

海洋科技出版工程



JISUAN HAIYANG
GONGCHENG SHUIBO
DONGLIXUE

计算海洋工程水波动力学

戴愚志 潘志远 编著

 哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

海洋科技出版工程

计算海洋工程水波动力学

戴愚志 潘志远 编著

 哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

内 容 简 介

本书给出了海洋工程水波动力学势流理论框架和数值实现技术。本书的第一部分从大幅运动的浮体运动学和动力学理论出发,给出完整的海洋结构物在波浪中运动的一阶和二阶时域和频域的理论描述,包括边界条件和运动方程;本书的第二部分为海洋工程水波动力学势流理论中的数值计算技术,给出了有限水深波数的计算方法,描述了二阶频域散射势积分方程中自由面积分的计算方法,给出了浮体几何对称性在一阶和二阶频域速度势计算中的应用等内容。

本书适用于对船舶与海洋工程水波动力学和应用数学感兴趣的读者。

图书在版编目(CIP)数据

计算海洋工程水波动力学/戴愚志,潘志远编著. —哈尔滨:
哈尔滨工程大学出版社,2019.8

ISBN 978-7-5661-2445-6

I. ①计… II. ①戴… ②潘… III. ①水波-波动力
学 IV. ①TV139.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 188748 号

选题策划 唐欢欢
责任编辑 唐欢欢 雷霞
封面设计 博鑫设计

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区南通大街 145 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传 真 0451-82519699
经 销 新华书店
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787 mm × 1 092 mm 1/16
印 张 6.5
字 数 169 千字
版 次 2019 年 8 月第 1 版
印 次 2019 年 8 月第 1 次印刷
定 价 70.00 元

<http://press.hrbeu.edu.cn>

E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前 言

本书给出了海洋工程水波动力学势流理论框架和数值实现技术。

本书第一部分从大幅运动的浮体运动学和动力学理论出发,给出完整的海洋结构物在波浪中运动的一阶和二阶时域和频域分析方法的理论描述,包括边界条件和运动方程。

使用多尺度展开法, Triantafyllou 将海洋结构物在波浪中的大幅低频慢漂运动、波频运动分开求解,以解决海洋结构物在波浪中的系泊和定位问题。Malenica Š 和陈小波使用多尺度展开法,用零航速频域格林函数表示低航速频域格林函数,避免了直接展开法引起的长期项问题,对三维低航速运动进行了求解,这一方法可以用于波漂阻尼的计算。

本书第二部分为海洋工程水波动力学势流理论中的数值计算技术,给出了有限水深波数的计算方法,描述了二阶频域散射势积分方程中自由面积分的计算方法,给出了浮体几何对称性在一阶和二阶频域速度势计算中的应用;接着对平面四边形面元分布面源和分布偶极的诱导速度计算进行了详细描述;对三维频域零航速无限水深和有限水深格林函数的行为进行了分析,给出了远场行为的表达式;给出了有限水深镜像源格林函数的计算公式;对三维无限水深和有限水深时域格林函数及其导数的几种代表性计算方法进行了描述,给出了具体的计算方案;应用多尺度展开法,推导了三维低航速频域格林函数,给出了 Cummins 方程的解算方法;最后对 GMRES 方法和积分方程的快速算法——PFFT 方法进行了描述。

本书作者在学习船舶与海洋工程水波动力学之初,就盼望有一本详尽地描述船舶与海洋工程水波动力学理论框架和数值实现方法的书籍。但在写作过程中发现,与海洋工程水波动力学相比,船舶水波动力学理论更为复杂,需要另写一本书方可,本书的完成部分地实现了作者的愿望。

本书第 2.5 节由潘志远编撰,其余由戴愚志编撰,全书由戴愚志统稿。

一国文化之繁荣,乃一辈辈人精进努力及尽心传承而来。兴我中华之文化乃吾辈不可推卸之责任。望本书对有兴趣于水波动力学和应用数学的朋友有所帮助。

第一作者于 1985—1989 年在内蒙古大学数学系学习期间,得到了老师和同学们无私的关爱和支持,作者心怀感激,愿师生之情愈浓,友谊之树常青。

编著者

2018 年 12 月

目 录

第 1 章 海洋工程水波动力学势流理论框架	1
1.1 大幅运动的浮体动力学方程和流场边界条件	1
1.2 时域一阶和二阶运动理论	5
1.3 频域一阶和二阶运动理论	10
1.4 大幅慢漂运动的分析	16
1.5 低航速运动分析	23
第 2 章 海洋工程水波动力学势流理论的数值计算技术	27
2.1 有限水深波数的计算	27
2.2 二阶频域散射势边界积分方程中物面积分和自由面积分的计算	28
2.3 几何对称性在一阶频域速度势计算中的应用	34
2.4 几何对称性在二阶频域速度势计算中的应用	39
2.5 平面四边形面元分布面源及偶极的诱导速度计算	42
2.6 三维零航速无限水深频域格林函数的行为分析	50
2.7 三维零航速有限水深频域格林函数的行为分析	51
2.8 有限水深镜像源格林函数的计算	54
2.9 三维无限水深时域格林函数的计算	56
2.10 三维有限水深时域格林函数的计算	65
2.11 三维低航速频域格林函数	72
2.12 Cummins 方程的解法	73
2.13 GMRES 方法	74
2.14 PFFT 方法	79
附录 A 变换矩阵 D 的性质	85
附录 B 二阶波浪力(矩)中包含的一些积分的计算	89
附录 C 力 \hat{F} 和力矩 \hat{M}_G 的展开	90
附录 D 空间四边形面元的投影	91
参考文献	94

第 1 章 海洋工程水波动力学势流理论框架

本章首先给出大幅运动的浮体在波浪中的运动方程和边界条件的严格理论描述。在此基础上,使用摄动展开法导出了微幅运动的浮体需要满足的时域和频域的一阶和二阶边界条件及运动方程,这适用于浮体的平衡位置不变,浮体受波浪的激励围绕着平衡位置做振荡运动的情况。接着使用多尺度展开法推导了在波浪中进行大幅慢漂运动的浮体需满足的边界条件和运动方程。最后介绍了低航速浮体的运动和受力分析方法。

1.1 大幅运动的浮体动力学方程和流场边界条件

浮体在进行大幅自由运动时,其转动角速度不仅与角位移的时间导数有关,还与角位移有关,它在空间固定坐标系中的表达式与在随体坐标系中的表达式存在着转换关系。质心速度与加速度的表达式与定轴转动的情况也大不相同。

惯性矩在随体坐标系中是不变的,在空间固定坐标系中是变化的,必须在随体坐标系中求解浮体的旋转运动。

在浮体的瞬态动力学分析中,浮体和自由面的交线随时间变化,这导致了拉格朗日方程中的速度势对时间的导数 $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ 计算的困难。吴国雄给出了 $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ 满足的边界条件,通过边值问题的求解就可解决这一难题。

1.1.1 浮体在波浪中的运动描述

我们用两个坐标系描述浮体在波浪中的运动。第一个坐标系是空间固定坐标系 $\hat{O}\hat{x}\hat{y}\hat{z}$, $\hat{O}\hat{x}\hat{y}$ 平面位于静水面上, \hat{z} 轴垂直向上。第二个坐标系是随体坐标系 $Oxyz$,随物体一起平移和旋转。当浮体静止时, $\hat{O}\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ 坐标系与 $Oxyz$ 坐标系重合。 $\hat{O}\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ 坐标系是惯性系, $Oxyz$ 坐标系是非惯性系。

