

解析数学讲义

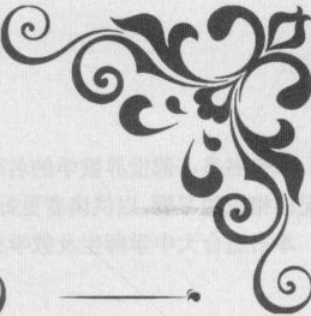
(第二卷, 关于几何的应用)

(法)古尔萨(Goursat Edvard) 著

王尚济 译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



解析数学讲义

(第二卷, 关于几何的应用)



(法)古尔萨(Goursat Edvard) 著

王尚济 译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



内 容 简 介

本书是一部世界数学的名著,共分三卷,该书为第二卷,主要介绍了关于几何的应用等相关内容,同时配以相应的习题,以供读者更好的理解。

本书适合大中学师生及数学爱好者参考阅读。

图书在版编目(CIP)数据

解析数学讲义. 第二卷,关于几何的应用/(法)
古尔萨(Goursat Edvard)著;王尚济译. —哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社,2019.4
ISBN 978-7-5603-5147-6

I. ①解… II. ①古…②王… III. ①高等数学-
教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 038434 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 杜莹雪
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 牡丹江邮电印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 16.25 字数 166 千字
版 次 2019 年 4 月第 1 版 2019 年 4 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-5147-6
定 价 68.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)



目 錄

第 十 章

包 封 論.——接 觸.

I.	包封曲線及包封曲面	1
198.	包封的求法	1
199.	一個直線的包封	6
200.	一個圓的包封	8
201.	具有一個變率的曲面	11
202.	具有兩個變率的曲面	12
203.	能展曲面	13
204.	能展曲面的微分方程式	16
205.	一類的空間曲線的包封	17
II.	兩個曲線的接觸及一個曲線和一個曲面的接觸	21
206.	兩個平曲線的接觸	21
207.	接觸的級數	23
208.	吻合曲線	26
209.	吻合曲線的性質	28
210.	兩個空間曲線的接觸	30
211.	吻合曲線	33
212.	一個曲線及一個曲面的接觸	34
213.	一個曲面的吻合直線	37

習題	38
註	40

第 十 一 章

空 間 曲 線

I. 吻合平面	42
214. 定義及方程式	42
215. 停留的吻合平面	44
216. 停留的切線	45
II. 曲度及旁曲度	50
217. 球面指線	50
218. 曲度半徑	51
219. 主法線, 曲度心	52
220. 極直線及極曲面	55
221. 旁曲度	56
222. 福爾內的公式	60
223. x, y, z 依 s 的幕的展開式	62
224. 自方程式	66
225. 伸開線及閉縮線	68
226. 螺旋線	71
227. 彼得郎的曲線	74
228. 吻合球面	77

III. 直線組的概要	78
229. 直線曲面	78
230. 直線的相合組,焦點曲面	84
231. 法線的相合組	87
232. 複合組	90
習題	94
註	98

第十二章

曲面

I. 畫在一個曲面上的曲線的曲度	100
233. 基本公式,莫尼葉的定理	100
234. 兩個基本形式	107
235. 尤列的定理,指曲線	109
236. 主曲度半徑	113
II. 漸近曲線曲度線	118
237. 漸近曲線	118
238. 直線曲面的漸近曲線	121
239. 共軛曲線	123
240. 曲度曲線	126
241. 一個曲面的閉縮曲面	132
242. 阿蘭德羅德利克的公式	135

243. 若瑟斯達的定理	137
244. 杜班的定理	139
245. 量地線	141
246. 應用在幾類的曲面上	143
III. 兩個平面上的點的相應	147
247. 球面表示法	147
248. 能合曲面	151
249. 能合於一個平面的曲面	155
350. 量地曲度量地線	158
251. 全曲度高斯的定理	163
252. 同形變形法	165
253. 一個平面在一個平面上的同形表示	169
254. 地圖	170
習題	174
註	182
附記.關於有定積分的微分法的公式	184
編輯手記	207

