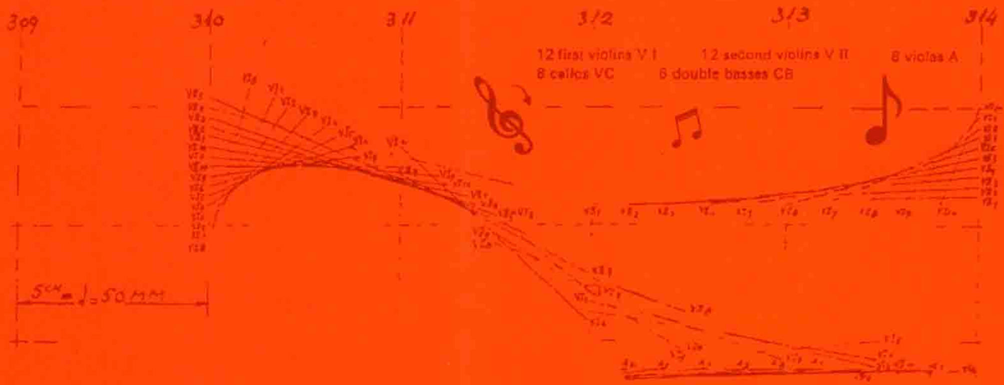

通·识·教·育·丛·书

音乐与数学

Music and Mathematics

王 杰 ◎ 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

通·识·教·育·丛·书

音乐与数学

Music and Mathematics

王 杰◎编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

音乐与数学 / 王杰编著．— 北京：北京大学出版社，2019. 8
ISBN 978-7-301-30592-8

Ⅰ. ①音… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①音乐—关系—数学—高等学校—教材 Ⅳ. ① J6 ② O1-05

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 144219 号

书　　名	音乐与数学 YINYUE YU SHUXUE
著作责任者	王　杰　编著
责任编辑	曾琬婷
标准书号	ISBN 978-7-301-30592-8
出版发行	北京大学出版社
地　　址	北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址	http://www.pup.cn　新浪微博：@ 北京大学出版社
电子信箱	zpup@pup.cn
电　　话	邮购部 010-62752015　发行部 010-62750672　编辑部 010-62754819
印 刷 者	北京大学印刷厂
经 销 者	新华书店
	787 毫米 × 980 毫米　16 开本　13.75 印张　290 千字
	2019 年 8 月第 1 版　2019 年 8 月第 1 次印刷
定　　价	62.00 元

内 容 简 介

本书是作者在北京大学开设通识教育核心课程“音乐与数学”的讲义基础上编写而成的. 本书通过介绍音乐与数学之间密不可分却又往往不为人知的关系, 探讨音乐这门抽象的艺术与数学和自然科学之间的互动, 比较它们的思想方法之异同, 打通文理界限, 提高学生的艺术修养和分析能力, 最终达到提高学生综合素质的目的. 因为是面向全校各专业的本科生, 所以在课程设计方面并不要求读者具有音乐理论方面的先修知识, 而是从零开始介绍基础乐理. 在数学方面, 只假定读者具有高中数学的知识水平. 对于书中需要用到的几何、组合计数等方面的知识都尽量做了比较详细、直观的介绍. 为了既保持叙述的连贯性, 又保持数学逻辑的完整性, 把作为现代音乐理论基础的集合理论及其相关的基础知识集中起来作为附录 A; 同时, 为了提供音乐变换理论所需要的群论工具, 单独写了附录 B, 专门介绍群论的基本概念以及与本书内容相关的定理和方法等, 以供读者随时查询.

全书内容大致可以分成三部分. 第一部分包括前三章, 从介绍音乐的一些基本知识开始, 进而通过弦的振动方程介绍泛音列的生成、梅森定律等, 然后介绍律学. 这部分内容是介绍音乐与数学之间关系时总会讲到的比较传统的内容. 第二部分就是第四章, 介绍了一些重要的音乐概念: 调式、音阶、和弦及其进行等, 基本上属于音乐基础理论, 没有涉及数学. 第五 ~ 八章属于第三部分, 分别介绍了如何用数学方法来分析和理解音乐的三大要素: 旋律、节奏、和声, 以及非确定性在音乐理论和实践中的作用. 书中安排了一些习题, 其中一部分是帮助读者加深理解相关知识的练习, 另一部分是对正文内容的进一步推广, 还有一些则是引发读者进一步思考的问题.

