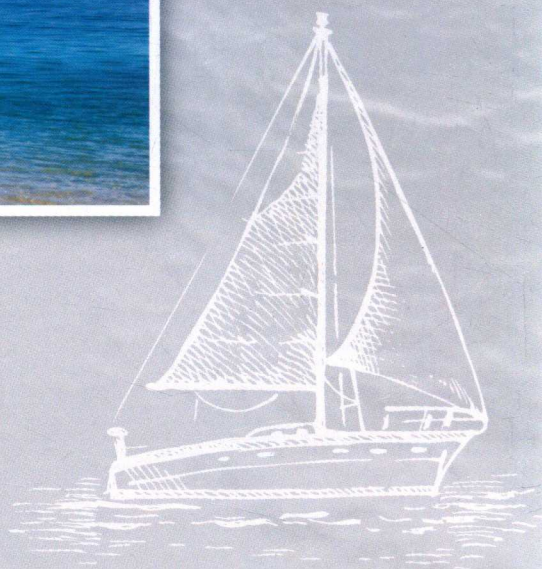
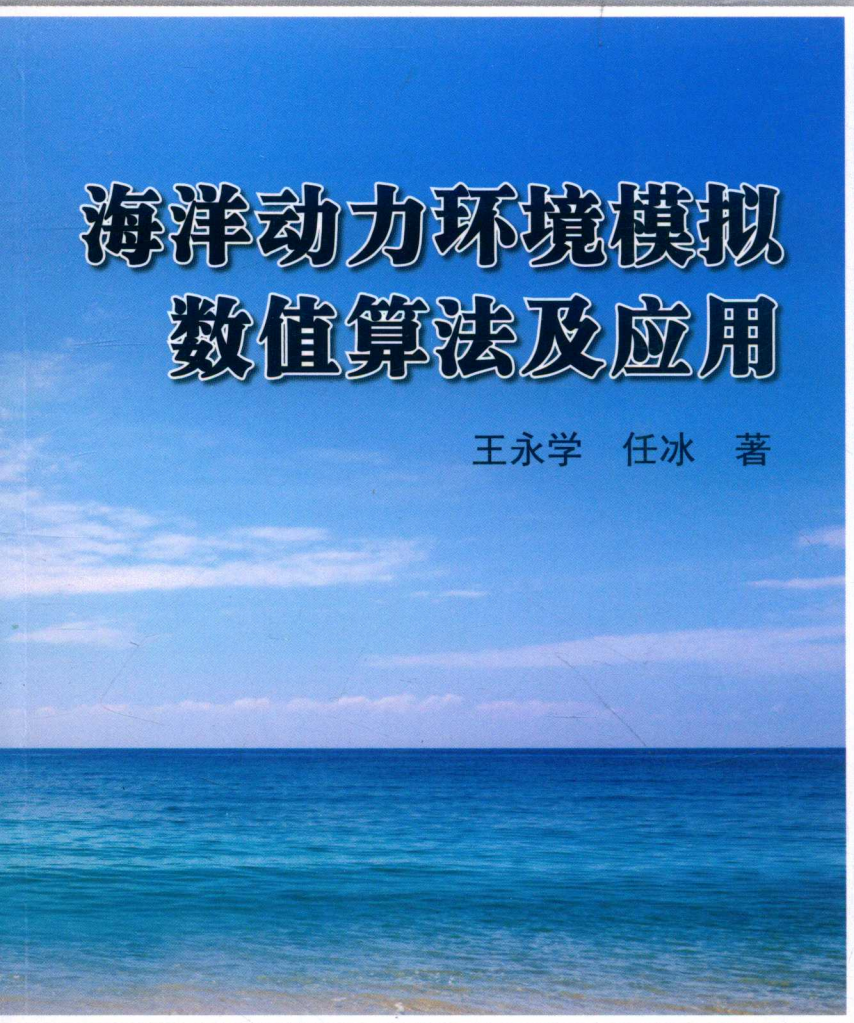


