

耦合振子系统的 振荡猝灭动力学

Oscillation Quenching
Dynamics of Coupled Oscillator System

刘维清 著



科学出版社

江西理工大学清江学术文库

耦合振子系统的振荡猝灭 动力学

**Oscillation Quenching
Dynamics of Coupled Oscillator System**

刘维清 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书回顾了各种耦合作用下耦合振子系统中振荡猝灭现象的研究概况,论述了频率失配和频率空间分布对非全同耦合振子系统振荡猝灭动力学的影响机制,分析了耦合振子系统耦合作用通道的特性对耦合系统振荡猝灭动力学特性的影响,深入探讨了正负反馈耦合、交叉变量耦合、时变耦合、动态耦合、双通道耦合、梯度耦合、平均场耦合等各种耦合方式下,振荡猝灭动力学现象的产生条件和主要特征。最后阐述了不同的耦合作用网络结构下,耦合振子系统产生振荡死亡、爆发式死亡和死亡奇异态的基本机制。

本书中采用的耦合系统振荡猝灭动力学分析基础理论、电路实验和数值分析方法,可为从事非线性动力学研究的研究生提供理论指导。耦合振子振荡猝灭理论可为工程中如桥梁减振等方面提供理论支持,也可理解为自然界中许多集群和自组织临界现象、生物医学系统的许多功能的产生机制提供理论指导。

图书在版编目(CIP)数据

耦合振子系统的振荡猝灭动力学/刘维清著. —北京:科学出版社,2019.12
ISBN 978-7-03-062832-9

I. ①耦… II. ①刘… III. ①谐振子-耦合系统-动力学分析 IV. ①O413

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 240059 号

责任编辑:陈艳峰 钱俊/责任校对:杨然
责任印制:吴兆东/封面设计:无极书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
<http://www.sciencep.com>

北京虎彩文化传播有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019年12月第一版 开本:720×1000 B5
2019年12月第一次印刷 印张:13 3/4
字数:274 000

定价:98.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

作者简介



刘维清，1977年4月生，江西理工大学教授。北京邮电大学物理电子学博士，中国科学院武汉物理与数学研究所博士后，江西省百千万人才人选，江西省中青年学科带头人，江西省青年科学家培养对象，江西省物理学会理事。曾获江西省自然科学二等奖，北京市优秀博士论文。主持国家自然科学基金项目3项，江西省科技项目6项。发表SCI收录论文36篇，申请国家发明专利2项，其中获得授权1项。主要从事混沌动力学、时空混沌、混沌同步和反同步控制、统计物理基本问题等方面的研究。

前 言

本书主要内容是著者从攻读博士期间到目前为止在耦合振子系统减振控制领域所取得的创新性成果的总结。著者通过南方冶金学院(现江西理工大学)定向培养,怀着对复杂系统动力学研究的憧憬进入北京邮电大学理学院攻读物理电子学专业博士学位。五年时间里,导师肖井华教授和课题组老师的精心指导,让著者走进了理论物理的科学殿堂,并全身心地投入到复杂系统动力学方向的研究。博士毕业后,著者在新加坡国立大学 Choy Heng Lai 课题组的访学经历,中国科学院武汉物理与数学研究所占萌教授课题组的博士后经历,以及国家留学基金委资助下在美国加州大学洛杉矶分校医学院屈支林教授课题组的访学经历,使丰富了科研阅历,开拓了视野,磨炼了意志。

自然界中,许多系统集群行为的内在机制和许多系统的功能实现均与耦合振子系统的同步和振荡猝灭两种动力学行为密切相关。如何理解耦合振子系统,特别是混沌系统的同步和振荡猝灭现象一直是非线性动力学研究的热点。经过许多学者的不懈努力,已经建立了分析耦合振子系统同步和振荡猝灭稳定性的基本理论和实用方法。这些方法为本书的研究奠定了扎实的基础,并提供了良好的思路。然而,与耦合振子系统振荡猝灭稳定性相关的研究仍不完善,尚有不少有待进一步探究的课题。如少量振子之间相互作用下耦合振子的稳定性理论已很明确,然而大量耦合振子系统中,考虑具体的相互作用方式、相互作用的网络结构、振子频率失配的空间分布、耦合通道的性质等因素对耦合振子系统振荡猝灭的影响时,还有许多问题需要解决。

