非线性系统融合估计研究现状 ····· 24

1.4　主要研究内容 ····· 25

第 2 章　一般非线性系统滤波方法及性能分析 ····· 28

2.1　递推线性最小方差估计框架 ····· 29

2.1.1 射影定理 ……30
2.1.2 新息序列 ……35
2.1.3 递推线性最小方差滤波框架 ……38
2.1.4 Kalman 滤波器 ……41
2.1.5 ARMA 新息模型 ……46
2.1.6 基于 ARMA 新息模型的稳态 Kalman 滤波器 ……47
2.2 无迹 Kalman 滤波算法 ……48
2.2.1 UKF 滤波算法原理 ……48
2.2.2 Sigma 点采样策略 ……50
2.2.3 UKF 滤波算法 ……55
2.3 容积 Kalman 滤波算法 ……56
2.3.1 容积规则 ……57
2.3.2 容积 Kalman 滤波算法 ……60
2.4 粒子滤波算法 ……63
2.4.1 最优贝叶斯递推滤波和重要性采样 ……63
2.4.2 序贯重要性采样 ……65
2.4.3 PF 滤波算法 ……66
2.5 3 种非线性滤波算法的比较分析 ……67
2.6 本章小结 ……68
第 3 章 线性系统的多传感器自校正加权观测融合 Kalman 滤波器 ……69
3.1 最优加权观测融合 Kalman 滤波器 ……71
3.1.1 线性系统的加权观测融合算法 ……71
3.1.2 最优加权观测融合 Kalman 滤波器 ……73
3.2 基于最小二乘法的自校正加权观测融合 Kalman 滤波器 ……74
3.2.1 自校正 Kalman 滤波器 ……74

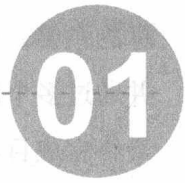
3.2.2 基于最小二乘法的自校正加权观测融合 Kalman 滤波器 ……77
3.2.3 基于相关函数辨识器的自校正加权观测融合 Kalman 滤波器 ……80
3.3 基于协同辨识的自校正加权观测融合 Kalman 滤波器 ……82
3.3.1 具有相同观测矩阵和不相关观测噪声的情形 ……83
3.3.2 具有不同观测矩阵和不相关观测噪声情形 ……88
3.3.3 系统具有不同观测矩阵和相关观测噪声 ……95
3.4 仿真 ……98
3.5 本章小结 ……109
第 4 章 非线性系统的最优和自校正加权观测融合 UKF 滤波器 ……111
4.1 多传感器加权观测融合 UKF 滤波器 ……112
4.1.1 集中式观测融合 UKF 滤波器 ……113
4.1.2 加权观测融合 UKF 滤波器 ……113
4.1.3 加权观测融合 UKF 滤波器与集中式观测融合 UKF 滤波器在数值上的完全等价性 ……115
4.2 自校正加权观测融合 UKF 滤波器 ……121
4.2.1 噪声方差的估计算法 ……121
4.2.2 基于 Sage-Husa 估计的 $\boldsymbol{Q}_w$ 估计算法 ……123
4.2.3 多传感器加权观测融合自校正 UKF 滤波器 ……125
4.3 仿真例子 ……125
4.4 本章小结 ……130
第 5 章 基于 Taylor 级数逼近的非线性系统加权观测融合估计理论 ……132
5.1 基于 Taylor 级数逼近的非线性系统加权观测融合算法 ……133
5.2 基于 Taylor 级数逼近的非线性系统加权观测融合 UKF（WMF-UKF）滤波算法 ……139

5.2.1 基于 Taylor 级数逼近的非线性系统 WMF-UKF 滤波算法....139
5.2.2 WMF-UKF 的渐近最优性....142
5.2.3 WMF-UKF 的计算量分析....148
5.3 基于 Taylor 级数逼近的非线性系统加权观测融合 CKF（WMF-CKF）滤波算法....149
5.3.1 基于 Taylor 级数逼近的非线性系统 WMF-CKF 滤波算法....149
5.3.2 WMF-CKF 的渐近最优性....152
5.3.3 WMF-CKF 的计算量分析....153
5.4 基于 Taylor 级数逼近的非线性系统加权观测融合 PF（WMF-PF）滤波算法....153
5.4.1 基于 Taylor 级数逼近的非线性系统 WMF-PF 滤波算法....153
5.4.2 WMF-PF 的渐近最优性....155
5.4.3 WMF-PF 的计算量分析....156
5.5 WMF-UKF、WMF-CKF 和 WMF-PF 的比较分析....157
5.6 仿真研究....157
5.7 本章小结....181
第 6 章 基于 Gauss-Hermite 逼近的非线性系统加权观测融合估计算法....183
6.1 基于 Gauss-Hermite 逼近的非线性系统加权观测融合（WMF）算法....184
6.1.1 Gauss-Hermite 逼近....185
6.1.2 基于 Gauss-Hermite 逼近的非线性系统 WMF 算法....190
6.2 基于 Gauss-Hermite 逼近的非线性系统加权观测融合 UKF（WMF-UKF）滤波算法....193
6.2.1 基于 Gauss-Hermite 逼近的非线性系统 WMF-UKF 滤波算法....193
6.2.2 WMF-UKF 的计算量分析....197