海洋动力环境模拟 数值算法及应用

王永学 任冰 著



科学出版社

海洋动力环境模拟 数值算法及应用

王永学 任 冰 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书介绍了计算水动力学中几种经典数值计算方法的基本原理及其在海洋工程中的部分应用。全书分为4章,第1章为有限差分法,介绍了差分格式的基本原理、经典方程的差分格式、平面二维潮流泥沙模型、基于VOF方法的数值波浪水槽模型等;第2章为有限体积法,介绍了有限体积法的离散格式构造、基本算法及其在波浪数学模型中的应用;第3章为光滑粒子流体动力学方法,介绍了SPH方法的基本原理、改进算法及应用SPH方法模拟波浪与浮体的相互作用;第4章为边界单元法,介绍了建立边界积分方程的直接法与间接法、边界积分方程的离散与求解、波浪对大尺度直立墩群结构的作用及浮式防波堤运动响应的时域数值模型等。

本书可作为海洋动力学、海岸工程学和计算水动力学等领域的科研人员,以及高等学校相关专业的高年级本科生、研究生和教师的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

海洋动力环境模拟数值算法及应用/王永学,任冰著. —北京:科学出版社, 2019.11

ISBN 978-7-03-052088-3

I. ①海… II. ①王… ②任… III. ①海洋动力学-环境模拟
IV. ①P731.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第051170号

责任编辑:王 钰 王会明 / 责任校对:陶丽荣

责任印制:吕春珉 / 封面设计:东方人华平面设计部

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京中科印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019年11月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2019年11月第一次印刷 印张:24 1/4

字数:477 000

定价:168.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈中科〉)

销售部电话 010-62136230 编辑部电话 010-62138978

版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229; 010-64034315; 13501151303

前 言

海洋是人类新的空间资源、能源资源、化学资源和生物资源等的战略性开发基地。21 世纪是海洋经济全面发展的时代,海洋开发利用已成为全球高新技术的重要内容之一。随着高性能计算机、计算水动力学理论与数据可视化技术的迅猛发展,计算机数值模拟试验由于具有不受试验比例尺的限制,适合多因素、大范围、多方案的工程规划等优点,在模拟海岸和海洋工程领域的潮汐、波浪和海流等海洋动力环境因素的变化特征及其对工程影响方面的应用日益广泛。掌握模拟海洋动力环境数值算法的基本原理,熟练运用计算机进行数值模拟试验,已成为水利工程和海洋工程专业的研究生和青年科技工作者必备的基本技能。本书正是为适应这一需要撰写的,并力求能反映出近年来海岸工程数值模拟的最新成果和发展趋势。

本书内容分为 4 章,第 1 章为有限差分法,主要介绍差分格式的基本理论、差分格式的稳定性分析、常用一维与多维差分格式、平面二维潮流泥沙的数值模型、基于 VOF 方法的数值波浪水槽模型、波浪破碎过程的数值模拟等。第 2 章为有限体积法,主要介绍有限体积法离散的基本思想、对流扩散方程的离散格式构造、双曲型方程组的 Roe 格式、结构化网格与非结构化网格的有限体积法、台风浪场数值模型、离岸挡板式透空堤后波高分布数值模拟等。第 3 章为光滑粒子流体动力学方法 (SPH),主要介绍 SPH 的基本理论、光滑函数的构造、流体动力学问题中的 SPH 算法、修正 SPH 算法、基于 SPH 方法的数值波浪水槽/水池、波浪与浮体的相互作用等。第 4 章为边界单元法,主要介绍建立边界积分方程的直接法与间接法、边界积分方程的离散与求解、大尺度结构物的波流力、波浪对大尺度直立墩群结构的作用、浮式防波堤运动响应的时域数值模型等。本书中关于大尺度结构的波流力、波浪与大尺度群墩结构的相互作用,以及基于 VOF 方法的数值波浪水槽模型等的应用实例是作者通过改进算法及自行编写计算程序完成的研究工作。

本书是作者多年来从事海洋动力环境要素与建筑物相互作用研究方向的科研工作成果,以及讲授研究生课程“土木工程数值计算方法”“海洋工程数值计算方法及应用”的教学工作经验的总结。前 3 章介绍离散计算域的数值方法,其顺序从结构化网格的有限差分法、非结构化网格的有限体积法到无网格的光滑粒子流体动力学方法;第 4 章介绍离散边界的边界单元法。每一章在介绍基本算法之后,会结合实际工程给出计算实例。本书力求能够精炼浓缩、通俗易懂地介绍海洋动力环境模拟中广泛应用的数值算法的基本原理,重点介绍如何针对具体工程问题来选择计算方法和设置边界条件等。