第十章

包封論。——接觸。

在純正幾何上所研究的曲線及曲面都是些解析曲線及解析曲面。但是我們所將定出的幾何原素 (élément géométrique) 其存在只須假定若干級的導來式是存在的。譬如一個平曲線為方程式 $y=f(x)$ 所表，若函數 $f(x)$ 有一個導來式 $f'(x)$ ，則曲線有一個切線；若導來式 $f'(x)$ 也有一個導來式 $f''(x)$ ，則曲線有一個曲度半徑 (rayon de courbure) 如此遞推。

1. 包封曲線及包封曲面。

198. 包封的求法。——設有一個平曲線 C 關係一個變率 a ，其方程式是

$$(1) \quad f(x, y, a) = 0;$$

在一般場合，若令 a 變化，此曲線以連續的狀態變化形狀及位置。若是這一切的曲線 C 都切於一個定曲線 E ，此曲線 E 叫作這些曲線 C 的包封 (enveloppe)，這些曲線 C 叫作被封 (enveloppée)。假定已知曲線 C ，我們試求辨認牠們是否有一個包封存在，並定出此包封。

假定此包封 E 是存在的，對於變率的一個價值 a ，有一個被封曲線 C 相應，設 (x, y) 是包封 E 和此被封 C 的接觸點 M 的坐標。這兩個坐標 x, y 都是變率 a 的未知函數，牠們滿足方程式 (1)。若要完全定出這兩個函數，必須說明在 a 變化時， M 點所畫的曲線的切線合於曲線 C 的切線，我們用 δx 及 δy 表被封曲線的切線的

方向率 (paramètre directeur), 用 $\frac{dx}{da}$ 及 $\frac{dy}{da}$ 表未知函數 $x=\varphi(a)$, $y=\psi(a)$ 的導來式; 我們當有

$$(2) \quad \frac{\frac{dx}{da}}{\frac{dy}{da}} = \frac{dx}{dy}.$$

但是曲線 C 為方程式 (1) 所表, 在其中 a 有一個固定價值, 我當有關係式

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y = 0,$$

牠定出此曲線的切線, 他一方面, 未知函數 $x=\varphi(a)$, $y=\psi(a)$ 也當滿足關係式

$$f(x, y, a) = 0,$$

現在 a 是自變數, 我們又當有

$$(4) \quad \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{da} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{da} + \frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

由關係式 (3) 及 (4), 條件方程式 (2) 成為

$$(5) \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0;$$

此方程式連同關係式 (1) 定出此兩個未知函數 $x=\varphi(a)$, $y=\psi(a)$. 那麼, 如果包封是存在的, 在方程式 $f=0$ 及 $\frac{\partial f}{\partial a}=0$ 中消去變率 a 即得包封的方程式.

設 $R(x, y)=0$ 是消去 a 所得的結果; 我們再考慮此曲線是否表一個包封. 設 C_0 是和變率的價值 a_0 相應的特別曲線, (x_0, y_0) 是二曲線

(6)

$$f(x, y, a_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a_0} = 0$$

的交點 M_0 的坐標; 方程式(1)及(5)定出兩個函數 $x = \varphi(a), y = \psi(a)$, 對於 $a = a_0$, 牠們各成爲 x_0, y_0 , 顯然可見我們有

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} \left(\frac{dx}{da} \right)_0 + \frac{\partial f}{\partial y_0} \left(\frac{dy}{da} \right)_0 = 0;$$

所以只要不同時得到 $\frac{\partial f}{\partial x_0} = 0, \frac{\partial f}{\partial y_0} = 0$, 就是說只要 (x_0, y_0) 點不是曲線 C_0 上的一個奇點, 在上的關係式和關係式(3)合而觀之, 可見在 (x_0, y_0) 點, 曲線 C_0 的切線和 (x, y) 點所畫的切線相合. 所以 方程式 $R(x, y) = 0$ 或是表一切的曲線 C 的包封, 或是表牠們的奇點的軌迹.

這個結果仍當加以補充; 若曲線 C 中每一個都有一個或數個奇點, 這些奇點的軌迹必包在曲線 $R(x, y) = 0$ 以內. 誠然, 設 (x, y) 是奇點中的一個坐標, x 及 y 都是 a 的函數, 牠們同時滿足三個關係式

$$f(x, y, a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

所以也必能滿足關係式 $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$; 那麼, x 及 y 必能滿足方程式

$$R = 0. \text{ 牠是由關係式 } f = 0, \frac{\partial f}{\partial a} = 0 \text{ 消去 } a \text{ 得來的. 在最普通的場}$$

合, 曲線 $R = 0$ 在解析上爲各別的兩部分所成, 一部分是真正的包封, 他一部分是奇點的軌迹.