本书可作为高等院校素质教育课程、通识教育同类课程的教材或者教学参考书, 也可供音乐、数学等领域的研究者参考. 对于感兴趣的广大读者而言, 也可以把本书作为音乐与数学方面的入门导引.

前　言

一

音乐与数学之间有什么关系? 对于这个问题, 也许有人会回答: 这两者毫不相干, 怎么会有关系? 也有人会回答: 音乐和数学好像的确有些相似的地方. 但是, 更多的人也许从来就没有想过这个问题.

在 20 世纪 80 年代开始发掘的河南省舞阳县贾湖新石器时代遗址的墓葬群中, 先后发现了数十支骨笛 (参见图 1). 考古学家对舞阳县贾湖遗址的木炭、泥炭做了碳–14 测定, 又经树轮校正, 得出骨笛的年代大约为公元前 7000—前 5800 年的结论 ([20, p.53]). 这些骨笛大多数为七孔的, 可以吹奏出完整的六声和七声音阶. 不仅如此, “不少骨笛的音孔旁尚存钻孔时设计音孔位置的横线刻记. 可以看出, 开孔前的刻线显然是根据某种特定的比例关系计算好了的 ([18])”. 可见, 早在远古时代, 音乐就已经与数学计算发生了联系.

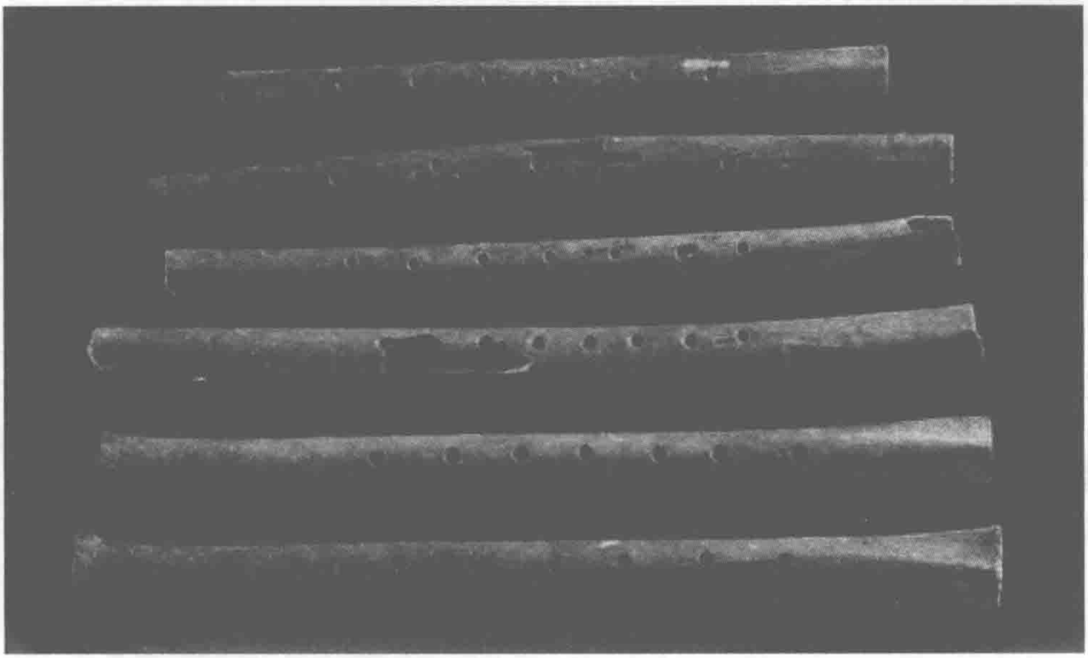

图 1　贾湖骨笛 (约前 7000—前 5800)

《吕氏春秋》是秦国丞相吕不韦[1]主编的一部中国古代的百科全书，包括八览、六论、十二纪，共二十万言. 在“季夏纪第六”中记载了十二律的名称及其相生关系:

黄钟生林钟，林钟生太蔟，太蔟生南吕，南吕生姑洗，姑洗生应钟，应钟生蕤宾，蕤宾生大吕，大吕生夷则，夷则生夹钟，夹钟生无射，无射生仲吕. 三分所生，益之一分以上生. 三分所生，去其一分以下生. 黄钟、大吕、太蔟、夹钟、姑洗、仲吕、蕤宾为上，林钟、夷则、南吕、无射、应钟为下.[2]

司马迁[3]在《史记》中有如下文字:

律数: 九九八十一以为宫. 三分去一，五十四以为徵. 三分益一，七十二以为商. 三分去一，四十八以为羽. 三分益一，六十四以为角. 黄钟长八寸七分一，宫. 大吕长七寸五分三分一. 太蔟长七寸七分二，角. 夹钟长六寸一分三分一. 姑洗长六寸七分四，羽. 仲吕长五寸九分三分二，徵. 蕤宾长五寸六分三分一. 林钟长五寸七分四，角. 夷则长五寸四分三分二，商. 南吕长四寸七分八，徵. 无射长四寸四分三分二. 应钟长四寸二分三分二，羽.