本书的撰写和出版得到了大连理工大学“新工科”系列精品教材出版基金的支持，在此表示衷心的感谢。本书的第1章、第2章和第4章由王永学主笔完成，第3章由任冰主笔完成。

由于作者水平所限，书中难免存在疏漏和不妥之处，切盼读者给予指正。



2019年1月27日

目 录

第 1 章 有限差分法	1
1.1 引言	1
1.1.1 有限差分法简介	1
1.1.2 模型方程	2
1.1.3 范数	5
1.1.4 三对角线方程组的追赶法	8
1.2 差分格式的基本理论	10
1.2.1 差分格式的构造	10
1.2.2 差分格式的相容性	14
1.2.3 差分格式的收敛性	16
1.2.4 差分格式的稳定性	19
1.2.5 von Neumann 稳定性分析	21
1.2.6 Hirt 稳定性分析	24
1.3 基本差分格式	26
1.3.1 一维问题基本差分格式	26
1.3.2 多维问题的特殊性	30
1.3.3 多维问题基本差分格式	31
1.3.4 数值效应	41
1.4 Laplace 方程的差分格式	45
1.4.1 五点差分公式	45
1.4.2 边界点插值	46
1.4.3 差分方程求解	49
1.5 平面二维潮流泥沙的数值模型	52
1.5.1 基本方程	53
1.5.2 水流运动方程组的离散及求解	55
1.5.3 悬沙输移扩散方程的离散及求解	60
1.5.4 数值模型算例	63
1.6 基于 VOF 方法的数值波浪水槽模型	72
1.6.1 数值模型	73
1.6.2 自由表面追踪	83
1.6.3 边界条件设置	89

1.6.4	主动吸收数值造波边界	95
1.6.5	波浪破碎过程的数值模拟	101
1.6.6	浪溅区结构物波浪冲击作用的数值模拟	111
	参考文献	126
第2章	有限体积法	128
2.1	引言	128
2.1.1	有限体积法简介	128
2.1.2	流体动力学通用变量方程	129
2.1.3	非结构化网格	132
2.2	有限体积法的构造	134
2.2.1	计算区域的离散化	134
2.2.2	Riemann 问题	137
2.2.3	有限体积法离散的基本思想	139
2.2.4	一维对流扩散方程的离散格式	144
2.2.5	一维双曲型方程组的 Roe 格式	149
2.2.6	TVD 格式	154
2.3	结构化网格的 FVM 算法	158
2.3.1	通用变量方程的离散格式	158
2.3.2	交错网格算法	169
2.3.3	SIMPLE 算法	176
2.3.4	PISO 算法	179
2.4	非结构化网格的 FVM 算法	182
2.4.1	非结构化网格的生成算法	182
2.4.2	二维对流问题的离散格式	188
2.4.3	二维守恒型方程组的离散格式	192
2.5	台风浪场数值模型	203
2.5.1	基本方程	203
2.5.2	数值算法	205
2.5.3	数值模型算例	208
2.6	离岸挡板式透空堤后波高分布数值模拟	215
2.6.1	数值模型	215
2.6.2	数值方法的验证	219
2.6.3	离岸挡板式透空堤后的波高分布	222
	参考文献	227
第3章	光滑粒子流体动力学方法	230
3.1	引言	230

3.1.1	无网格法	230
3.1.2	光滑粒子流体动力学法	231
3.2	SPH 的基本理论	233
3.2.1	SPH 的概念	233
3.2.2	光滑函数的主要特征	238
3.2.3	SPH 近似式的精度	243
3.3	计算流体动力学问题中的 SPH 算法	245
3.3.1	密度的粒子近似法	245
3.3.2	动量方程的粒子近似法	245
3.3.3	SPH 数值算法	246
3.3.4	WCSPH 方法与 ISPH 方法	256
3.4	修正 SPH 算法	257
3.4.1	SPH 方法的连续性修正	257
3.4.2	SPH 方法的边界处理改进	259
3.4.3	SPH 方法的计算效率	260
3.5	基于 SPH 方法的数值波浪水槽/水池	262
3.5.1	流体运动控制方程	263
3.5.2	边界条件设置	263
3.5.3	数值波浪水槽	265
3.5.4	数值波浪水池	269
3.5.5	波浪与直立圆柱相互作用	272
3.6	波浪与浮体的相互作用	277
3.6.1	浮体运动控制方程	277
3.6.2	浮体边界处理	278
3.6.3	波浪与自由漂浮浮体的相互作用	280
3.6.4	波浪与锚固浮体的相互作用	283
	参考文献	285
第 4 章	边界单元法	288
4.1	引言	288
4.1.1	边界单元法简介	288
4.1.2	Laplace 方程的基本解	289
4.1.3	Bessel 函数	291
4.2	建立边界积分方程的直接法	295
4.2.1	Green 公式建立边界积分方程	295
4.2.2	加权余量法建立边界积分方程	299
4.3	建立边界积分方程的间接法	302