本书共 8 章。第 1 章简要介绍了耦合振子振荡猝灭的研究进展;第 2 章介绍了耦合非线性振子系统的相关基础知识;第 3 章对耦合非全同振子系统中频率失配对耦合振子的振荡猝灭的影响进行了讨论,重点分析了固定频率失配、频率的空间分布、耦合系统的边界条件对耦合振子系统产生振荡猝灭现象的影响;第 4 章主要研究了不同的耦合通道特性(幅度受限通道、时间延迟、滤波器作用)对耦合振子系统振荡猝灭动力学特性的影响;第 5 章详细分析了各种耦合方式,包括正、负反馈耦合,交叉变量耦合,时变耦合,动态耦合,双通道耦合,梯度耦合,平均场耦合等对耦合振子系统振荡死亡的影响;第 6 章分析了相互作用的网络结构对耦合振子系统走向振荡死亡的影响,包括规则网络、小世界网络、无标度网络等结构下的振幅死亡动力学行为;第 7 章讨论了耦合振子系统的爆发式死亡态和奇异死亡态的动力学特性;第 8 章对本书的内容做总结。

本书的成果凝聚了导师肖井华教授和课题组相关指导老师的心血，以及合作者的许多辛勤劳动。著者指导的硕士研究生陈江南、雷晓琪参与了相关研究工作，雷晓琪还参与了书稿整理和校对工作，在此感谢他们的付出。相关研究得到了国家自然科学基金委项目“耦合振子的振幅死亡动力学的研究”（编号：10947117）、“频率空间重排下耦合系统的优化减振机制研究”（编号：11262006）和“吸引与排斥作用竞争下耦合系统的自组织动力学研究”（编号：11765008）的资助。本书的出版得到了江西理工大学清江人才项目和理学院的资助。

由于本人知识水平有限，书中难免存在不足之处，敬请读者批评指正。

刘维清

2019年8月于赣江之源

目 录

前言	
第 1 章 绪论	1
1.1 引言	1
1.2 振荡猝灭现象研究进展	2
第 2 章 耦合振子系统动力学基础	6
2.1 动力学系统简介	6
2.2 动力学系统的解及其稳定性	7
2.2.1 线性系统的解及稳定性分析	7
2.2.2 非线性系统的解及稳定性分析	8
2.3 动力学系统的分岔类型	11
2.3.1 固定点的分岔	12
2.3.2 同宿、异宿分岔	15
2.4 几种常见动力学系统	16
2.4.1 线性动力系统	16
2.4.2 非线性动力系统	17
第 3 章 耦合非全同振子的振幅死亡	20
3.1 固定频率失配的耦合振子振幅死亡	20
3.1.1 频率失配耦合振子模型	20
3.1.2 两个耦合振子振幅死亡理论分析	21
3.1.3 三个耦合振子振幅死亡理论分析	22
3.1.4 四个耦合振子振幅死亡理论分析	22
3.2 频率失配的空间分布对振幅死亡区域的影响	23
3.2.1 理论分析	23
3.2.2 随机初始频率失配下空间分布对振幅死亡区域的影响	26
3.3 频率失配的空间分布对振幅死亡边界的影响	27
3.4 频率空间排列粗糙度对临界耦合强度的影响	29
3.5 最大(小)临界耦合强度下的频率空间排列	30
3.6 频率空间排列周期对振幅死亡的影响	31
3.6.1 尺寸效应	33