生钟分: 子一分. 丑三分二. 寅九分八. 卯二十七分十六. 辰八十一分六十四. 巳二百四十三分一百二十八. 午七百二十九分五百一十二. 未二千一百八十七分一千二十四. 申六千五百六十一分四千九十六. 酉一万九千六百八十三分八千一百九十二. 戌五万九千四十九分三万二千七百六十八. 亥十七万七千一百四十七分六万五千五百三十六.[4]

从上面这些文字可以看出，音乐与数学之间是有着某种密切联系的. 第二段引文中那些数字如果用现代符号表示，是一个由分数构成的序列

$$1,\ \frac{2}{3},\ \frac{8}{9},\ \frac{16}{27},\ \frac{64}{81},\ \frac{128}{243},\ \frac{512}{729},\ \frac{1\,024}{2\,187},\ \frac{4\,096}{6\,561},\ \frac{8\,192}{19\,683},\ \frac{32\,768}{59\,049},\ \frac{65\,536}{177\,147}.$$

为什么音律会与这样一些分数有关呢? 读者可以在第三章中找到答案. 事实上，历代文人学者、专家教授对这些文字和数字做了无数的考证、校勘、研究乃至实验，所涉及的领域包括了音律学、数学、物理学 (“管口校正”) 等多个学科. 感兴趣的读者可以参看文献 [5, 8] 以及那里列出的参考文献.

古希腊学者毕达哥拉斯[5]相信“万物皆数” (all things are numbers). 他认为数与几何图形、音乐的和谐、天体的运行等都有密切关系，所谓“四艺” (quadrivium) 就是算术、几何、音乐和天文. 无独有偶，中国古代的“六艺” (礼、乐、射、御、书、数) 同样包含了

[1]吕不韦 (约前 292—前 235)，卫国濮阳 (今河南省安阳市滑县) 人，战国末年政治家、思想家、商人，曾任秦国丞相.

[2]选自《吕氏春秋集释》(许维遹撰，梁运华整理，中华书局，北京，2009).

[3]司马迁 (约前 145 —约前 86)，字子长，夏阳 (今陕西韩城南) 人，史学家、文学家、思想家.

[4]选自《史记 · 卷二十五 · 律书第三》([16, 第四册, pp.1249–1250]).

[5]毕达哥拉斯 (Pythagoras of Samos, 约前 570—前 495)，古希腊哲学家、数学家、科学家.

音乐和数学. 毕达哥拉斯认为音乐是数的应用, 从属于数学的学科, 因为宇宙和谐的基础是完美的数的比例. 例如, 当乐器的弦长比分别为 2:1, 3:2, 4:3 时, 发出的纯八度、纯五度、纯四度音程是完美的协和音程.

莱布尼茨[6]在 1712 年 4 月 17 日给哥德巴赫[7]的信中写道: "我们从音乐中得到的愉悦来源于计算, 无意识地计算. 音乐不过是无意识的算术."[8]

也许西尔维斯特[9]的话最能够概况地说出音乐与数学的关系: "难道不能把音乐描述成感知的数学, 而把数学描述成推理的音乐? 它们的灵魂是相同的!"[10]

许多音乐家也都认为音乐与数学关系密切. 法国印象主义作曲家德彪西[11]曾经说过: "音乐是声音的算术, 就像光学是光线的几何." 在被问及 "你是否认为音乐的形式多少有些像数学?" 的问题时, 俄罗斯作曲家斯特拉文斯基[12]回答说: "与文学相比, 音乐无论如何都更接近于数学——也许不是数学本身, 但肯定接近于像数学思维和数学关系之类的东西[13]."