4.3.1	面源与面偶	302
4.3.2	单层势与第二类边值问题	307
4.3.3	双层势与第一类边值问题	309
4.4	Laplace 方程的边界单元法	311
4.4.1	边界积分方程的离散	311
4.4.2	系数计算	316
4.4.3	边界单元法算例	320
4.5	大尺度任意形状结构的波流力	326
4.5.1	波浪数学模型	326
4.5.2	奇点处理	331
4.5.3	绕流数学模型	337
4.5.4	圆柱形人工岛的波流力算例	341
4.6	大尺度直立墩群结构的波浪力	343
4.6.1	波浪数学模型	343
4.6.2	方形墩群结构的波浪力	348
4.6.3	异型截面墩柱式透空防波堤透射系数	353
4.7	浮式防波堤运动响应的时域数值模型	357
4.7.1	波浪数学模型	357
4.7.2	时域边界单元法	359
4.7.3	锚链力计算	365
4.7.4	浮体运动方程求解	369
4.7.5	数值模型算例	371
	参考文献	378

第 1 章 有限差分法

1.1 引言

1.1.1 有限差分法简介

许多描述流体力学问题的数学模型通常可归结为求解一些很复杂的非线性偏微分方程。由于大多数情况下无法应用经典的分析方法进行处理,因而产生了各种数值方法,如有限差分法(finite difference method, FDM)、有限体积法(finite volume method, FVM)、有限元法(finite element method, FEM)、光滑粒子流体力学(smoothed particle hydrodynamics, SPH)、边界单元法(boundary element method, BEM)等。

有限差分法是最早应用的数值方法,对简单几何区域中的流动与换热问题也是一种最容易实施的数值方法。其基本点是,将求解区域用与坐标轴平行的一系列网格线的交点所组成的点的集合来代替,在每个节点上,将控制方程中每一个导数用相应的差分表达式来代替,从而在每个节点上形成一个代数方程,每个方程中包括了本节点及其附近一些节点上的值。对附近节点上的值已知的显格式,可直接计算出数值解;对附近节点上的值未知的隐格式,求解这些代数方程就可获得所需的数值解。

早在 20 世纪初,Runge (1908)、Richardson (1910) 和 Liebmann (1910) 就提出了求解调和方程的五点差分离散格式和迭代解法。1928 年, Courant、Friedrichs 和 Lewy 在他们的著名论文《论数学物理方程的偏差分方程》中,第一次提出了差分方法的收敛性问题,并证明了双曲型方程的 CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 条件,使对差分方法的认识达到了新的高度。但受到计算工具的限制,即使是十分简单的流体动力学模型,也难以得到满意的近似结果。

1946 年第一台电子计算机 ENIAC (electronic numerical integrator and computer, 电子数字积分计算机) 的问世,促进了有限差分法的发展。之后的十余年中,提出了各种差分格式。例如, Crank 和 Nicolson (1947) 提出了算术平均隐格式; Peaceman 和 Rachford (1955)、Douglas 和 Rachford (1956) 提出了交替方向法。理论研究在差分格式的相容性、收敛性和稳定性方面取得了卓有成效的进展, Lax (拉克斯) 等价定理、von Neumann (冯·诺伊曼) 稳定性分析及对人工黏性项的分析在理论和形式上都有了相当完美的结果。