3.6.2	初始频率失配涨落的影响	34
3.6.3	频率空间排列周期对振幅死亡的影响机制	35
3.7	边界条件对频率空间排列下振幅死亡的影响	37
3.7.1	不同边界下的模型	37
3.7.2	不同边界下振幅死亡区间解析解	37
3.7.3	不同边界下振幅死亡区间数值结果	39
3.7.4	不同边界下的尺寸效应	40
3.7.5	不同边界下的临界耦合强度受空间排列的影响	41
第 4 章	耦合通道特性对振荡死亡的影响	44
4.1	幅度受限通道下的振荡死亡	44
4.1.1	幅度受限通道耦合振子模型	44
4.1.2	幅度受限通道耦合振子振荡死亡理论分析	45
4.1.3	幅度受限通道耦合振子振荡死亡现象	46
4.1.4	幅度受限通道耦合振子振荡死亡电路实现	51
4.2	时间延迟下的振幅死亡	53
4.2.1	时延耦合周期振子的振幅死亡	53
4.2.2	时延耦合混沌振子的振幅死亡	55
4.2.3	复杂网络中的时延耦合振子振幅死亡	56
4.3	滤波器作用下的振荡死亡	59
4.3.1	低通滤波器对时延耦合振子振荡死亡的影响	59
4.3.2	低通滤波器对平均场耦合振子振幅死亡的影响	61
4.3.3	有源低通滤波器对耦合振子振幅死亡的影响	64
4.4	滤波器对幅度奇异态的压制	73
第 5 章	各种耦合作用下的振荡死亡	77
5.1	线性反馈耦合下的振荡死亡	77
5.1.1	负反馈耦合下的振荡死亡	77
5.1.2	正反馈耦合下的振荡死亡	82
5.1.3	正负反馈耦合竞争下的振荡死亡	84
5.2	交叉变量耦合下的振荡死亡	89
5.2.1	耦合周期振子系统	89
5.2.2	交叉变量耦合混沌振子系统	91
5.3	时变耦合下的振荡死亡	100
5.3.1	开关耦合下的振荡死亡	100

5.3.2	周期耦合下的振荡死亡	105
5.4	动态耦合下的振荡死亡	113
5.4.1	耦合周期振子	114
5.4.2	耦合混沌振子	115
5.4.3	全局耦合振子	116
5.5	双通道耦合下的振荡死亡	119
5.5.1	同变量反馈耦合周期系统	119
5.5.2	交叉变量反馈耦合周期系统	124
5.5.3	交叉变量反馈耦合混沌系统	128
5.6	梯度耦合下的振荡死亡	129
5.6.1	无流边界条件	129
5.6.2	周期边界条件	133
5.7	平均场耦合作用下的振荡死亡	137
5.7.1	耦合周期振子系统	138
5.7.2	耦合混沌振子系统	141
第 6 章	网络结构对振幅死亡的影响	143
6.1	复杂网络基础知识	143
6.1.1	W-S 小世界网络模型	143
6.1.2	BA 无标度网络模型	144
6.2	规则网络中的振幅死亡	145
6.2.1	近邻耦合振子中的振幅死亡	146
6.2.2	频率分布对振幅死亡影响	150
6.2.3	全局耦合振子中的振幅死亡	152
6.3	小世界网络中的振幅死亡	154
6.4	无标度网络中的振幅死亡	156
第 7 章	耦合振子的爆发式死亡态和奇异死亡态	162
7.1	耦合振子的爆发式振荡死亡态	162
7.1.1	耦合周期振子的爆发式振荡死亡态	162
7.1.2	平均场耦合振子的爆发式死亡态	166
7.2	幅度奇异态与死亡奇异态	168
7.2.1	幅度奇异态	169
7.2.2	死亡奇异态	170
7.2.3	稳定幅度奇异态	171

7.2.4 排斥耦合实现稳定幅度奇异态	175
第 8 章 总结	186
参考文献	189
附录 A 微分方程数值求解	200
附录 B 李雅普诺夫指数计算程序	203
附录 C XPPAUT 软件使用简介	208