二

北京大学具有良好的美育传统. 老校长蔡元培[14]一贯重视美育, 早在 1912 年在其《对于新教育之意见》中, 就提倡在学校推行美育 ("美感教育"). 1916 年蔡元培出任北京大学校长后, 非常重视音乐教育. 他指出: "中国人是最看重音乐的, 两千年前, 把乐与礼、射、御、书、数并列为六艺, 把乐经与易、诗、书、礼、春秋, 并列为六经."[15] 在蔡先生长校期间, 成立了 "北京大学音乐团", 并于 1919 年改组为 "北京大学音乐研究会", 他亲自担任会长. 1920 年, 北京大学音乐研究会创办《音乐杂志》, 发行量曾经达到一千多份. 他还聘请王心葵[16]、英国小提琴家纽伦、音乐理论家陈仲子 (陈蒙) 等作为研究

[6]莱布尼茨 (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646—1716), 德国数学家、哲学家、科学家和历史学家.

[7]哥德巴赫 (Christian Goldbach, 1690—1764), 普鲁士数学家.

[8]The pleasure we obtain from music comes from counting, but counting unconsciously. Music is nothing but unconscious arithmetic.

[9]西尔维斯特 (James Joseph Sylvester, 1814—1897), 英国数学家.

[10]May not Music be described as the Mathematic of sense, Mathematic as the Music of reason? The soul of each the same! ([72, p.613])

[11]德彪西 (Claude-Achille Debussy, 1862—1918), 法国作曲家.

[12]斯特拉文斯基 (И́горь Фёдрович Страви́нский, Stravinsky, 1882—1971), 俄罗斯作曲家、钢琴家、指挥家.

[13]It is, at any rate, far closer to mathematics than to literature–not perhaps to mathematics itself, but certainly to something like mathematical thinking and mathematical relationships. ([71, p.17])

[14]蔡元培 (1868—1940), 字鹤卿, 号孑民, 浙江绍兴人, 近代革命家、教育家、政治家.

[15]《王光祈追悼会致词》, 文献 [24] 第八卷第 284 页.

[16]王心葵 (1878—1921), 名露, 字心葵, 号雨帆, 山东诸城人, 音乐家, 古琴、琵琶演奏家.

会的导师. 后来又聘请萧友梅[17]、刘天华[18]等著名音乐家到北京大学授课和指导学生的艺术活动. 1922 年 8 月, 经萧友梅提议, “北京大学音乐研究会” 改组为 “北京大学音乐传习所”, 由蔡元培任所长. 该所简章提出: “以养成乐学人才为宗旨, 一面传习西洋音乐(包括理论与技术), 一面保存中国古乐, 发扬而光大之.”

今天, 北京大学以培养能够引领未来的人才, 产生和创造能够推动国家和人类进步的新思想、前沿科学和未来技术, 为社会发展提供强有力的学术和人才支撑为自己的神圣使命. 正是基于这样的使命自觉, 北京大学一直把艺术和美学教育作为学生基础素质课程的重要内容.

作为北京大学通识教育核心课程, “音乐与数学” 这样一门跨学科的全校通选课就是在这个大背景下逐步酝酿产生的. 该课程希望通过介绍音乐与数学 (也包括一些声学方面的知识) 之间密不可分却又往往不为常人所知的关系, 以期探讨音乐这门抽象的艺术与数学和自然科学之间的互动, 比较它们的思想方法之异同, 打通文理界限, 提高学生的艺术修养和分析能力, 最终达到提高学生综合素养的目的. 也正是出于这样的考虑, 在课程设计方面并不要求听课的学生具有音乐或者数学方面的先修课程, 而是随着教学的进程陆续介绍一些与课程内容有直接关联的音乐理论知识和数学知识.

本书缘起于为 “音乐与数学” 这门课程编写讲义, 因此从介绍一些基本的音乐知识开始. 在数学方面, 只假定读者具有高中数学的知识水平. 对于需要用到的几何、组合计数等方面的知识都尽量做了比较详细、直观的介绍. 为了既保持叙述的连贯性, 又保持数学逻辑的完整性, 我们把作为现代音乐理论基础的集合理论及其相关的基础知识集中起来作为附录 A; 同时, 为了提供音乐变换理论所需要的群论工具, 单独写了附录 B, 集中介绍群论的基本概念以及与本书内容相关的定理和方法等, 以供读者随时查询. 至于振动方程方面的内容, 固然是泛音列等声学现象产生的理论基础, 但是对于不熟悉的读者而言完全可以略过, 并不会影响阅读书中的其他部分. 如果读者学过高等数学, 肯定会对阅读和理解有所帮助. 但即便是没有学过高等数学的读者, 也肯定能够通过本书了解音乐与数学之间的密切联系以及相关的一些数学思想和方法. 实际上, 音乐理论中比较艰深的部分, 如律学、和弦等, 对应的数学知识并不复杂, 主要是比例 (分数)、对数等. 而像振动方程的解、傅里叶级数等数学内容, 对应的音乐现象反倒是比较容易理解的, 例如泛音列、音色、音高与弦长之间的关系等.