有限差分法适用于求解抛物型与双曲型方程(初值问题),该方法易于构造所需要的格式,能够处理非光滑解的问题,已发展成为一套较完整的分析理论。由于流体力学问题大多属于抛物型与双曲型方程(初值问题),且具有非光滑解的特性,因此有限差分法至今仍是求解流体力学问题应用较广泛的数值方法,尽管其存在着不善于表现复杂的曲面边界等缺点。

1.1.2 模型方程

为方便对复杂流体力学方程的数值离散方法进行分析,常用一些能够反映典型流动特性的最简单形式的流体力学方程,来阐述离散方法的概念并建立相关的分析理论等,这些简单形式的方程称为模型方程。

依据偏微分方程的理论,二阶线性偏微分方程可分为双曲型方程、抛物型方程和椭圆型方程。设 $u(x, y)$ 为两个自变量 x, y 的函数,则关于 $u(x, y)$ 的二阶线性偏微分方程的一般形式可表示为

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = f(x, y) \quad (1.1.2.1)$$

式中,系数 $A, B, \dots, F$ 都是 x, y 的函数。由判别式 $B^2 - 4AC$ 可将方程(1.1.2.1)分为如下三类方程:

双曲型方程: $B^2 - 4AC > 0$;

抛物型方程: $B^2 - 4AC = 0$;

椭圆型方程: $B^2 - 4AC < 0$ 。

双曲型方程和抛物型方程的定解问题为初值问题或初边值问题,首先要考虑差分格式的收敛性和稳定性。椭圆型方程的定解问题为边值问题,主要考虑差分格式及其解法。

1. 一维波动方程

波动方程是一种重要的偏微分方程,主要描述自然界中的各种波动现象,包括横波和纵波,如声波、光波和水波等。一维常系数波动方程可表示为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t \geq 0, \quad -\infty < x < +\infty \quad (1.1.2.2)$$

式中, a 为常数,是波的传播速率。

令 $y = t$, 对比式(1.1.2.1), 式(1.1.2.2)中各微分项的系数分别为 $A = a^2, B = 0, C = -1, D = 0, E = 0$, 判别式 $B^2 - 4AC > 0$, 故方程(1.1.2.2)是双曲型方程。

给定初始条件 $u(x, 0) = \varphi(x), u'(x, 0) = g(x)$, 其解为 d'Alembert (达朗贝尔) 公式:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(\xi) d\xi$$

若令 $v_1 = \frac{\partial u}{\partial t}$, $v_2 = a \frac{\partial u}{\partial x}$, 方程 (1.1.2.2) 可写成下面的形式:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} - a \frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.1.2.3)$$

根据 v_1, v_2 的定义, 有

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} - a \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) - a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.1.2.4)$$

两式相加与相减后可得到如下两个方程:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x} \right) (v_1 + v_2) = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right) (v_1 - v_2) = 0$$

由此, 方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ 可作为双曲型方程的最简单形式。

2. 一维对流方程

对流方程是最简单的双曲型偏微分方程。一维常系数对流方程可表示为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0, \quad -\infty < x < +\infty \quad (1.1.2.5)$$

式中, u 代表物质的量; a 为常数, 代表物质的运动速度。方程的物理意义是描述流体微团的物理量 u (如质量、动量和能量等) 的宏观迁移和对流运动。

给定式 (1.1.2.5) 的初值 $u(x, 0) = \varphi(x)$, 则其解析解为

$$u(x, t) = \varphi(x - at), \quad t \geq 0, \quad -\infty < x < +\infty \quad (1.1.2.6)$$

令 $\xi = x - at$, 有

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -a \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = -a \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + a \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0$$

所以式 (1.1.2.6) 为一维常系数对流方程 (1.1.2.5) 的解。

由 $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt}$, 比较对流方程 (1.1.2.5), 可得当 $\frac{dx}{dt} = a$ 时, $\frac{du}{dt} = 0$, 即沿 $x-t$ 平面上斜率为 $1/a$ 的直线, u 的值保持不变。满足 $dx/dt = a$ 的直线族称为对流方程的特征线。若把 $u(x, 0) = \varphi(x)$ 看作初始时刻 $t=0$ 的波形, 则其解表示这个波形以速度 a 单向传播, 传播过程中其波形始终保持不变, 如图 1.1.1 所示。