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ 表示浮体在波浪中的平动位移,是 O 点关于 \hat{O} 的位移。 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ 表示浮体在波浪中的旋转位移,旋转的次序为横摇、纵摇和艏摇。为考虑旋转位移的影响,假设一个中间坐标系 $\overline{O}x\overline{y}z$, $\overline{O}x\overline{y}z$ 与 $\hat{O}\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ 平行,按图 1.1.1 由左到右的次序,相应的变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ 0 & \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \mathbf{L} \begin{bmatrix} x \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (1.1.1a)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & 0 & \sin \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z \end{bmatrix} \quad (1.1.1b)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_3 & -\sin \alpha_3 & 0 \\ \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{N} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (1.1.1c)$$

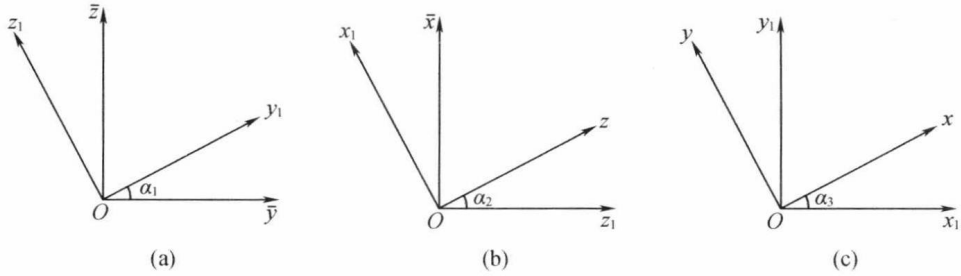


图 1.1.1 坐标变换

(a)横摇; (b)纵摇; (c)艏摇

把式(1.1.1)中的三个变换式相乘,即

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (1.1.2)$$

这里 \mathbf{D} 是正交变换矩阵,有

$$\mathbf{D} = \mathbf{LMN} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_3 \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_3 \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 \\ \sin \alpha_3 \cos \alpha_1 + \cos \alpha_3 \sin \alpha_2 \sin \alpha_1 & \cos \alpha_3 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_3 \sin \alpha_2 \sin \alpha_1 & -\cos \alpha_2 \sin \alpha_1 \\ \sin \alpha_3 \sin \alpha_1 - \cos \alpha_3 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 & \cos \alpha_3 \sin \alpha_1 + \sin \alpha_3 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 \cos \alpha_1 \end{bmatrix} \quad (1.1.3)$$

变换矩阵 \mathbf{D} 的性质见附录 A。

角速度在空间固定坐标系 $\hat{O}\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ 中的表示为

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{L} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\alpha}_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{LM} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_3 \sin \alpha_2 \\ \dot{\alpha}_2 \cos \alpha_1 - \dot{\alpha}_3 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \\ \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_1 + \dot{\alpha}_3 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (1.1.4)$$

其中, $\dot{\alpha}_1$ 表示 α_1 对时间 t 的导数,其余相同。角速度在随体坐标系 $Oxyz$ 中的表示为

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{N}^T \mathbf{M}^T \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\alpha}_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_3 \\ -\dot{\alpha}_1 \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 + \dot{\alpha}_2 \cos \alpha_3 \\ \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_2 + \dot{\alpha}_3 \end{bmatrix} \quad (1.1.5)$$

用 $\hat{\mathbf{X}}_G = (\hat{x}_G, \hat{y}_G, \hat{z}_G)^T$ 和 $\mathbf{X}_G = (x_G, y_G, z_G)^T$ 表示质心 G 在 $\hat{O}\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ 和 $Oxyz$ 坐标系中的位置



向量,它们满足

$$\hat{X}_C = \xi + DX_C \quad (1.1.6)$$

$\hat{O}\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ 坐标系中,质心的速度和加速度为

$$\dot{\hat{X}}_C = \dot{\xi} + \hat{\omega} \times (\hat{X}_C - \xi) \quad (1.1.7)$$

$$\ddot{\hat{X}}_C = \ddot{\xi} + \dot{\hat{\omega}} \times (\hat{X}_C - \xi) + \hat{\omega} \times [\hat{\omega} \times (\hat{X}_C - \xi)] \quad (1.1.8)$$

用 \hat{n} 和 n 表示 $\hat{O}\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ 坐标系和 $Oxyz$ 坐标系中物面单位法线方向矢量,指向浮体内部,有

$$\hat{n} = Dn \quad (1.1.9)$$

可以认为 \hat{n} 和 n 是一个矢量,在 $Oxyz$ 坐标系中物面单位法线方向矢量 n 通过式(1.1.9)转换为在 $\hat{O}\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ 坐标系中物面单位法线方向矢量 \hat{n} ;也可以认为 \hat{n} 和 n 是两个矢量,随时间变化的矢量 \hat{n} 由浮体静止时的常矢量 n 表示。

1.1.2 动量矩的时间导数

\hat{H}_C 和 H_C 分别表示 $\hat{O}\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ 和 $Oxyz$ 坐标系中的动量矩,有

$$\hat{H}_C = \hat{I}_C \hat{\omega}, \quad H_C = I_C \omega \quad (1.1.10)$$

其中, \hat{I}_C 是 $\hat{O}\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ 坐标系中关于质心 G 的惯性矩矩阵, I_C 是 $Oxyz$ 坐标系中关于质心 G 的惯性矩矩阵。

I_C 是 3×3 的矩阵,有

$$I_C = \begin{bmatrix} I_{C11} & I_{C12} & I_{C13} \\ I_{C21} & I_{C22} & I_{C23} \\ I_{C31} & I_{C32} & I_{C33} \end{bmatrix} \quad (1.1.11)$$

式中

$$I_{Cij} = \iiint_V \mu \{ [(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2] \delta_{ij} - (x_i - x_{C_i})(x_j - x_{C_j}) \} dV \quad (1.1.12)$$

其中, $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_{C_1} = x_C, x_{C_2} = y_C, x_{C_3} = z_C, \mu$ 是浮体的质量密度。 \hat{I}_C 随时间变化, I_C 与时间无关。

\hat{H}_C 和 H_C 满足下面的关系式:

$$\hat{H}_C = D H_C \quad (1.1.13)$$

\hat{H}_C 和 H_C 的时间导数有下面的关系:

$$\dot{\hat{H}}_C = D \dot{H}_C + \hat{\omega} \times \hat{H}_C = D \dot{H}_C + D(\omega \times H_C) \quad (1.1.14)$$

1.1.3 浮体动力学方程

浮体在波浪中的动力学方程为

$$m \left\{ \ddot{\hat{\xi}} + \frac{d\hat{\omega}}{dt} \times (\hat{X}_C - \hat{\xi}) + \hat{\omega} \times [\hat{\omega} \times (\hat{X}_C - \hat{\xi})] \right\} = \hat{F} \quad (1.1.15)$$

其中, m 是浮体的质量, \hat{F} 是作用在浮体上的外力。

$$I_C \hat{\omega} + \omega \times I_C \omega = D^T \hat{M}_C \quad (1.1.16)$$

其中, \hat{M}_C 是浮体在 $\hat{O}\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ 坐标系中关于质心 G 的力矩。