本书的撰写过程也是作者比较系统地学习现代音乐与数学理论的过程. 自 20 世纪 70 年代以来, 数学的理论框架和分析工具在音乐研究中得到了广泛而深刻的应用, 这从

[17]萧友梅 (1884—1940), 字思鹤, 又字雪明, 广东香山县 (今属中山市) 人, 音乐教育家、作曲家.

[18]刘天华 (1895—1932), 江苏江阴 (今属张家港市) 人, 作曲家、演奏家、音乐教育家. 诗人刘半农之弟, 音乐家刘北茂之兄.

书后所列出的中外参考文献中最近十几年的研究论文和专著就可以窥豹一斑. 作者试图在适当的范围内对音乐与数学方面的一些新方法、新工具有所介绍, 但这也使得本书超出了原先仅仅作为通选课教材的编写计划, 可以作为了解现代音乐与数学理论研究的一本入门书. 事实上, 在第五、六、七章中, 我们用相当的篇幅介绍了现代音乐理论中的音类集合 (pitch class set)、广义音程 (generalized interval) 和变换 (transformation) 等方面的内容. 另外, 本书没有涉及电子音乐等包含人工合成声音效果的作品. 即使讨论了利用随机方法、人工智能等技术, 借助计算机进行辅助创作, 其最终产生的作品仍然是由传统乐队演奏的.

全书内容大致可以分成三部分. 第一部分包括前三章, 从介绍音乐的一些基本知识开始, 进而通过弦的振动方程介绍泛音列的生成、梅森[19]定律等, 然后介绍律学. 这部分内容是介绍音乐与数学之间关系时总会讲到的比较传统的内容. 第二部分就是第四章, 介绍了一些重要的音乐概念: 调式、音阶、和弦及其进行等, 基本上属于音乐基础理论, 没有涉及数学. 然而, 这一章是承前启后的, 它为后面的章节打下了基础. 第五 ~ 八章属于第三部分, 分别介绍了如何用数学方法来分析和理解音乐的三大要素: 旋律、节奏、和声, 以及非确定性在音乐理论和实践中的作用. 全书各章之间的逻辑关系大致如图 2 所示.

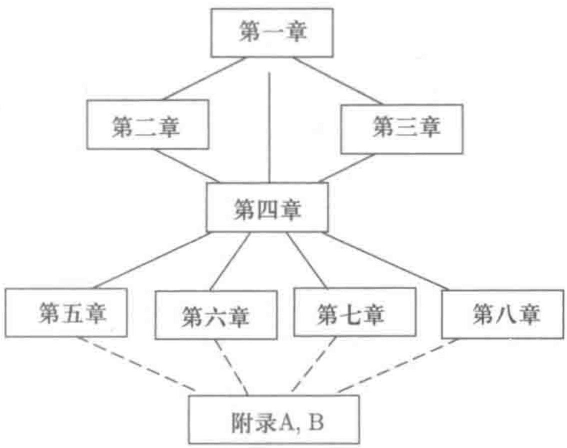

图 2　全书各章逻辑关系

从图 2 可以看出, 本书的各章之间在逻辑上并不形成严格的线性关系. 这意味着读者完全不必按照章节的排列顺序阅读, 而是可以跳过某些章节, 直接去阅读自己感兴趣的内容.

[19]梅森 (Marin Mersenne, 1588—1648), 法国神学家、哲学家、数学家、音乐理论家. 梅森素数 $M_n = 2^n - 1$ 由其得名.

书中有一些数学定理给出了证明. 我们沿用通常教科书的惯例, 用符号 □ 表示一个证明的结束. 书中安排了一些习题, 其中一部分是帮助读者加深理解相关知识的练习, 另一部分是对正文内容的进一步推广, 还有一部分则是引发读者进一步思考的问题.

本书可作为高等院校素质教育课程、通识教育同类课程的教材或者教学参考书, 也可供音乐、数学等领域的研究者参考. 推而广之, 对音乐与数学之间关系感兴趣的广大读者都可以把本书作为音乐与数学方面的入门导引.