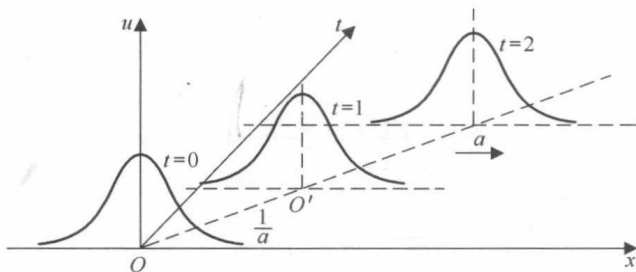


图 1.1.1 一维对流方程的物理意义示意图

3. 一维扩散方程

扩散方程用来描述扩散现象中的物质密度变化, 通常也用来描述与扩散类似现象的一类偏微分方程。一维常系数扩散方程可表示为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \nu > 0, \quad t \geq 0, \quad -\infty < x < +\infty \quad (1.1.2.7)$$

令 $y=t$, 对比式 (1.1.2.1), 式 (1.1.2.7) 中各微分项的系数分别为 $A=\nu$, $B=0$, $C=0$, $D=0$, $E=-1$, 判别式 $B^2-4AC=0$, 故方程 (1.1.2.7) 是抛物型方程。方程 (1.1.2.7) 的物理意义是描述流体微团的物理量 u 依靠流体内的微观分子运动扩散到邻域的现象, ν 为扩散系数。当用温度 T 代替 u 时为热传导方程, ν 取热传导系数 k 。

给定初始条件 $u(x,0)=\varphi(x)$, 用分离变量法, 可求得上述初值问题的解为

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\nu t}\right] \varphi(\xi) d\xi$$

抛物型方程解的特点是初始值的作用随时间衰减, 波形尖峰消失, 波形逐渐平滑化, 如图 1.1.2 所示。因此对于抛物型方程, 一个不均匀的初始分布, 都将最后趋于均匀。虽然初始作用的影响随距离按指数规律衰减, 但它可在瞬间影响到无穷远处。

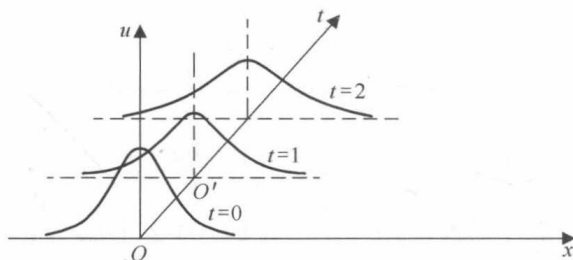


图 1.1.2 一维扩散方程的物理意义示意图

4. 二维 Laplace 方程

Laplace (拉普拉斯) 方程, 又称调和方程或位势方程, 求解 Laplace 方程是流体力学等领域经常遇到的一类重要的数学问题。对如下的二维 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x, y \in \Omega \quad (1.1.2.8)$$

对比式 (1.1.2.1), 式 (1.1.2.8) 中各微分项的系数分别为 $A=1, B=0, C=1, D=0, E=0$, 判别式 $B^2 - 4AC < 0$, 故方程 (1.1.2.8) 为椭圆型方程。椭圆型方程的定解问题是边值问题, 即要求解出未知函数 u , 使它在区域 Ω 内满足偏微分方程, 并在区域的边界 S 上满足给定的边界条件。边界条件可以由下面三种方式给出:

1) 第一类 [Dirichlet (狄里克雷) 型] 边界条件:

$$u|_{S_1} = A(x, y)$$

2) 第二类 [Neumann (诺伊曼) 型] 边界条件:

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{S_2} = B(x, y)$$

3) 第三类 (混合型) 边界条件:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \right) \Big|_{S_3} = F(x, y), \quad \sigma = \sigma(x, y) \geq 0$$

1.1.3 范数

有限差分法中的差分格式相容性、收敛性和稳定性等都是通过范数 (norm) 是否趋于 0 来定义和考查的。范数是泛函分析中的基本概念, 是一种定义在赋范线性空间中的函数, 满足相应条件后的函数都可以称为范数。范数是对函数、向量和矩阵定义的一种度量形式, 即通过范数可以测量两个函数、向量或矩阵之间的距离。

1. 线性空间

泛函分析中定义空间为具有一定内部结构的元素集合, 即空间要有两个要素: 一个是元素 (不同元素构成不同的空间); 一个是内部结构 (不同的内部结构构成不同的空间)。