如果对关于 $Oxyz$ 坐标系的原点 O 的运动感兴趣, 可以使用下面的关系:

$$I_C \omega = I \omega - m X_C \times (\omega \times X_C) \quad (1.1.17)$$

$$\hat{M}_C = \hat{M}_0 - \hat{X}_C \times \hat{F} \quad (1.1.18)$$

\hat{M}_0 是浮体在 $\hat{O}\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ 系中关于原点 \hat{O} 的力矩, $I = [I_{ij}]$ 是浮体在 $Oxyz$ 坐标系中关于原点 O 的惯性矩矩阵, 有

$$I_{ij} = \iiint_V \mu [(x^2 + y^2 + z^2) \delta_{ij} - x_i x_j] dV \quad (1.1.19)$$

1.1.4 流场边界条件

假定流体为理想流体, 自由面方程为 $\hat{z} = \eta(\hat{x}, \hat{y}, t)$, 运动学边界条件为

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \eta}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{z}} = 0 \quad (1.1.20)$$

自由面的动力学边界条件为

$$g\eta + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (1.1.21)$$

浮体的瞬时湿表面为 \hat{S}_B , 物面边界条件为

$$\nabla \Phi(\hat{X}) \cdot \hat{n} = [\dot{\hat{\xi}} + \hat{\omega} \times (\hat{X} - \hat{\xi})] \cdot \hat{n} \quad (\hat{X} \in \hat{S}_B) \quad (1.1.22)$$

在浮体的大幅运动中, 物面的速度势时间导数获取是个难题, 可以将其视为边值问题求解。将式(1.1.22)左侧对时间求导, 得到

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{n}} \right) = \frac{d}{dt} (\nabla \Phi \cdot \hat{n}) = \frac{d}{dt} (\nabla \Phi) \cdot \hat{n} + \nabla \Phi \cdot \frac{d \hat{n}}{dt} \quad (1.1.23)$$

由于

$$\frac{d \hat{n}}{dt} = \hat{\omega} \times \hat{n} \quad (1.1.24)$$

$$\frac{d}{dt} (\nabla \Phi) = \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \{ [\dot{\hat{\xi}} + \hat{\omega} \times (\hat{X} - \hat{\xi})] \cdot \nabla \} \nabla \Phi \quad (1.1.25)$$

可以得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{n}} \right) &= \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} \cdot \hat{n} + \{ [\dot{\hat{\xi}} + \hat{\omega} \times (\hat{X} - \hat{\xi})] \cdot \nabla \} \nabla \Phi \cdot \hat{n} + \nabla \Phi \cdot (\hat{\omega} \times \hat{n}) \\ &= \frac{\partial}{\partial \hat{n}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \left\{ [\dot{\hat{\xi}} + \hat{\omega} \times (\hat{X} - \hat{\xi})] \cdot \frac{\partial \nabla \Phi}{\partial \hat{n}} + \nabla \Phi \cdot (\hat{\omega} \times \hat{n}) \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial \hat{n}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \dot{\hat{\xi}} \cdot \frac{\partial \nabla \Phi}{\partial \hat{n}} + \hat{\omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{n}} [(\hat{X} - \hat{\xi}) \times \nabla \Phi] \end{aligned} \quad (1.1.26)$$

将式(1.1.22)右侧对时间求导, 得到



$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \{ [\dot{\xi} + \hat{\omega} \times (\hat{X} - \xi)] \cdot \hat{n} \} \\ &= \{ \ddot{\xi} + \dot{\hat{\omega}} \times (\hat{X} - \xi) + \hat{\omega} \times [\hat{\omega} \times (\hat{X} - \xi)] \} \cdot \hat{n} + [\dot{\xi} + \hat{\omega} \times (\hat{X} - \xi)] \cdot (\hat{\omega} \times \hat{n}) \\ &= [\ddot{\xi} + \dot{\hat{\omega}} \times (\hat{X} - \xi)] \cdot \hat{n} + \hat{\omega} \cdot (\hat{n} \times \dot{\xi}) \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

联合式(1.1.26)和式(1.1.27),得到

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = [\ddot{\xi} + \dot{\hat{\omega}} \times (\hat{X} - \xi)] \cdot \hat{n} - \dot{\xi} \cdot \frac{\partial \nabla \Phi}{\partial \hat{n}} + \hat{\omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{n}} [(\hat{X} - \xi) \times (\dot{\xi} - \nabla \Phi)] \quad (\hat{X} \in \hat{S}_B) \quad (1.1.28)$$

1.2 时域一阶和二阶运动理论

在上一节里,浮体和自由面的边界条件需要在它们的瞬时位置上满足,而浮体和自由面的瞬时位置和形状都是未知的,需要进行时域步进求解。

当浮体进行微幅振荡运动时,可以用摄动展开的方法,利用泰勒(Taylor)展开,使浮体的边界条件在平均湿表面上满足,自由面条件在静水面上满足,从而得到浮体的一阶和二阶时域解的边界条件和运动方程,大大降低求解的难度。

1.2.1 物面和自由面条件

在1.2节和1.3节中延用1.1节的坐标系定义和符号。

假设浮体进行微幅运动,保留到二阶,流场速度势和浮体位移可展成 ε 的幂级数,即

$$\Phi(\hat{X}) = \varepsilon \Phi^{(1)}(\hat{X}) + \varepsilon^2 \Phi^{(2)}(\hat{X}) + O(\varepsilon^3) \quad (1.2.1)$$

$$\xi = \varepsilon \xi^{(1)} + \varepsilon^2 \xi^{(2)} + O(\varepsilon^3) \quad (1.2.2)$$

$$\alpha = \varepsilon \alpha^{(1)} + \varepsilon^2 \alpha^{(2)} + O(\varepsilon^3) \quad (1.2.3)$$

上式中的 ε 为一小参数,表征微幅波或微幅运动的量级。这里

$$\xi^{(1)} = \begin{bmatrix} \xi_1^{(1)} \\ \xi_2^{(1)} \\ \xi_3^{(1)} \end{bmatrix} \quad \xi^{(2)} = \begin{bmatrix} \xi_1^{(2)} \\ \xi_2^{(2)} \\ \xi_3^{(2)} \end{bmatrix} \quad (1.2.4)$$

$$\alpha^{(1)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} \\ \alpha_3^{(1)} \end{bmatrix} \quad \alpha^{(2)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(2)} \\ \alpha_2^{(2)} \\ \alpha_3^{(2)} \end{bmatrix} \quad (1.2.5)$$

使用上述展开,有

$$\hat{X} = X + \xi^{(1)} + \alpha^{(1)} \times X + HX + \xi^{(2)} + \alpha^{(2)} \times X + O(\varepsilon^3) \quad (1.2.6)$$

$$\hat{n} = n + \alpha^{(1)} \times n + Hn + \alpha^{(2)} \times n + O(\varepsilon^3) \quad (1.2.7)$$

H 是描述二阶旋转效应的矩阵,有

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -[(\alpha_2^{(1)})^2 + (\alpha_3^{(1)})^2] & 0 & 0 \\ 2\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)} & -[(\alpha_1^{(1)})^2 + (\alpha_3^{(1)})^2] & 0 \\ 2\alpha_1^{(1)}\alpha_3^{(1)} & 2\alpha_2^{(1)}\alpha_3^{(1)} & -[(\alpha_1^{(1)})^2 + (\alpha_2^{(1)})^2] \end{bmatrix} \quad (1.2.8)$$