在本书的编写过程中, 我们参考了一些相关题材的专著和教科书, 主要包括 [32, 49, 69, 73, 76, 77] 以及 [27]. 在音乐理论方面, 我们主要参考了 [10, 12, 13, 33, 56] 以及工具书 [25, 26, 31, 55, 67] 等. 书中音乐家的生卒年份等资料多数来源于百度和维基百科 (wikipedia.org) 等网上资源, 谱例则大多是根据 IMSLP (The International Music Score Library Project, imslp.org) 收集的公共领域资料重新排版生成的. 特此说明.

本书作者长期从事数学理论和应用方面的教学、研究工作, 在音乐理论方面只能算是一个业余爱好者, 因此书中肯定会有不少疏漏不周乃至错误的地方, 恳请专家学者和广大读者朋友不吝赐教.

衷心感谢参与“音乐与数学”课程建设的北京大学艺术学院毕明辉教授和助教团队的各位同学, 感谢历年来参与这门课程的所有热情听众, 他们对本书的选材、表述、习题等方面都提出了许多宝贵的意见和建议, 也帮助作者纠正了一些错误和疏漏. 在此我还要特别感谢北京大学出版社的曾琬婷女士. 由于书中涉及音乐和数学两个很不相同的专业领域, 使得她在本书的编辑、校对、出版过程中付出了比一般数学书籍多得多的额外辛劳.

王　杰

2018 年 8 月

目　　录

第一章　音乐基础知识

§1.1　声　　音

声音 (sound) 是音乐的载体. 要了解音乐, 就需要了解声音的基本性质以及我们是如何感受声音的.

声音是由振动产生的. 振动的弦引起周围空气的疏密变化, 就形成声波 (参见图 1.1). 声波是**纵波** (longitudinal wave).

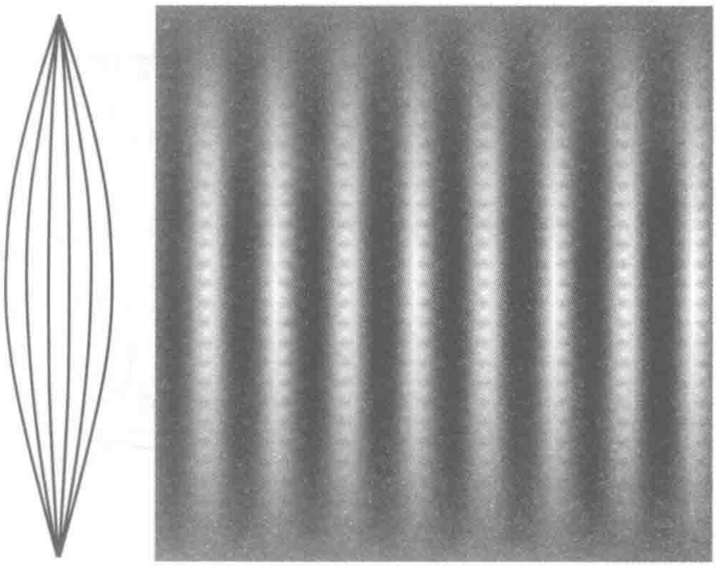

图 1.1　振动的弦产生的空气中的纵波

声音的**物理属性**主要有四个:

(1) 声音的高低是由振动频率决定的, 对应于音乐中的**音高** (pitch);

(2) 声音的强弱是由空气压力决定的, 对应于音乐中的**力度** (dynamics);

(3) 声音持续的长度, 对应于音乐中的**时值** (duration);

(4) 不同声音的特点是由其振动频谱决定的, 对应于音乐中的**音色** (timbre).

通常人耳能够听见的声音, 其振动频率范围为 20 ~ 20 000 Hz (赫兹[1]). 中央 C 上方的 A 定义为 440 Hz, 即每秒振动 440 次, 称为**音乐会音高** (concert pitch).

在国际单位制中, 压力的单位是帕斯卡[2] (pascal, Pa):

$$1\ \mathrm{Pa} = 1\ \mathrm{N/m^2} = 1\ \mathrm{kg/(m \cdot s^2)}.$$

人耳对于空气压力的感觉是非常灵敏的. 在 1 000 Hz 下, 人耳听觉的下限是 20 μPa (即 2×10^{-5} Pa). 根据维基百科的说法, 这相当于一只蚊子在 3 m 远处飞所发出的声音大小.

人耳对于声音强弱的感觉并不是线性的. 为了引进合适的度量方式, 我们先复习指数函数和对数函数.