6.3 基于 Gauss-Hermite 逼近的非线性系统加权观测融合 CKF（WMF-CKF）滤波算法 197
6.3.1 基于 Gauss-Hermite 逼近的非线性系统 WMF-CKF 滤波算法 ... 197
6.3.2 WMF-CKF 的计算量分析 200
6.4 基于 Gauss-Hermite 逼近的非线性系统加权观测融合 PF（WMF-PF）滤波算法 201
6.4.1 基于 Gauss-Hermite 逼近的非线性系统 WMF-PF 滤波算法 201
6.4.2 WMF-PF 的计算量分析 203
6.5 仿真研究 203
6.6 本章小结 226
第 7 章 噪声相关的非线性系统加权观测融合估计算法 227
7.1 基于 Taylor 级数逼近的噪声相关非线性系统 WMF-UKF 滤波算法 228
7.1.1 系统噪声和观测噪声的去相关 229
7.1.2 噪声相关非线性系统 WMF-UKF 滤波算法 231
7.2 基于 Taylor 级数逼近的噪声相关非线性系统 WMF-CKF 滤波算法 ... 234
7.3 基于 Taylor 级数逼近的噪声相关非线性系统 WMF-PF 滤波算法 237
7.4 基于 Gauss-Hermite 逼近的噪声相关非线性系统 WMF-UKF 滤波算法 239
7.5 基于 Gauss-Hermite 逼近的噪声相关非线性系统 WMF-CKF 滤波算法 243
7.6 基于 Gauss-Hermite 逼近的噪声相关非线性系统 WMF-PF 滤波算法 246
7.7 仿真研究 248
7.8 本章小结 267

第 8 章　多传感器加权观测融合 Kalman 滤波器的预测控制算法 268
8.1　加权观测融合 Kalman 滤波器的预测控制系统 268
8.2　加权观测融合预测控制算法 271
8.3　自校正加权观测融合预测控制算法 275
8.3.1　带相同观测矩阵和不相关观测噪声的情形 275
8.3.2　带不同观测矩阵和不相关观测噪声的情形 277
8.3.3　带不同观测矩阵和相关观测噪声的情形 281
8.4　仿真 284
8.4.1　带相同观测矩阵和不相关观测噪声的系统仿真 284
8.4.2　带不同观测矩阵和不相关观测噪声的系统仿真 288
8.4.3　带不同观测矩阵和相关观测噪声的系统仿真 293
8.5　本章小结 298
参考文献 300

第 1 章



绪论

1.1 多传感器信息融合理论

1.1.1 多传感器信息融合

当下很多自动化热门研究方向，例如人工智能领域的深度学习、智能检测技术中的视觉检测、控制技术中的模糊控制、专家系统等技术都来源于人类或者其他生物的认知特性或本能。信息融合技术也是来源于人类认知世界方式的一种技术。中国古代医学的“望、闻、问、切”就是多源信息融合的一个代表性例子。自然界中生物感知客观世界，往往是多个感觉器官的综合结果。人类通过视觉、听觉、触觉、嗅觉和味觉获取客观事物信息，再将原始信息交于大脑处理，大脑对这些信息结合进行融合，以求获得最为“准确”的感知信息，最后利用这些“准确”的感知信息和先验知识指导下一步行动。人类的这种信息处理方式一直持续到了 20 世纪中叶。

随着现代工业和战争体系规模的不断扩大，系统的复杂性不断提升，

传统的感知设备已经远远不能满足人们对系统全方位感知和综合认知的需求，这便催生出了现代信息融合理论。尤其是在现代战争环境中，由于现代武器系统的高机动性、良好的隐蔽性及较强的电子对抗性，用于感知目标的预警系统必须运用雷达、红外、声呐、视频、音频等多种感知设备，并通过多个监测点的数据融合处理，获取目标系统最为准确、可靠的数据，最终完成目标身份识别、跟踪、指挥打击与控制等行动。现代战场瞬息万变，如果不能迅速做出准确的反应，整个战斗可能陷入被动状态。

在现代科学技术的发展和应用中，信息起到了举足轻重的作用，它广泛存在于通信、控制、信号处理、数据挖掘、人工智能、生物信息、航空航天技术、经济预测与调控等社会诸多领域。随着信息化时代的迅猛发展，进入到系统中的信息越来越趋向于数据量大、来源途径多、相关层次多等特点[1]。因此，将信号单纯的传送和汇总已经不能满足信息化时代的要求，现代信号处理技术对信息的精度、容错性要求越来越高。

传统的依靠单一传感器或测量系统所提供的信息只能获得关于目标某一方面的信息，这势必影响目标状态估计和目标特征提取的有效性和可靠性，难以达到理想的应用效果。信息融合作为多源信息综合处理的一项新技术、新方法，它能够将来自某一目标的多源信息加以智能化合成和处理，产生比单一信息源更精确、更完整的估计和判决[2-3]。