式(1.2.6)和式(1.2.7)的矢量积为

$$\hat{\mathbf{X}} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{X} \times \mathbf{n} + \boldsymbol{\xi}^{(1)} \times \mathbf{n} + \boldsymbol{\alpha}^{(1)} \times (\mathbf{X} \times \mathbf{n}) + \boldsymbol{\xi}^{(1)} \times (\boldsymbol{\alpha}^{(1)} \times \mathbf{n}) + \mathbf{H}(\mathbf{X} \times \mathbf{n}) + \boldsymbol{\xi}^{(2)} \times \mathbf{n} + \boldsymbol{\alpha}^{(2)} \times (\mathbf{X} \times \mathbf{n}) + O(\varepsilon^3) \quad (1.2.9)$$

使用泰勒展开,瞬时湿表面上的速度势梯度($\hat{\mathbf{X}} \in \hat{S}_B$)用平均湿表面上的速度势梯度($\mathbf{X} \in S_B$)表示为

$$\nabla\Phi(\hat{\mathbf{X}}) = \nabla\Phi^{(1)}(\mathbf{X}) + \nabla\Phi^{(2)}(\mathbf{X}) + [(\boldsymbol{\xi}^{(1)} + \boldsymbol{\alpha}^{(1)} \times \mathbf{X}) \cdot \nabla] \nabla\Phi^{(1)}(\mathbf{X}) + O(\varepsilon^3) \quad (1.2.10)$$

流体的法向速度为

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\Phi(\hat{\mathbf{X}}) = \mathbf{n} \cdot \nabla\Phi^{(1)}(\mathbf{X}) + \mathbf{n} \cdot \nabla\Phi^{(2)}(\mathbf{X}) + \mathbf{n} \cdot [(\boldsymbol{\xi}^{(1)} + \boldsymbol{\alpha}^{(1)} \times \mathbf{X}) \cdot \nabla] \nabla\Phi^{(1)}(\mathbf{X}) + (\boldsymbol{\alpha}^{(1)} \times \mathbf{n}) \cdot \nabla\Phi^{(1)}(\mathbf{X}) + O(\varepsilon^3) \quad (1.2.11)$$

浮体的法向速度为

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{X}}}{dt} = \mathbf{n} \cdot (\dot{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}^{(1)} \times \mathbf{X}) + \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{H}}\mathbf{X} + \mathbf{n} \cdot (\dot{\boldsymbol{\xi}}^{(2)} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} \times \mathbf{X}) + (\boldsymbol{\alpha}^{(1)} \times \mathbf{n}) \cdot (\dot{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}^{(1)} \times \mathbf{X}) + O(\varepsilon^3) \quad (1.2.12)$$

由此得到一阶速度势和二阶速度式需满足的物面条件

$$\mathbf{n} \cdot \nabla\Phi^{(1)}(\mathbf{X}) = \mathbf{n} \cdot (\dot{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}^{(1)} \times \mathbf{X}) \quad (\mathbf{X} \in S_B) \quad (1.2.13)$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla\Phi^{(2)}(\mathbf{X}) = \mathbf{n} \cdot \{(\dot{\boldsymbol{\xi}}^{(2)} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} \times \mathbf{X}) + \dot{\mathbf{H}}\mathbf{X} - [(\boldsymbol{\xi}^{(1)} + \boldsymbol{\alpha}^{(1)} \times \mathbf{X}) \cdot \nabla] \nabla\Phi^{(1)}(\mathbf{X})\} + (\boldsymbol{\alpha}^{(1)} \times \mathbf{n}) \cdot [\dot{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}^{(1)} \times \mathbf{X} - \nabla\Phi^{(1)}(\mathbf{X})] \quad (\mathbf{X} \in S_B) \quad (1.2.14)$$

一阶速度势和二阶速度式需满足的自由面条件为

$$\frac{\partial^2\Phi^{(1)}(\mathbf{X})}{\partial t^2} + g \frac{\partial\Phi^{(1)}(\mathbf{X})}{\partial z} = 0 \quad (z=0) \quad (1.2.15)$$

$$\frac{\partial^2\Phi^{(2)}(\mathbf{X})}{\partial t^2} + g \frac{\partial\Phi^{(2)}(\mathbf{X})}{\partial z} = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial\Phi^{(1)}(\mathbf{X})}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^2\Phi^{(1)}(\mathbf{X})}{\partial t^2} + g \frac{\partial\Phi^{(1)}(\mathbf{X})}{\partial z} \right] - 2 \nabla\Phi^{(1)}(\mathbf{X}) \cdot \nabla \frac{\partial\Phi^{(1)}(\mathbf{X})}{\partial t} \quad (z=0) \quad (1.2.16)$$

一阶波高 $\eta^{(1)}(\mathbf{X})$ 和二阶波高 $\eta^{(2)}(\mathbf{X})$ 为

$$\eta^{(1)}(\mathbf{X}) = -\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial\Phi^{(1)}(\mathbf{X})}{\partial t} \quad (z=0) \quad (1.2.17)$$

$$\eta^{(2)}(\mathbf{X}) = -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial\Phi^{(2)}(\mathbf{X})}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla\Phi^{(1)}(\mathbf{X}) \cdot \nabla\Phi^{(1)}(\mathbf{X}) - \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial\Phi^{(1)}(\mathbf{X})}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2\Phi^{(1)}(\mathbf{X})}{\partial z \partial t} \right] \quad (z=0) \quad (1.2.18)$$

1.2.2 压力积分

由伯努利方程,瞬时湿表面上的压力为



$$P(\hat{X}) = -\rho \left[\dot{\Phi}(\hat{X}) + \frac{1}{2} \nabla \Phi(\hat{X}) \cdot \nabla \Phi(\hat{X}) + g \hat{z} \right] \quad (1.2.19)$$

在瞬时湿表面 \hat{S}_B 进行积分, 得到波浪力 F 和波浪力矩 M

$$F = \iint_{\hat{S}_B} P(\hat{X}) \hat{n} dS \quad (1.2.20)$$

$$M = \iint_{\hat{S}_B} P(\hat{X}) (\hat{X} \times \hat{n}) dS \quad (1.2.21)$$

使用泰勒展开, 将 $P(\hat{X})$ 用浮体平均湿表面 S_B 上的压力 $P(X)$ 表示为

$$\begin{aligned} P(\hat{X}) &= P(X) + [\xi + DX - X] \cdot \nabla P(X) + O(\varepsilon^3) \\ &= -\rho \{ gz + [\dot{\Phi}^{(1)}(X) + g(\xi_3^{(1)} + \alpha_1^{(1)}y - \alpha_2^{(1)}x)] + \\ &\quad \left[\frac{1}{2} \nabla \Phi^{(1)}(X) \cdot \nabla \Phi^{(1)}(X) + (\xi^{(1)} + \alpha^{(1)} \times X) \cdot \nabla \dot{\Phi}^{(1)}(X) + gHX \cdot \nabla z \right] + \\ &\quad [\dot{\Phi}^{(2)}(X) + g(\xi_3^{(2)} + \alpha_1^{(2)}y - \alpha_2^{(2)}x)] \} + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