指数函数 (exponential function) 定义为

$$y = a^x,$$

其中常数 a 满足 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 称为**指数函数的底**. 图 1.2 给出了 $a = 2$ 和 $a = 1/2$ 的指数函数的图像.

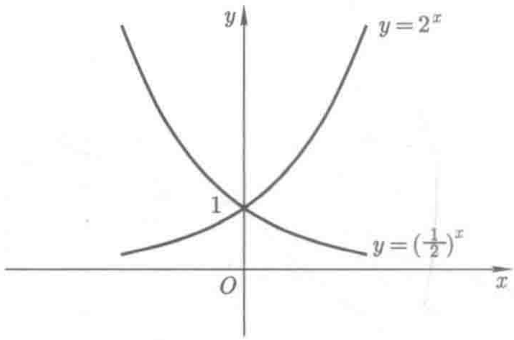

图 1.2 指数函数

对数函数 (logarithmic function) 是指数函数的反函数. 如果 $y = a^x$, 则称 x 是以 a 为底的 y 的对数, 记作

$$x = \log_a y,$$

其中常数 a 称为对数的**底**, y 称为**真数**. 与指数函数一样, 这里同样要求 $a > 0$ 且 $a \neq 1$. 图 1.3 给出了底为 2 和 1/2 的对数函数的图像.

[1]赫兹 (Heinrich Rudolf Hertz, 1857—1894), 德国物理学家.

[2]帕斯卡 (Blaise Pascal, 1623—1662), 法国数学家、物理学家.

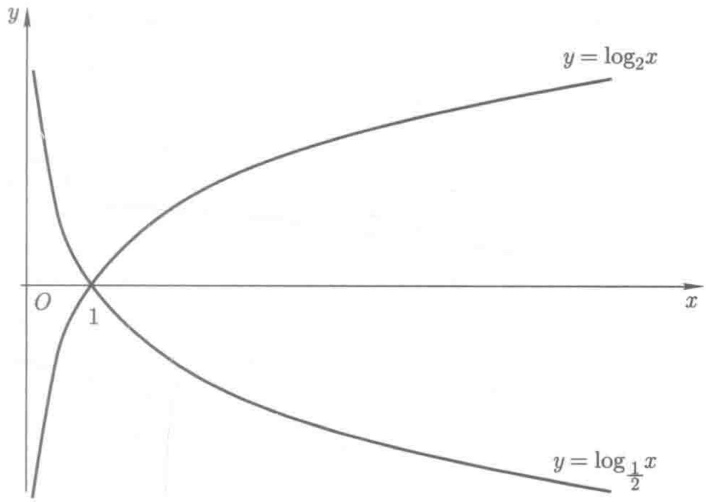

图 1.3 对数函数

对数函数有如下基本性质:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

假设常数 b 也满足 $b>0$ 且 $b \neq 1$, 则有对数函数的**换底公式**

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

例 1.1.1 已知 $\log_{10} 2 = 0.301$, 求 $\log_2 100$.

解 根据换底公式, 有

$$\log_2 100 = \frac{\log_{10} 100}{\log_{10} 2},$$

而根据对数函数的定义, 有 $\log_{10} 100 = 2$, 所以

$$\log_2 100 = \frac{2}{0.301} \approx 6.644\ 5.$$

习题 1.1.2 根据定义计算下列对数:

(1) $\log_{10} 1\ 000\ 000$; (2) $\log_3 243$; (3) $\log_2 \dfrac{1}{64}$; (4) $\log_2 128$;

(5) $\log_{10} 1$; (6) $\log_{10} 0.000\ 01$; (7) $\log_4 1\ 024$; (8) $\log_6 \dfrac{1}{36}$;

(9) $\log_4 32$; (10) $\log_{36} 6$.

在声学中, 用**声压水平** (sound pressure level, SPL) 来度量声音的强弱, 定义为

$$L_p = 20\log_{10}\frac{p}{p_0},$$

其中 p_0 是听觉下限阈值 20 μPa, p 是实际声压. 这样定义的声压水平, 其单位是**分贝** (decibel, dB). 表 1.1 中列出了不同场景下的一些声压水平.