设 E 为元素的集合, $\mathbf{K}$ 为数域 (实数或复数), 若 x, x_1, x_2, x_3 为 E 中的元素, 满足下列所定义的加法与数乘运算, 则称 E 为数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间 (若 $\mathbf{K}$ 为实数域则称为实线性空间; 若 $\mathbf{K}$ 为复数域则称为复线性空间)。

在元素集合 E 内规定加法运算记作 “+”, 且满足若 $x, x_1, x_2, x_3 \in E$, 则

$x_1 + x_2 \in E$, 及

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1 \quad (\text{交换律})$$

$$(x_3 + x_1) + x_2 = x_3 + (x_1 + x_2) \quad (\text{结合律})$$

$$x + 0 = x \quad (0 \text{ 为 } E \text{ 内的零元素})$$

$$x + (-x) = 0 \quad (-x \text{ 为负元素})$$

在元素集合 E 内规定数域 $\mathbf{K}$ 内的数 α , β 与 E 内元素 x 的乘积运算记作 “ $\cdot$ ”, 且满足若 $x \in E, \alpha \in \mathbf{K}$, 则 $\alpha \cdot x \in E$, 及

$$1 \cdot x = x$$

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad (\text{结合律})$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad (\text{分配律})$$

$$\alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2 \quad (\text{分配律})$$

按照上述定义, 实数的全体是实数域上的线性空间; 三维矢量的全体, 按照矢量的加法和数乘运算法则构成一个实线性空间; n 阶实向量和 n 阶实矩阵分别构成一个实线性空间; 区间 $[a, b]$ 上的一切连续函数的全体 $C[a, b]$ 是实线性空间。

设 E_M 为数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间, $x_1, x_2, \dots, x_N$ 为 E_M 中的 N 个元素, 如果在数域 $\mathbf{K}$ 中有 N 个不全为零的数 $a_1, a_2, \dots, a_N$, 使下式成立:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_N x_N = 0 \quad (1.1.3.1)$$

则称元素 $x_1, x_2, \dots, x_N$ 是线性相关的。如果式 (1.1.3.1) 仅在 $a_1, a_2, \dots, a_N$ 全为零时成立, 则称元素 $x_1, x_2, \dots, x_N$ 是线性无关或线性独立的。

2. 线性赋范空间

如果对数域 $\mathbf{K}$ (实数或复数) 上的线性空间 E_M 中的任一个元素 x , 都有一个与 x 相对应的实数 $\|x\|$, 且实数 $\|x\|$ 满足下列范数公理:

1) $\|x\| \geq 0$, 等式只在 $x = 0$ 时成立 (非负性);

2) $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$, $a \in \mathbf{K}$, $x \in E_M$ (齐次性);

3) $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$, $x_1, x_2 \in E_M$ (三角不等式),

则称此线性空间 E_M 为线性赋范空间, 而实数 $\|x\|$ 称为元素 x 的范数。

满足范数公理的 n 维向量 $x = \{x_i\}$ 的范数可有以下不同的形式:

L_1 范数:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (1.1.3.2)$$

L_2 范数:

$$\|x\|_2 = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right]^{1/2} \quad (1.1.3.3)$$

L_p 范数:

$$\|x\|_p = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right]^{1/p} \quad (1.1.3.4)$$

L_∞ 范数:

$$\|x\|_\infty = \max |x_i| \quad (1.1.3.5)$$

函数 $f(x) \in C[a, b]$ 常用的范数有 L_2 范数:

$$\|f(x)\|_2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)]^2 dx \right]^{1/2} \quad (1.1.3.6)$$

和 L_∞ 范数:

$$\|f(x)\|_\infty = \max |f(x)| \quad (1.1.3.7)$$

n 阶方阵 A 可看成 n^2 维线性空间元素, 它的范数还需具备另一个条件 $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ (A, B 同为 n 阶方阵), 定义其 L_2 与 L_∞ 范数分别为

$$\|A\|_2 = [\rho(A^*A)]^{1/2} \quad (1.1.3.8)$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (1.1.3.9)$$