第1章 绪 论

1.1 引 言

自然界中,各种尺度下的系统通常由不同的非线性振子单元构成。这些单元之间各种形式的相互作用使耦合非线性系统表现出多种多样的合作行为,其中各种形式的同步振荡和振荡猝灭是其最基本的现象。许多系统合作行为的内在机制都与同步振荡和振荡猝灭有着密不可分的关联。整个系统的功能实现也与同步振荡和振荡猝灭动力学行为密切相关。由于其基本性,对这一问题的探讨涵盖了自然科学、工程等许多领域,甚至于社会科学中。许多具体系统如:摆钟、乐器、电子器件、激光、生物生态系统(如鸟群和鱼群)^[1]、神经^[2,3]、心脏^[4,5]等都有着丰富的同步振荡和振荡死亡等自组织现象。如鸟群、鱼群等由大量个体组成的群体,虽然每个个体具有差异,但它们可以通过相互作用而自发地形成有序的整体,从而更好地抵御天敌。例如,在西班牙的布拉瓦海岸人们观察到一群惊鸟一起飞翔,它们总是编成一个协调的团队,并形成一个大统一的大型鸟类的轮廓,整体向前飞行。同样地,海洋中的沙丁鱼等鱼群也会自发地形成大型鱼类的轮廓,整体向前游动。在碰到大型鱼类袭击时,还能自发地变换队形,以躲避攻击,如图 1.1 所示。形成这一奇观的内在机制是由于耦合振子系统中具有差异的个体在相互作用下能达到同步或部分同步而形成自组织现象。自然界中类似的现象还有很多,如夏日夜晚聚集在树上的萤火虫的同步闪烁,音乐厅里人们自发地以相同的节奏进行鼓掌,神经元的同步放电激发,心脏窦房结起搏细胞的同步振动,超导体中上万亿个电子的同步前进等。

然而,自然界中的各系统的组成单元之间必然或多或少地存在个体差异,这些差异会影响甚至抵制它们之间因相互耦合作用而产生的有序。当个体差异较小时,耦合作用总是可以使各个体趋于步调一致,而形成各种形式的同步。但当个体之间的差异较大时,耦合振子单元之间的参数失配占主导地位,耦合相互作用将无法使各振子单元实现趋同并形成有序结构,耦合系统会最终产生同步失稳而形成丰富的动力学行为,如部分同步和非同步态等,进而形成各种形式的去同步斑图结构。此外,这种参数失配与耦合产生的有序之间的竞争也会使耦合系统产生另一种自组织现象,即振荡猝灭。此时,耦合振子系统会因相互作用最终走向各种形式的稳定固定点。振荡猝灭现象对耦合振子系统的整体功能或结构产生显著的影响。即使在耦合全同振子系统中,由于相互作用过程中信号的传输需要时间,振子之间的相

互作用存在时间延迟。这种时间延迟的存在会使原先步调一致的协同作用变得不协调,从而产生振荡猝灭现象。此外,不同的相互作用方式和相互作用信号通道的幅频特性(或相频特性)均会对耦合振子系统的动力学行为产生显著的影响。从耦合系统中单元之间的作用范围来看,单元之间相互作用的网络结构也对耦合振子的振荡猝灭动力学行为产生不可忽略的影响。有研究表明,振荡猝灭现象与阿尔茨海默病和帕金森病这两种常见的神经退行性疾病的产生密切相关^[6],可以通过压制某些不需要的振荡态对这些疾病进行控制治疗^[7,8]。对振荡猝灭动力学的研究也为工程中有效控制系统中的不规则振荡,提高控制效率提供理论指导意义。因此,本书将详细介绍耦合振子系统中各种形式的振荡猝灭动力学以及它们的特点和形成机制以及产生条件。