表 1.1 声压水平

场景	距离	声压水平/dB
非常安静的房间	周围	20 ~ 30
正常谈话	1 m	40 ~ 60
公共汽车	10 m	60 ~ 80
油锯	1 m	110
小号	0.5 m	130
最响的人声	0.25 m	135
疼痛阈值	耳边	130 ~ 140
喷气飞机引擎	100 m	110 ~ 140
7.62 mm 口径步枪	距射手 1 m	150 ~ 170

需要指出的是, 人耳对于不同频率的声音有着不同的听觉下限阈值 (参见图 1.4). 一般而言, 人耳的听觉对于低频声音的响应是比较差的, 而对于 3 000 ~ 4 000 Hz 的高频声音, 人耳的听觉下限阈值可以低至 −6 dB. 基于这个事实, 现代音响设备中都有**频率均**

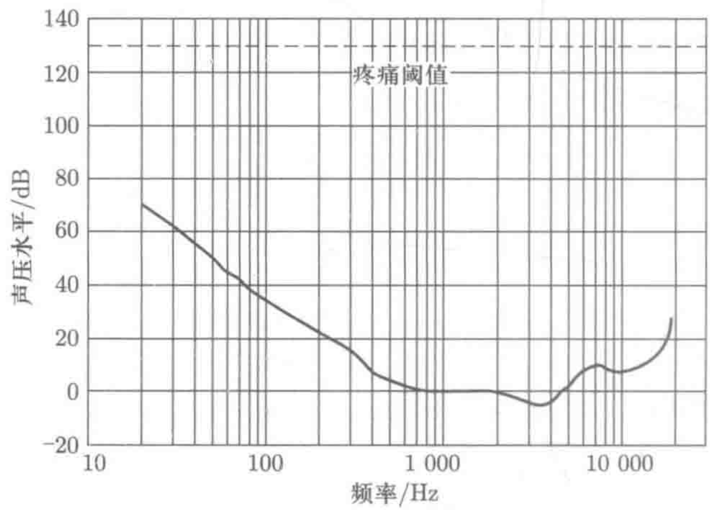

图 1.4 不同频率的听觉下限阈值

衡器 (frequency equalizer), 其最基本的功能是可以分频段调节设备的频率响应水平. 例如, 适当提高设备在低频段和高频段的频率响应, 就可以在一定程度上补偿人耳对频率响应的不均匀性. 频率均衡器的另一个重要功能是补偿音响系统本身对频率响应的不均衡性, 使得系统能够更好地还原演出现场的效果.

声压水平是声压比的对数函数. 假设声音的强度从 10 dB 变到 100 dB, 两者相差 10 倍. 记 10 dB 时的声压为 p_1, 100 dB 时的声压为 p_2, 1000 Hz 时的听觉下限阈值为 $p_0 = 20\ \mu\text{Pa}$, 则有

$$20\log_{10}\frac{p_1}{p_0} = 10, \qquad 20\log_{10}\frac{p_2}{p_0} = 100.$$

根据对数函数的性质, 我们有

$$\log_{10} p_1 - \log_{10} p_0 = 0.5, \quad \log_{10} p_2 - \log_{10} p_0 = 5,$$

由此得出 $\log_{10}(p_2/p_1) = \log_{10} p_2 - \log_{10} p_1 = 4.5$. 这说明 p_2 与 p_1 之比为

$$\frac{p_2}{p_1} = 10^{4.5} \approx 31\ 623.$$

换言之, 声音的强度增加了十倍, 实际的声压增加了三万多倍. 这反映了人耳听觉的实际情况——对于声音强度的感受能力呈对数曲线. 这个事实的一个应用是: 在音响设备中, 音量调节模块的变化不能设计成线性的, 而需要设计成指数型的, 以补偿听觉的对数特性, 使得音量调节的实际效果呈现线性关系.

习题 1.1.3 *在距离声源一定距离处测得其声压水平为 30 dB. 提高声源强度后, 在同一地点测得其声压增加了一倍, 问: 现在的声压水平是多少分贝? (已知 $\log_{10}2 \approx 0.301$, 结果精确到两位小数.)*

五线谱是目前世界上通行的一种记谱方法. 在五线谱中, 用不同的音符表示乐音持续的不同长度. 图 1.5 给出了不同音符的名称. 音符所代表的时值是一个相对长度. 例如, 假定以四分音符的时值为 1 拍, 则一个全音符的时值为 4 拍, 一个二分音符的时值为 2 拍, 一个八分音符的时值为 1/2 拍, 一个十六分音符的时值为 1/4 拍.

图 1.5 不同的音符及其名称

不同的乐器能够发出不同的声响. 即使演奏同一个音符, 人们也能够辨别出是钢琴、