式中, $A^* = \bar{A}^T$ 为 A 的共轭转置矩阵; $\rho(A^*A)$ 为矩阵 A^*A 的谱半径 (矩阵 A^*A 的绝对值最大的特征值)。如果 A 是正规矩阵 ($A^*A = AA^*$), 则 L_2 范数为

$$\|A\|_2 = \rho(A)$$

3. 度量空间

利用范数可以诱导出度量。设 X 为一元素集合, 若 X 中每一对元素 x 与 y 都对应着一个实数, 记作 $d(x, y)$, 且满足下面三个条件:

- 1) $d(x, y) \geq 0$ (等式只在 $x = y$ 时成立);
- 2) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$;
- 3) $d(x, y) = d(y, x)$,

则称集合 X 为距离空间, 称 $d(x, y)$ 为元素 x 与 y 之间的距离。

在线性赋范空间 E_M 中必可引进距离 $d(x, y) = \|x - y\|$ 成为一个距离空间, 称为线性度量空间。因此范数可理解为普通 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的向量长度概念的推广, 是衡量 $\mathbf{R}^n$ 的元素大小的一种度量。 x 的范数 $\|x\| = d(x, 0)$ 可认为是元素 x 与零元素之间的距离。

4. 内积空间

设 E_u 为数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间, 若 E_u 中的任意一对元素, 都对应着数域 $\mathbf{K}$ 中的一个数, 记作 $\langle x, y \rangle$, 并满足:

- 1) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (其中 “—” 表示复共轭);

$$2) \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \quad \alpha \in \mathbf{K};$$

$$3) \langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle;$$

$$4) \langle x, x \rangle \geq 0 \quad (\text{当且仅当 } x=0 \text{ 时等号成立}),$$

则称此线性空间 E_u 为内积空间, 称 $\langle x, y \rangle$ 为元素 x 与 y 的内积。

在内积空间 E_u 中, 必可引进范数 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, 由内积空间的定义, 有

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$$

$$\|ax\| = \sqrt{\langle ax, ax \rangle} = |a| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |a| \cdot \|x\|$$

$$\|x_1 + x_2\| = \sqrt{\langle x_1 + x_2, x_1 + x_2 \rangle} \leq \sqrt{\langle x_1, x_1 \rangle} + \sqrt{\langle x_2, x_2 \rangle} = \|x_1\| + \|x_2\|$$

内积空间 E_u 中的两个元素 x, y , 若它们的内积 $\langle x, y \rangle = 0$, 则称 x 与 y 正交。

5. 完备度量空间

设 X 为度量空间, $\{x_n\}$ 是 X 的元素序列, 若有 $x_0 \in X$, 使当 n 趋近于无穷时, 距离 $d(x_n, x_0)$ 趋于零, 则称序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0 , 或称 x_0 为序列 $\{x_n\}$ 的极限, 记作 $x_n \rightarrow x_0$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 。在线性赋范空间 E_M 中, 距离 $d(x_n, x_0) = \|x_n - x_0\|$, 因此当 $x_n \rightarrow x_0$ 时, 必有 $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$, 此时称序列 $\{x_n\}$ 依范数收敛。

距离空间 X 中的元素序列 $\{x_n\}$, 若对任意 $\varepsilon > 0$, 总有 $N > 0$ 存在, 使当 $n, m > N$ 时, 距离 $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, 则称序列 $\{x_n\}$ 为基本序列或 Cauchy (柯西) 序列。

如果度量空间 X 中的每一个基本序列都收敛于 X 中的一个元素, 就称此度量空间 X 是完备的, 或称 X 为完备度量空间。

线性赋范空间 E_M 引进距离 $d(x, y) = \|x - y\|$ 成为线性度量空间, 如果此度量空间是完备的, 则称为 Banach (巴拿赫) 空间。

内积空间 E_u 引进范数 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ 及距离 $d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ 成为线性度量空间, 如果此度量空间是完备的, 就称为 Hilbert (希尔伯特) 空间, 简称 H 型空间。

1.1.4 三对角线方程组的追赶法

求解对角占优的三对角线代数方程组的追赶法是有限差分法中求解隐格式所形成的代数方程组的常用方法。一维问题的隐式差分格式可直接形成三对角线代数方程组, 多维问题的隐式差分格式可通过 ADI (alternating direction implicit, 交替方向隐式) 法等算法分解成多个三对角线代数方程组。矩阵系数为对角占优的三对角线代数方程组的一般形式为