将 $P(\hat{X})$ 的表达式代入式(1.2.20)和式(1.2.21)后, 可以得到静水力(矩)、一阶波浪力(矩)、二阶波浪力(矩)。

浮体的排水体积为 V , 浮心坐标为 x_B, y_B 和 z_B , 水线面面积为 A_{WP} , 水线面漂心坐标为 (x_F, y_F) , 水线为 WL, L_{ij} 为水线面的二次矩。

$$V = \iiint_{V_B} dV \quad (1.2.23)$$

$$x_B = \frac{1}{V} \iiint_{V_B} x dV, \quad y_B = \frac{1}{V} \iiint_{V_B} y dV, \quad z_B = \frac{1}{V} \iiint_{V_B} z dV \quad (1.2.24)$$

$$L_{ij} = \iint_{A_{WP}} x_i x_j dS \quad (1.2.25)$$

其中, $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ 。静水力(矩)为

$$F^{(0)} = -\rho g \iint_{S_B} z n dS = \rho g V k \quad (1.2.26)$$

$$M^{(0)} = -\rho g \iint_{S_B} z (X \times n) dS = \rho g V (y_B i - x_B j) \quad (1.2.27)$$

一阶波浪力(矩)为

$$\begin{aligned} F^{(1)} &= -\rho \iint_{S_B} [\dot{\Phi}^{(1)}(X) + g(\xi_3^{(1)} + \alpha_1^{(1)}y - \alpha_2^{(1)}x)] n dS - \rho g \iint_{S_B} (\alpha^{(1)} \times n) z dS \\ &= -\rho \iint_{S_B} \dot{\Phi}^{(1)}(X) n dS - \rho g A_{WP} (\xi_3^{(1)} + \alpha_1^{(1)}y_F - \alpha_2^{(1)}x_F) k \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

$$\begin{aligned} M^{(1)} &= -\rho \iint_{S_B} [\dot{\Phi}^{(1)}(X) + g(\xi_3^{(1)} + \alpha_1^{(1)}y - \alpha_2^{(1)}x)] (X \times n) dS - \\ &\quad \rho g \iint_{S_B} [\xi^{(1)} \times n + \alpha^{(1)} \times (X \times n)] z dS \\ &= -\rho \iint_{S_B} (X \times n) \dot{\Phi}^{(1)}(X) dS - \rho g [-V \xi_2^{(1)} + A_{WP} y_F \xi_3^{(1)} + (V z_B + L_{22}) \alpha_1^{(1)} - L_{12} \alpha_2^{(1)} - \\ &\quad V x_B \alpha_3^{(1)}] i - \rho g [V \xi_1^{(1)} - A_{WP} x_F \xi_3^{(1)} - L_{12} \alpha_1^{(1)} + (V z_B + L_{11}) \alpha_2^{(1)} - V y_B \alpha_3^{(1)}] j \end{aligned} \quad (1.2.29)$$

二阶波浪力(矩)为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}^{(2)} = & -\rho g \iint_{S_B} z \mathbf{H} n dS - \rho g \iint_{S_B} (\mathbf{H} \mathbf{X} \cdot \mathbf{k}) n dS - \\
 & \rho \iint_{S_B} (\boldsymbol{\alpha}^{(1)} \times \mathbf{n}) [\dot{\Phi}^{(1)}(\mathbf{X}) + g(\xi_3^{(1)} + \alpha_1^{(1)} y - \alpha_2^{(1)} x)] dS - \\
 & \rho g \iint_{S_B} \left[\frac{1}{2} \nabla \Phi^{(1)}(\mathbf{X}) \cdot \nabla \Phi^{(1)}(\mathbf{X}) + (\boldsymbol{\xi}^{(1)} + \boldsymbol{\alpha}^{(1)} \times \mathbf{X}) \cdot \nabla \dot{\Phi}^{(1)}(\mathbf{X}) \right] n dS + \\
 & \frac{1}{2} \rho g \int_{WL} [\eta^{(1)} - (\xi_3^{(1)} + \alpha_1^{(1)} y - \alpha_2^{(1)} x)]^2 n / \sqrt{1 - n_3^2} dl - \\
 & \rho \iint_{S_B} \dot{\Phi}^{(2)}(\mathbf{X}) n dS - \rho g \iint_{S_B} (\xi_3^{(2)} + \alpha_1^{(2)} y - \alpha_2^{(1)} x) n dS - \rho g \iint_{S_B} (\boldsymbol{\alpha}^{(2)} \times \mathbf{n}) z dS \\
 = & \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_q - \rho g A_{WP} (\xi_3^{(2)} + \alpha_1^{(2)} y_F - \alpha_2^{(2)} x_F) \mathbf{k} \quad (1.2.30)
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_p = -\rho \iint_{S_B} \dot{\Phi}^{(2)}(\mathbf{X}) n dS \quad (1.2.31)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_q = & \frac{1}{2} \rho g \int_{WL} [\eta^{(1)} - (\xi_3^{(1)} + \alpha_1^{(1)} y - \alpha_2^{(1)} x)]^2 n / \sqrt{1 - n_3^2} dl - \\
 & \rho \iint_{S_B} \left[\frac{1}{2} \nabla \Phi^{(1)}(\mathbf{X}) \cdot \nabla \Phi^{(1)}(\mathbf{X}) + (\boldsymbol{\xi}^{(1)} + \boldsymbol{\alpha}^{(1)} \times \mathbf{X}) \cdot \nabla \dot{\Phi}^{(1)}(\mathbf{X}) \right] n dS + \\
 & \boldsymbol{\alpha}^{(1)} \times \mathbf{F}^{(1)} - \rho g A_{WP} (\alpha_1^{(1)} \alpha_3^{(1)} x_F + \alpha_2^{(1)} \alpha_3^{(1)} y_F) \mathbf{k} \quad (1.2.32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}^{(2)} = & -\rho \iint_{S_B} \boldsymbol{\alpha}^{(1)} \times (\mathbf{X} \times \mathbf{n}) [\nabla \dot{\Phi}^{(1)}(\mathbf{X}) + g(\xi_3^{(1)} + \alpha_1^{(1)} y - \alpha_2^{(1)} x)] dS + \\
 & \frac{1}{2} \rho g \int_{WL} [\eta^{(1)} - (\xi_3^{(1)} + \alpha_1^{(1)} y - \alpha_2^{(1)} x)]^2 (\mathbf{X} \times \mathbf{n}) / \sqrt{1 - n_3^2} dl - \\
 & \rho \iint_{S_B} \left[\frac{1}{2} \nabla \Phi^{(1)}(\mathbf{X}) \cdot \nabla \Phi^{(1)}(\mathbf{X}) + (\boldsymbol{\xi}^{(1)} + \boldsymbol{\alpha}^{(1)} \times \mathbf{X}) \cdot \nabla \dot{\Phi}^{(1)}(\mathbf{X}) + g \mathbf{H} \mathbf{X} \cdot \mathbf{k} \right] (\mathbf{X} \times \\
 & \mathbf{n}) dS - \rho \iint_{S_B} (\boldsymbol{\xi}^{(1)} \times \mathbf{n}) [\dot{\Phi}^{(1)}(\mathbf{X}) + g(\xi_3^{(1)} + \alpha_1^{(1)} y - \alpha_2^{(1)} x)] dS - \\
 & \rho \iint_{S_B} [\boldsymbol{\xi}^{(1)} \times (\boldsymbol{\alpha}^{(1)} \times \mathbf{n}) + \mathbf{H}(\mathbf{X} \times \mathbf{n})] z dS - \rho g \iint_{S_B} (\xi_3^{(1)} + \alpha_1^{(1)} y - \alpha_2^{(1)} x) (\mathbf{X} \times \\
 & \mathbf{n}) dS - \rho g \iint_{S_B} [\boldsymbol{\xi}^{(2)} \times \mathbf{n} + \boldsymbol{\alpha}^{(2)} \times (\mathbf{X} \times \mathbf{n})] z dS - \rho g \iint_{S_B} (\mathbf{X} \times \mathbf{n}) \dot{\Phi}^{(2)}(\mathbf{X}) dS \\
 = & \mathbf{M}_p + \mathbf{M}_q - \rho g [-V \xi_2^{(2)} + A_{WP} y_F \xi_3^{(2)} + (V z_B + L_{22}) \alpha_1^{(2)} - L_{12} \alpha_2^{(2)} - V x_B \alpha_3^{(2)}] \mathbf{i} - \\
 & \rho g [V \xi_1^{(2)} - A_{WP} x_F \xi_3^{(2)} - L_{12} \alpha_1^{(2)} + (V z_B + L_{11}) \alpha_2^{(2)} - V y_B \alpha_3^{(2)}] \mathbf{j} \quad (1.2.33)
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_p = -\rho g \iint_{S_B} (\mathbf{X} \times \mathbf{n}) \dot{\Phi}^{(2)}(\mathbf{X}) dS \quad (1.2.34)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_q = & \frac{1}{2} \rho g \int_{WL} [\eta^{(1)} - (\xi_3^{(1)} + \alpha_1^{(1)} y - \alpha_2^{(1)} x)]^2 (\mathbf{X} \times \mathbf{n}) / \sqrt{1 - n_3^2} dl - \\
 & \rho \iint_{S_B} \left[\frac{1}{2} \nabla \Phi^{(1)}(\mathbf{X}) \cdot \nabla \Phi^{(1)}(\mathbf{X}) + (\boldsymbol{\xi}^{(1)} + \boldsymbol{\alpha}^{(1)} \times \mathbf{X}) \cdot \nabla \dot{\Phi}^{(1)}(\mathbf{X}) \right] (\mathbf{X} \times \mathbf{n}) dS + \\
 & \boldsymbol{\xi}^{(1)} \times \mathbf{F}^{(1)} + \boldsymbol{\alpha}^{(1)} \times \mathbf{M}^{(1)} + \rho g \left\{ -V \xi_1^{(1)} \alpha_3^{(1)} + V \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(1)} x_B - V \alpha_2^{(1)} \alpha_3^{(1)} z_B - \frac{1}{2} V [(\alpha_1^{(1)})^2 - \right. \\
 & \left. (\alpha_3^{(1)})^2] y_B - \alpha_1^{(1)} \alpha_3^{(1)} L_{12} - \alpha_2^{(1)} \alpha_3^{(1)} L_{22} \right\} \mathbf{i} + \rho g \left\{ -V \xi_2^{(1)} \alpha_3^{(1)} + V \alpha_1^{(1)} \alpha_3^{(1)} z_B + \right.
 \end{aligned}$$