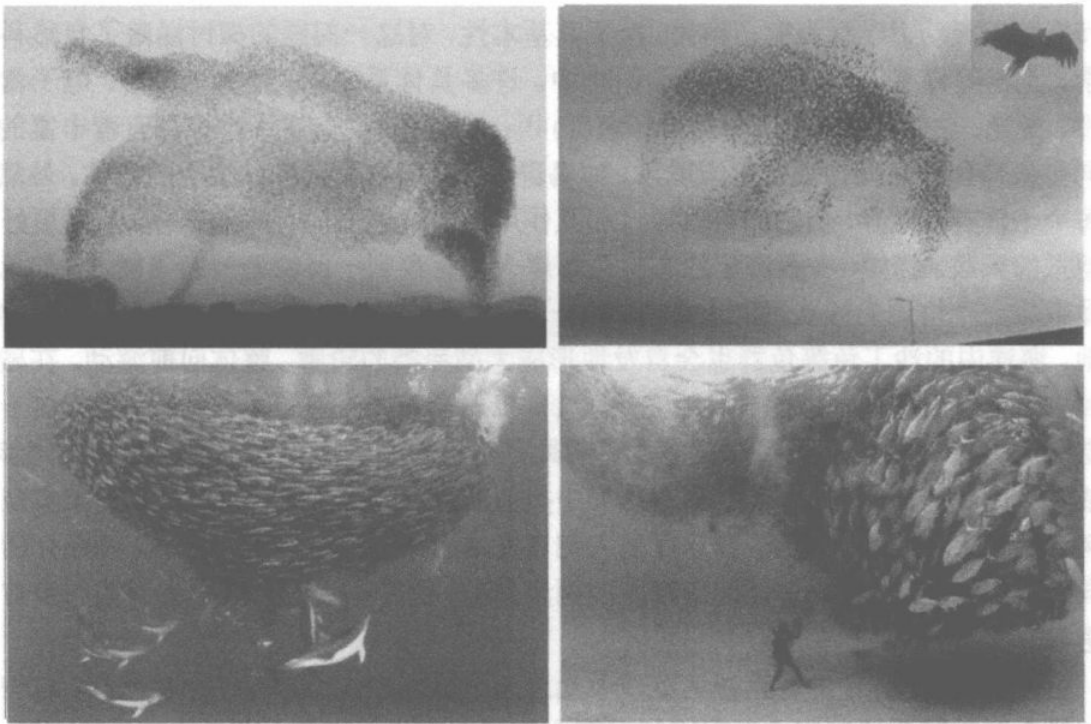


图 1.1 自然界中的鸟群和鱼群

1.2 振荡猝灭现象研究进展

耦合振子系统的振荡猝灭现象是指耦合动力学系统(如混沌、周期或可激发系统)通过相互作用或在外界环境影响下,稳定到各种类型的固定点上而停止振荡的动力学行为^[9]。由于这些动力学系统大量存在于工程应用(如汽车或机床的强烈振动、桥梁由风致或车桥耦合引起的振动)和生物系统(如神经元、心肌细胞、耳蜗)

中,耦合振子的振荡死亡对桥梁、建筑的结构稳定性,机械系统的功能,以及器官的生物学功能均有很大的影响。同时在混沌控制中也起着重要的作用。例如,英国的步行“千年桥”首次开放时,就因人桥耦合出现剧烈摇晃而被迫关闭;美国的塔科马大桥则因风振致毁。青蛙的耦合外毛细胞在处于振荡死亡时可以增强对外界信号刺激产生的信噪比而提高听觉的敏感性^[10,11]。因此研究耦合振子振荡死亡产生的机制以及影响耦合振子振荡死亡的因素,对防止或促进耦合振子系统的振荡死亡的控制具有非常重要的意义,并已成为一个研究热点。它在力学、物理学、化学、生物学、生命科学、建筑学等不同的学科领域中均得到广泛的研究和应用。