信息融合出现于 20 世纪 70 年代初期，源于军事领域中的 C^3I（command，control，communi-cation and intelligence）系统的需要，在当时被称为多源相关、多传感器混合数据融合，并于 80 年代开始建立其技术应用。美国国防部 JDL（JointDirectors of Laboratories）从军事应用的角度将信息融合定义为：把来自许多传感器和信息源的数据和信息加以联合（association）、相关（correla-tion）和组合（combination），以获得精确的位置估计（position estimation）和身份估计（identity estimation），以及对战场情况和威胁及其

重要程度进行适当的完整评价。随后，Waltz 和 Llinas 等人对上述定义进行了补充和修改，用状态估计代替了位置估计，并加上了检测（detection）功能，给出了比较完整的定义：信息融合是一种多层次、多方面的处理过程，这个过程是对多源数据进行检测、互联、相关、估计和组合以达到精确的状态估计和身份识别，以及完整的态势评估和威胁评估[4]。

实际工程中，无论是提取一个目标信号，还是要控制一个被控对象，都需要对它的测量信息进行推算[5]，而测量不可避免地会引入误差。从被噪声污染了的测量信息中提取所需要的目标信息，是估计理论所要解决的问题。估计问题是信号处理、控制等领域的基本问题，也是目前研究较多的信息融合理论的一个重要基础理论[6-7]。

20 世纪 60 年代，由 Kalman 等人提出了一种实用的递推估计算法——Kalman 滤波器[8]，它是建立在时域状态空间模型基础上的最优递推滤波算法。该算法可以在被噪声污染了的测量信息中提取所需要的目标信息，因此该算法问世以来，在各个领域得到了广泛的应用。

在 Kalman 滤波器出现以后，状态估计理论的发展基本上都是以 Kalman 滤波器为基础的一些改进和推广。其中，与 Kalman 滤波器在形式上具有等价性的有：U-D 分解滤波、平方根滤波、信息滤波、奇异值分解（SVD）滤波[8]等；另外，为了减少计算量或克服滤波器发散等问题而研发了一些次优滤波算法，如自适应滤波、降阶次优滤波、衰减记忆滤波、状态变量分组滤波、常值增益滤波等；对于非线性系统，有通过局部线性化得到的扩展 Kalman 滤波算法（Extend Kalman Filter，EKF）[9-10]，还有 Julier 等提出的以 UT 变换为基础，采用 MMES 估计准则下的 Kalman 线性滤波结构的非线性滤波器——UKF（Unscented Kalman Filte）算法[11]。

20 世纪 80 年代末，邓自立等人提出了基于现代时间序列分析方法的状态估计理论[12-14]。该方法不同于经典 Kalman 滤波算法，是一种新的时域分析方法。它以 ARMA 新息模型为基本工具和手段，借助射影理论，将状态

和信号的估计问题归结为白噪声估计问题，可统一处理滤波、预报和平滑等估计问题，还可以处理含未知模型参数和噪声统计系统的估计问题。同经典 Kalman 滤波算法相比，现代时间序列分析方法避免了求解 Riccati 方程，算法简单并且降低了计算负担；同经典 Wiener 滤波算法相比，避免了传递函数的部分分式展开，可处理非平稳多维信号等问题。

鉴于信息融合和 Kalman 滤波的各自优点，信息融合 Kalman 滤波器应运而生。自 20 世纪 70 年代初分散融合滤波的思想被提出以来，经过 40 年的发展，信息融合滤波算法得到了长足的发展，其中包括：著名的 Carlson 等人提出的联邦 Kalman 滤波器，该方法已被美国空军容错导航系统“公共卡尔曼滤波器”计划选定为基本滤波算法[15]；Kim 提出了局部估计误差相关情形下的极大似然最优信息融合准则[16]；邓自立和孙书利教授提出的按矩阵加权、按对角阵加权融合估计和按标量加权融合估计算法[17-19]，以及基于加权最小二乘算法（WLS）的两种加权观测融合算法[20-21]等。

经典 Kalman 滤波器的缺点和局限性是要求已知系统的数学模型和噪声统计特性，在使用不精确或错误的模型和噪声统计设计 Kalman 滤波器时会导致滤波器性能变坏，甚至使滤波发散[22]。在实际应用当中，线性离散随机系统的输入和观测噪声统计 $\boldsymbol{Q}_w$ 和 $\boldsymbol{R}$ 通常是未知的。设计出的这一类系统的 Kalman 估值器，称为自校正 Kalman 估值器[22]，这类方法要求在线辨识未知的噪声统计。该方法在参数收敛一致的前提下，具有渐近最优性的特点，可以处理系统参数缓慢变化的时变系统。

Sage 和 Husa 的自适应 Kalman 滤波算法由互耦的常规 Kalman 滤波算法和噪声统计估值器组成，可在线互耦估计状态和噪声统计。该算法也可以统一处理带未知噪声统计的定常和时变系统的自适应 Kalman 滤波器[22]，但是其缺点是算法稳定性差，使用不当可能导致系统发散[23]。