$$\frac{1}{2}V[(\alpha_2^{(1)})^2 - (\alpha_3^{(1)})^2]x_B + \alpha_1^{(1)}\alpha_3^{(1)}L_{11} + \alpha_2^{(1)}\alpha_3^{(1)}L_{12} \} \mathbf{j} +$$

$$\rho g (V\xi_1^{(1)}\alpha_1^{(1)} + V\xi_2^{(1)}\alpha_2^{(1)} + V\alpha_2^{(1)}\alpha_3^{(1)}x_B - V\alpha_1^{(1)}\alpha_3^{(1)}y_B) \mathbf{k} \quad (1.2.35)$$

在浮体运动过程中,浮体与自由面的相对位置和浮体的法向都在变化。二阶波浪力 $\mathbf{F}^{(2)}$ 为动压力沿平均湿表面上的积分和水线积分的和,其中有五部分一阶运动与速度势的贡献。

(1) 二阶非线性旋转的贡献

$$-\rho g \iint_{S_B} z \mathbf{H} n dS - \rho g \iint_{S_B} (\mathbf{H} \mathbf{X} \cdot \mathbf{k}) n dS$$

(2) 一阶力的旋转效应

$$-\rho \iint_{S_B} (\boldsymbol{\alpha}^{(1)} \times \mathbf{n}) [\dot{\Phi}^{(1)}(\mathbf{X}) + g(\xi_3^{(1)} + \alpha_1^{(1)}y - \alpha_2^{(1)}x)] dS$$

(3) 一阶流体速度平方项的贡献

$$-\rho \iint_{S_B} \left[\frac{1}{2} \nabla \Phi^{(1)}(\mathbf{X}) \cdot \nabla \Phi^{(1)}(\mathbf{X}) \right] n dS$$

(4) 考虑一阶浮体位移的影响,将压力由 \hat{S}_B 修正到 S_B 上

$$-\rho \iint_{S_B} [(\boldsymbol{\xi}^{(1)} + \boldsymbol{\alpha}^{(1)} \times \mathbf{X}) \cdot \nabla \dot{\Phi}^{(1)}(\mathbf{X})] n dS$$

(5) 一阶压力在平均自由面和瞬时自由面之间的积分

$$\frac{1}{2} \rho g \int_{\text{WL}} [\eta^{(1)} - (\xi_3^{(1)} + \alpha_1^{(1)}y - \alpha_2^{(1)}x)]^2 \mathbf{n} / \sqrt{1 - n_3^2} dl$$

1.2.3 一阶及二阶运动方程

质心位移 $\hat{\mathbf{X}}_C$ 和加速度 $\ddot{\hat{\mathbf{X}}}_C$ 的二阶展开为

$$\hat{\mathbf{X}}_C = \mathbf{X}_C + \boldsymbol{\xi}^{(1)} + \boldsymbol{\alpha}^{(1)} \times \mathbf{X}_C + \mathbf{H} \mathbf{X}_C + \boldsymbol{\xi}^{(2)} + \boldsymbol{\alpha}^{(2)} \times \mathbf{X}_C + O(\varepsilon^3) \quad (1.2.36)$$

$$\ddot{\hat{\mathbf{X}}}_C = \ddot{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} + \ddot{\boldsymbol{\alpha}}^{(1)} \times \mathbf{X}_C + \ddot{\mathbf{H}} \mathbf{X}_C + \ddot{\boldsymbol{\xi}}^{(2)} + \ddot{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} \times \mathbf{X}_C + \dots \quad (1.2.37)$$

对角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 展开,保留到二阶

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1^{(1)} \\ \dot{\alpha}_2^{(1)} \\ \dot{\alpha}_3^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1^{(2)} + \dot{\alpha}_2^{(1)}\alpha_3^{(1)} \\ \dot{\alpha}_2^{(2)} - \dot{\alpha}_1^{(1)}\alpha_3^{(1)} \\ \dot{\alpha}_3^{(2)} + \dot{\alpha}_1^{(1)}\alpha_2^{(1)} \end{bmatrix} + O(\varepsilon^3) = \dot{\boldsymbol{\alpha}}^{(1)} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} + \boldsymbol{\alpha}^g + O(\varepsilon^3) \quad (1.2.38)$$

$$\boldsymbol{\alpha}^g = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_2^{(1)}\alpha_3^{(1)} \\ -\dot{\alpha}_1^{(1)}\alpha_3^{(1)} \\ \dot{\alpha}_1^{(1)}\alpha_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad (1.2.39)$$