振荡猝灭这一现象最早由瑞利勋爵^[12]发现于相邻管风琴中的管子会因为相互作用而出现消音现象。接着分别在耦合化学振子^[13,14]、耦合激光系统^[15]、非线性电路^[16]实验、耦合神经元振子^[9,17-19]中被观察到。根据其表现形式,耦合振子系统的振荡猝灭态可分为振幅死亡和振荡死亡两种形态。其中,振幅死亡指耦合相互作用的两个振子系统均被压缩到相同的稳定固定点。通常该固定点为系统在没有耦合作用时子单元原有的不稳定固定点。耦合作用可以使该不稳定固定点转化为稳定固定点,从而使耦合系统最终趋于该稳定固定点;而振荡死亡是指耦合相互作用的两个振子单元分别压缩到不同的稳定固定点。该固定点是因耦合作用而产生的新固定点,两个耦合振子所处的固定点可能是一正一负并关于原点对称的固定点,称为对称振荡死亡现象。而如果固定点不是关于原点对称的,则称为非对称的振荡死亡现象。最近,在动态耦合振子系统中,两个耦合振子会因为相互作用走向两个相等且与耦合作用强度相关的固定点,称为非普通振幅死亡现象。

耦合振子系统的振幅死亡的研究主要应用于减振控制和激光控制等领域,其产生的主要机制有:(1)两个相互作用的振子之间存在频率失配^[17,20,21];(2)相互作用时,信号传输所产生的时间延迟^[22-26];(3)通过改变耦合振子系统的多种耦合作用形式,如引入非线性耦合^[27]、动态耦合^[28]、交叉变量耦合^[29]、线性耦合^[30,31]、直流信号驱动^[32]、平均场耦合^[33-35]、间接耦合^[36,37],多时间尺度耦合作用^[38]。与之相比,因耦合振子系统的振荡死亡与细胞分裂^[17,39,40]、基因合成^[18,41,42]和神经疾病^[43,44]的内在机制密切相关,而在生命科学领域显得尤为重要。耦合振子系统中产生振荡死亡的主要耦合形式有排斥耦合^[45,46]、幅度受限耦合^[47]、环境耦合^[48]、循环耦合^[49]等。

耦合振子的振幅死亡和振荡死亡可以在一定条件相互转化。研究表明^[6]处于振幅死亡的固定点会随着频率失配的增加而出现超临界叉型分岔,并产生一对新的稳定固定点。即随着频率失配的增加,耦合振子系统会由振幅死亡态转换为振荡死亡态。邹为等^[50]通过在耦合全同振子系统中引入时间延迟耦合作用,观察到耦合系统会从振幅死亡态走向振荡死亡态。此后,人们发现振幅死亡向振荡死亡的过渡过程可以在许多形式的耦合作用下产生,如交叉变量耦合^[51]、循环耦合^[49]、平

均场耦合^[34,52]、排斥耦合^[45,53]、低通滤波器耦合^[54]等。因振幅死亡向振荡死亡的过渡对工程中的动力学控制起着重要作用而备受人们关注。同时,振幅死亡向振荡死亡过渡过程中,常常可以看到振幅死亡与振荡死亡共存^[51]或振荡死亡与振荡态共存^[55,56]。这些多态共存现象可以为理解许多生物过程的多样性提供参考。