一阶和二阶运动方程为

$$\mathbf{M} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} \\ \ddot{\boldsymbol{\alpha}}^{(1)} \end{Bmatrix} + \mathbf{C} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\xi}^{(1)} \\ \boldsymbol{\alpha}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{\text{exc}}^{(1)} \\ \mathbf{M}_{\text{exc}}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (1.2.40)$$

$$\mathbf{M} \begin{Bmatrix} \ddot{\xi}^{(2)} \\ \ddot{\alpha}^{(2)} \end{Bmatrix} + \mathbf{C} \begin{Bmatrix} \xi^{(2)} \\ \alpha^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{\text{exc}}^{(2)} \\ \mathbf{M}_{\text{exc}}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (1.2.41)$$

其中, \mathbf{M} 是质量力矩阵, \mathbf{C} 是静水回复力矩阵, 有

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_G & -my_G \\ 0 & m & 0 & -mz_G & 0 & mx_G \\ 0 & 0 & m & my_G & -mx_G & 0 \\ 0 & -mz_G & my_G & I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ mz_G & 0 & -mx_G & I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ -my_G & mx_G & 0 & I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \quad (1.2.42)$$

$$\mathbf{C} = g \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho A_{\text{WP}} & \rho A_{\text{WP}} y_F & -\rho A_{\text{WP}} x_F & 0 \\ 0 & 0 & \rho A_{\text{WP}} y_F & \rho(Vz_B + L_{22}) - mz_G & -\rho L_{12} & -\rho Vx_B + mx_G \\ 0 & 0 & -\rho A_{\text{WP}} x_F & -\rho L_{12} & \rho(Vz_B + L_{11}) - mz_G & -\rho Vy_B + my_G \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.43)$$

$$\mathbf{F}_{\text{exc}}^{(1)} = -\rho \iint_{S_B} \dot{\Phi}^{(1)}(\mathbf{X}) \mathbf{n} dS \quad (1.2.44)$$

$$\mathbf{M}_{\text{exc}}^{(1)} = -\rho g \iint_{S_B} \dot{\Phi}^{(1)}(\mathbf{X}) (\mathbf{X} \times \mathbf{n}) dS \quad (1.2.45)$$

$$\mathbf{F}_{\text{exc}}^{(2)} = \mathbf{F}_q + \mathbf{F}_p - m \ddot{\mathbf{H}} \mathbf{X}_G \quad (1.2.46)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{exc}}^{(2)} = & \rho g V [\alpha_3^{(1)} \xi_1^{(1)} \mathbf{i} + \alpha_3^{(1)} \xi_2^{(1)} \mathbf{j} - (\alpha_1^{(1)} \xi_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} \xi_2^{(1)}) \mathbf{k}] + \\ & mg \left(\left\{ \frac{1}{2} [(\alpha_1^{(1)})^2 - (\alpha_3^{(1)})^2] y_G - \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(1)} x_G + \alpha_2^{(1)} \alpha_3^{(1)} z_G \right\} \mathbf{i} - \right. \\ & \left. \left\{ \frac{1}{2} [(\alpha_2^{(1)})^2 - (\alpha_3^{(1)})^2] x_G + \alpha_1^{(1)} \alpha_3^{(1)} z_G \right\} \mathbf{j} + (\alpha_1^{(1)} \alpha_3^{(1)} y_G - \alpha_2^{(1)} \alpha_3^{(1)} x_G) \mathbf{k} \right) + \\ & \mathbf{M}_q - \dot{\alpha}^{(1)} \times I_G \dot{\alpha}^{(1)} - I_G \dot{\alpha}^q - \xi^{(1)} \times \mathbf{F}^{(1)} - \alpha^{(1)} \times \mathbf{M}^{(1)} + \mathbf{X}_G \times (\alpha^{(1)} \times \mathbf{F}^{(1)}) - \\ & m \mathbf{X}_G \times \ddot{\mathbf{H}} \mathbf{X}_G + \mathbf{M}_p \end{aligned} \quad (1.2.47)$$

1.3 频域一阶和二阶运动理论

在上一节基础上, 假定入射波为双色波, 可以导出浮体的一阶和二阶频域解的边界条件和运动方程, 取得一阶和二阶波浪力传递函数, 由此可以计算不规则波作用下的一阶和二阶波浪力谱, 或者使用卡明斯(Cummins)方程进行时域运动模拟, 从而获得浮体在不规则波浪中的结构动力响应。

1.3.1 边界条件

在双色波的情况下(频率为 ω_1 和 ω_2), 一阶速度势 $\Phi^{(1)}(\mathbf{X}, t)$ 表示为



$$\Phi^{(1)}(\mathbf{X}, t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^2 \Phi_j^{(1)}(\mathbf{X}) e^{i\omega_j t} \right\} \quad (1.3.1)$$

二阶速度势 $\Phi^{(2)}(\mathbf{X}, t)$ 表示差频分量与和频分量的叠加, 即

$$\Phi^{(2)}(\mathbf{X}, t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 [\phi_{ij}^-(\mathbf{X}) e^{i(\omega_i - \omega_j)t} + \phi_{ij}^+(\mathbf{X}) e^{i(\omega_i + \omega_j)t}] \right\} \quad (1.3.2)$$

把一阶势 $\Phi^{(1)}(\mathbf{X}, t)$ 和二阶势 $\Phi^{(2)}(\mathbf{X}, t)$ 分解为入射波势 $\Phi_I(\mathbf{X}, t)$ 、辐射势 $\Phi_R(\mathbf{X}, t)$ 与散射势 $\Phi_S(\mathbf{X}, t)$ 之和, 从而有

$$\Phi(\mathbf{X}, t) = \varepsilon [\Phi_I^{(1)}(\mathbf{X}, t) + \Phi_R^{(1)}(\mathbf{X}, t) + \Phi_S^{(1)}(\mathbf{X}, t)] + \varepsilon^2 [\Phi_I^{(2)}(\mathbf{X}, t) + \Phi_R^{(2)}(\mathbf{X}, t) + \Phi_S^{(2)}(\mathbf{X}, t)] \quad (1.3.3)$$

设水深为 h , 一阶入射波势的空间部分为

$$\phi_{jI}^{(1)} = \frac{igA_j}{\omega_j} Z(k_j z) e^{-ik_j(x \cos \beta_j + y \sin \beta_j)} \quad (1.3.4)$$

其中, A_j 是波幅, β_j 是入射波方向与 x 轴的夹角, 波数 k_j 与频率 ω_j 满足色散关系

$$k_j \tanh k_j h = \frac{\omega_j^2}{g} \quad (1.3.5)$$

$Z(k_j h)$ 为深度相关函数, 有

$$Z(k_j z) = \frac{\cosh k_j(z+h)}{\cosh k_j h} \quad (1.3.6)$$

二阶入射波势的空间部分为

$$\phi_{ij}^{\pm} = \frac{Q_{\parallel}^{\pm}(x, y) Z(k_{ij}^{\pm} z)}{q_{ij}^{\pm}} \quad (1.3.7)$$