耦合振子系统的振荡死亡和振幅死亡不仅可以在规则耦合作用网络结构中产生,如近邻耦合^[21]或全局耦合网络^[57],也可以在随机网络结构中产生。Ermentrout等^[57]通过对近邻耦合的神经元振子的动力学行为进行分析,发现随着耦合作用强度的增加,耦合振子系统会由相同步态最终走向振荡死亡态。Atay^[20]发现,逐渐增加的耦合强度会使近邻耦合的振子系统由部分出现振子死亡过渡到全部振子走向振荡死亡。而杨俊忠^[21]则进一步指出在具有频率失配的近邻耦合振子中,耦合系统从部分振荡死亡走向全部振子振荡死亡要经历三个不同的阶段。这三个阶段体现了耦合振子间频率失配造成的不均性和耦合作用使系统达到均匀态之间的竞争机制,从而帮助人们更好地理解耦合振子走向振荡死亡的内在机制。耦合振子的振幅死亡现象与相互作用的网络结构参数密切相关。侯中怀等^[58]分析了复杂网络中非全同耦合振子系统走向振荡死亡的过程和主要影响因素。发现规则网络通过随机加边变成随机网络后,原来的振幅死亡会变成振荡态。我们发现^[59]无标度网络中耦合振子系统走向振幅死亡的过程经历三个不同的阶段。开始时,除少量同步的振子因同步而处于大振幅外,度大的点的振幅先变小而出现分层振幅死亡现象。当所有振子振幅小到一定程度时,振幅随着耦合强度的增加急剧下降而实现全部振子振幅死亡。管曙光等在频率分布为洛伦兹分布的耦合振子系统中观察到耦合振子系统产生爆发式同步^[179]。与耦合振子系统分层走向振幅死亡不同的是,耦合振子系统会在耦合强度大于某一临界值时突然整体走向振幅死亡现象。后来 Verma 等^[174,180]在耦合全同振子系统中,通过平均场作用观察到了爆发式振幅死亡现象。

从控制的角度来看,邹为等先后通过引入非对称耦合(梯度耦合),以显著地减小时延耦合^[60]或频率失配耦合系统^[61]中达到振荡死亡所需的耦合作用强度。通过引入相互排斥耦合,也可以把耦合周期或混沌振子控制到振荡死亡态。文献^[62]指出,通过在具有线性递增的频率空间排列的耦合振子上,引入小的频率失配微扰,可以在一定程度上消除或促进耦合振子的振荡死亡。我们在此基础上拓展分析了频率空间排列对无流边界条件下耦合振子产生振荡死亡的影响的普适规律^[63]。不同边界(周期边界、无流边界、固定边界)条件下耦合混沌振子的频率空间分布对耦合系统振荡死亡所需耦合强度有显著的影响^[64]。

有些系统中,如生物钟,心脏系统必须时刻保持一定频率的振荡,才能维持其功能。在某些病变条件下,振荡可能会消失而影响其正常功能。因此,如何使处于振荡猝灭的系统恢复振荡,也是一个重要的研究课题。它是耦合振子产生振荡猝灭

的过程的逆过程。邹为^[54]等在考虑系统信息处理引起的时间延迟的影响条件下,发现适当的处理时间延迟可以使系统的振幅死亡区域被压缩,从而可以使处于振幅死亡的振子系统恢复振荡。Ghosh^[66]等则通过引入平均场耦合作用,使耦合振子系统从振荡猝灭态恢复到振荡态。此后, Senthilkumar^[65]通过电子电路实验验证信号处理时间延迟可以使耦合振子系统从振幅死亡态恢复到振荡态。在同时存在直接耦合与非直接耦合两种耦合方式竞争时^[68],耦合振子的振荡猝灭也可以被有效地救活。当复杂网络中同时存在处于振荡的振子和非振荡的振子时^[69],通过在振荡振子与非振荡振子中引入非对称耦合作用,可以加强网络的振荡态的稳定性。同时通过引入外部的反馈作用^[70],可以有效地使处于振荡猝灭的复杂网络恢复到振荡态。

第2章 耦合振子系统动力学基础

自然界中许多系统的动力学行为均可以用动力学方程来描述,为了更好地理解和分析耦合振子系统在相互作用下的振荡猝灭现象。本章我们有必要对动力学系统的基本概念做简要介绍。重点介绍研究耦合振子振荡猝灭现象所涉及的相关概念和方法。

2.1 动力学系统简介

自然界中的许多系统如流体运动、物种延续等均随时间演化。它们可以用所有可能发生的各种状态构成的集合随时间动态变化的规律来描述。即可以用一个简单有效的数学模型来描述现实存在的复杂系统,我们称该模型为系统的动力学方程。动力学方程可以为研究者更好地理解和描述复杂系统的动力学行为。复杂系统的各种状态随时间的演化可以用一组常微分方程来进行描述。设 N 维状态量的集合为 $X(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)\}$, 其随时间演化的方程可写成