式中

$$Q_{\parallel}^+ = \gamma_{ij}^+ e^{-ik_{ij}^+ x - ik_{ij}^+ y} \quad (1.3.8)$$

$$\gamma_{ij}^+ = -\frac{1}{2} ig^2 A_i A_j \left[\frac{k_j^2 - \omega_j^4/g^2}{2\omega_j} + \frac{k_i^2 - \omega_i^4/g^2}{2\omega_i} + \frac{\omega_i + \omega_j}{\omega_i \omega_j} \left(k_i k_j \cos \beta_i \cos \beta_j + k_i k_j \sin \beta_i \sin \beta_j - \frac{\omega_i^2 \omega_j^2}{g^2} \right) \right] \quad (1.3.9)$$

$$k_{ij}^{c+} = k_i \cos \beta_i + k_j \cos \beta_j, k_{ij}^{s+} = k_i \sin \beta_i + k_j \sin \beta_j \quad (1.3.10)$$

$$Q_{\parallel}^- = \gamma_{ij}^- e^{-ik_{ij}^- x - ik_{ij}^- y} \quad (1.3.11)$$

$$\gamma_{ij}^- = \frac{1}{2} ig^2 A_i A_j^* \left[\frac{k_j^2 - \omega_j^4/g^2}{2\omega_j} - \frac{k_i^2 - \omega_i^4/g^2}{2\omega_i} - \frac{\omega_i - \omega_j}{\omega_i \omega_j} \left(k_i k_j \cos \beta_i \cos \beta_j + k_i k_j \sin \beta_i \sin \beta_j + \frac{\omega_i^2 \omega_j^2}{g^2} \right) \right] \quad (1.3.12)$$

$$k_{ij}^{c-} = k_i \cos \beta_i - k_j \cos \beta_j, k_{ij}^{s-} = k_i \sin \beta_i - k_j \sin \beta_j \quad (1.3.13)$$

$$k_{ij}^{\pm} = \sqrt{k_i^2 + k_j^2 \pm 2k_i k_j \cos(\beta_i - \beta_j)} \quad (1.3.14)$$

$$q_{ij}^{\pm} = -(\omega_i \pm \omega_j)^2 + g k_{ij}^{\pm} \tanh k_{ij}^{\pm} h \quad (1.3.15)$$

上角标 * 表示取复共轭。浮体的一阶平动位移 $\xi^{(1)}$ 与旋转位移 $\alpha^{(1)}$ 可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \xi^{(1)}(\mathbf{X}, t) &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \xi_j^{(1)}(\mathbf{X}) e^{i\omega_j t}, \xi_j^{(1)}(\mathbf{X}) = (\xi_{1j}^{(1)}, \xi_{2j}^{(1)}, \xi_{3j}^{(1)}) \\ \alpha^{(1)}(\mathbf{X}, t) &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \alpha_j^{(1)}(\mathbf{X}) e^{i\omega_j t}, \alpha_j^{(1)}(\mathbf{X}) = (\alpha_{1j}^{(1)}, \alpha_{2j}^{(1)}, \alpha_{3j}^{(1)}) \end{aligned} \right\} \quad (1.3.16)$$

二阶运动位移可以写为

$$[\xi^{(2)}, \alpha^{(2)}](X, t) = \text{Re} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \{ [\xi^+, \alpha^+](X) e^{i(\omega_i + \omega_j)t} + [\xi^-, \alpha^-](X) e^{i(\omega_i - \omega_j)t} \} \quad (1.3.17)$$

一阶辐射势 $\phi_{jR}^{(1)}$ 可以分解为 6 个单位运动幅值的辐射势的组合, 即

$$\phi_{jR}^{(1)} = i\omega_j \sum_{k=1}^3 \xi_{kj}^{(1)} \phi_{jR}^{(1)k} + i\omega_j \sum_{k=4}^6 \alpha_{kj}^{(1)} \phi_{jR}^{(1)k} \quad (1.3.18)$$

满足的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \left(-\omega_j^2 + g \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi_{jR}^{(1)k}(X) &= 0 && \text{(在自由面 } S_F \text{ 上 } (z=0)) \\ \frac{\partial \phi_{jR}^{(1)k}(X)}{\partial n} &= n_k && \text{(平均湿表面 } S_B \text{ 上)} \\ \frac{\partial \phi_{jR}^{(1)k}(X)}{\partial n} &= 0 && \text{(在底面 } S_D \text{ 上 } (z=-h)) \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - ik_j \right) \phi_{jR}^{(1)k}(X) &= 0 && \text{(在无穷远面 } S_\infty \text{ 上)} \end{aligned} \right\} \quad (1.3.19)$$

其中, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ 是距原点的径向距离; $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$ 是物面单位法向, 指向浮体内部; $\mathbf{X} \times \mathbf{n} = (n_4, n_5, n_6)^T$ 。除物面条件外, 一阶散射势 $\phi_{jS}^{(1)}$ 满足的边界条件与一阶辐射势 $\phi_{jR}^{(1)}$ 相同, 有

$$\frac{\partial \phi_{jS}^{(1)}(X)}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_{jR}^{(1)}(X)}{\partial n} \quad \text{(平均湿表面 } S_B \text{ 上)} \quad (1.3.20)$$

二阶辐射势 ϕ_{jR}^\pm 为

$$\phi_{jR}^\pm = i(\omega_i \pm \omega_j) \sum_{k=1}^3 \xi_{kij}^\pm \phi_{jR}^{\pm k} + i(\omega_i \pm \omega_j) \sum_{k=4}^6 \alpha_{kij}^\pm \phi_{jR}^{\pm k} \quad (1.3.21)$$

$\phi_{jR}^{\pm k}$ 满足的边界条件与一阶辐射势 $\phi_{jR}^{(1)}$ 相同(将 ω_j 和 k_j 替换为 $\omega_i \pm \omega_j$ 和 k_{ij}^\pm)。二阶散射势 ϕ_{jS}^\pm 满足的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} -(\omega_i \pm \omega_j)^2 \phi_{jS}^\pm + g \frac{\partial \phi_{jS}^\pm}{\partial Z} &= Q_F^\pm && \text{(在自由面 } S_F \text{ 上 } (z=0)) \\ \frac{\partial \phi_{jS}^\pm}{\partial n} &= Q_B^\pm && \text{(平均湿表面 } S_B \text{ 上)} \\ \frac{\partial \phi_{jS}^\pm}{\partial z} &= 0 && \text{(在底面 } S_D \text{ 上 } (z=-h)) \\ \text{无穷远处辐射条件} &&& \text{(在无穷远面 } S_\infty \text{ 上)} \end{aligned} \right\} \quad (1.3.22)$$

其中远方辐射条件参看 M. H. Kim 等的分析, 这里

$$Q_F^+ = \frac{i\omega_i \phi_i^{(1)}}{4g} \left(-\omega_j^2 \frac{\partial \phi_j^{(1)}}{\partial z} + g \frac{\partial^2 \phi_j^{(1)}}{\partial z^2} \right) + \frac{i\omega_j \phi_j^{(1)}}{4g} \left(-\omega_i^2 \frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial z} + g \frac{\partial^2 \phi_i^{(1)}}{\partial z^2} \right) - \frac{i}{2} (\omega_i + \omega_j) \nabla \phi_i^{(1)} \cdot \nabla \phi_j^{(1)} - Q_{II}^+ \quad (1.3.23)$$

$$Q_F^- = \frac{i\omega_i \phi_i^{(1)}}{4g} \left(-\omega_j^2 \frac{\partial \phi_j^{(1)*}}{\partial z} + g \frac{\partial^2 \phi_j^{(1)*}}{\partial z^2} \right) - \frac{i\omega_j \phi_j^{(1)*}}{4g} \left(-\omega_i^2 \frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial z} + g \frac{\partial^2 \phi_i^{(1)}}{\partial z^2} \right) - \frac{i}{2} (\omega_i - \omega_j) \nabla \phi_i^{(1)} \cdot \nabla \phi_j^{(1)*} - Q_{II}^- \quad (1.3.24)$$