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu_1), \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu_n), \end{cases} \quad (2.1)$$

其中, f_1, f_2, \dots, f_n 可以是线性或非线性函数,具体表达形式决定了系统的动力学性质; $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m\}$ 是系统的参数集合。对于给定的系统函数形式,参数 μ 和系统初始状态 $X(t_0)$, 则任意时刻的系统状态 $X(t)$ 可以完全由方程 (2.1) 确定。通常,若动力学系统只是在一系列不连续的时间点考察系统的状态,则这个系统为离散系统;若时间连续,则称该系统为连续系统;若时间和状态量均为离散量,则称系统为元胞自动机。当 f 为线性函数时,该系统为线性系统;当 f 为非线性函数,该系统为非线性系统。根据函数表达式中是否显含时间,可将系统分成非自治系统(不显含时间)和自治系统(显含时间)。根据系统最终状态的特征不同又可分为周期系统、混沌系统和可激发系统。下面我们分别列举几种常见的动力学系统的动力学方程。常见的带阻尼的小角度单摆方程可以描述成

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2, \\ \dot{x}_2(t) = \frac{\gamma}{m} x_2 - \frac{g}{l} x_1, \end{cases} \quad (2.2)$$

其中参数 γ 为阻尼系数, m 为物体的质量, l 为单摆的摆长, g 为重力加速度常数, x_1 对应于单摆的摆角, 而 x_2 对应于单摆的角速度。由于方程的右端所有变量 x_i 的幂均为一次, 函数 f_i 在相空间中是一条直线, 此系统为线性系统。当单摆的摆角较大时, 方程的右端存在高次项, 如 $\dot{x}_2(t) = \frac{\gamma}{m}x_2 - \frac{g}{l}\left(x_1 - \frac{x_1^3}{3}\right)$, 此方程称为非线性方程。显然, 方程 (2.2) 右边不显含时间, 该系统称为自治系统。当单摆受到周期性外驱动力作用时, 方程 (2.2) 可以写成

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2, \\ \dot{x}_2(t) = \frac{\gamma}{m}x_2 - \frac{g}{l}x_1 + A_0 \cos(\omega t), \end{cases} \quad (2.3)$$

此时, 方程右边显含时间 t , 该系统称为非自治系统。通过变量代换 $x_3 = \omega t$ 使系统的维度增加 1, 非自治系统可转化成自治系统,

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2, \\ \dot{x}_2(t) = \frac{\gamma}{m}x_2 - \frac{g}{l}x_1 + A_0 \cos(x_3), \\ \dot{x}_3(t) = \omega. \end{cases} \quad (2.4)$$

2.2 动力学系统的解及其稳定性

对于动力学系统, 系统的状态变量完全由其解的形式来确定。因此, 对动力学方程的求解显得尤为重要。对于线性系统, 我们可以通过线性变换使其对角化, 或变成约当形式, 从而较容易地得出系统的解析解形式。而对于非线性系统, 要获得其解的表达形式常常较难。特别是对于维数较大的系统, 现代数学还没有发展出普适有效的方法获得解析解。分析非线性系统的动力学行为通常要利用数值计算方法, 或通过略去一些动力学细节, 研究系统的定性性质和渐近行为。

2.2.1 线性系统的解及稳定性分析

下面以二维线性系统为例, 给出线性系统的解及其稳定性条件,

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = ax_1 + bx_2, \\ \dot{x}_2(t) = cx_1 + dx_2, \end{cases} \quad (2.5)$$

其中 a, b, c, d 是系统的参数。线性系统的解可以通过令 $\dot{x}_1(t) = 0, \dot{x}_2(t) = 0$, 可得系统的不动点为 $(0, 0)$ 。如果不考虑简并的情况, 方程的解的形式可以写成

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \\ x_2(t) &= c_3 e^{\lambda_1 t} + c_4 e^{\lambda_2 t}, \end{aligned} \quad (2.6)$$