例.—設 $f(x, y, a) = y^4 - y^2 + (x - a)^2 = 0$; 我們有 $\frac{\partial f}{\partial a} = -2(x - a)$,

在 $f=0$ 及 $\frac{\partial f}{\partial a}=0$ 中消去 a , 得方程式 $y^4-y^2=0$, 牠表三個直線 $y=0, y=+1, y=-1$. 所設曲線均是由曲線 $y^4-y^2+x^2=0$ 平行於 ox 軸移動得來; 但是此曲線有一個二重點在原點, 又在和 y 軸的交點上切於二直線 $y=\pm 1$. 所以直線 $y=0$ 是二重點的軌迹, 直線 $y=\pm 1$ 成爲真正的包封.

在曲線 C 有一個包封 E 時, 一個曲線 C 和包封的接觸點都是此一個曲線和其同類中相鄰曲線的交點的極限位置. 誠然, 設

$$(7) \quad f(x, y, a)=0, \quad f(x, y, a+h)=0$$

是兩個相鄰曲線的方程式; 此兩個方程式定出此二曲線的公點的坐標, 牠們顯然可代以同值方程式

$$(7') \quad f(x, y, a)=0, \quad \frac{f(x, y, a+h)-f(x, y, a)}{h}=0,$$

在 h 漸近於零時, 就是說第二曲線和第一曲線無限相近時, 第二方程式成爲 $\frac{\partial f}{\partial a}=0$. [註一] 這個性質在幾何上差不多是極明瞭的; 誠然, 由圖 32(a) 可見兩個相鄰曲線 C, C' 有一個交點 N , 在第二

Fig. 32 a.

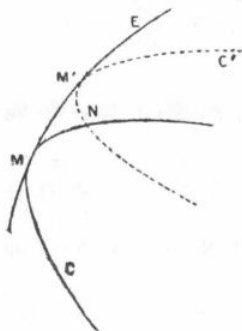
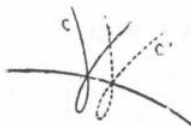


Fig. 32 b.



曲線 C' 來合於曲線 C 時, 此點 N 來合於接觸點 M . 同樣, 在圖 32(b)

可見若曲線 (1) 有一個二重點, 在 C' 來合於 C 時, C 及 C' 的交點中有一個來合於二重點.

以上的注意表明爲何我們同時得着包封及奇點的軌迹, 爲確定人的觀念, 假定 $f(x, y, a)$ 關於 a 是 m 次的多項式, 對於平面中任意一點 M_0 坐標是 (x_0, y_0) , 方程式

$$(8) \quad f(x_0, y_0, a) = 0$$

普通的有 m 個根; 那麼, 此同類曲線中有 m 個各別曲線經過此點, 但是若是 M_0 點在曲線 $R(x, y) = 0$ 上, 對於 a 的一個價值, 我們同時有

$$f(x_0, y_0, a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0,$$

方程式 (8) 有一個二重點, 所以我們可以說曲線 $R(x, y) = 0$ 是平面上諸點的軌迹, 對於這些點, 曲線 (1) 中經過這些點的有兩個相合, 圖 32(a) 及 32(b) 正是顯明一點來近於包封上一點時或來近於奇點的軌迹上一點時, 經過此點的曲線 C 有兩個彼此相差極少, 在極限上彼此相合.

注意, 一有時我們所要求包封的這些曲線其方程式

$$(9) \quad F(x, y, a, b) = 0$$

含有兩個變率 a 及 b , 其間有一個關係式 $\varphi(a, b) = 0$. 這個場合並不各別於普通場合, 因爲由關係式 $\varphi = 0$ 我們能將 b 看作 a 的函數, 依以前的定規, 必須在方程式 (9) 上加以關於 a 的導來式等於零

$$\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b} \frac{db}{da} = 0;$$

但是由關係式 $\varphi(a, b) = 0$, 得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \frac{db}{da} = 0,$$

消去 $\frac{db}{da}$, 以上的公式成為

$$(10) \quad \frac{\partial F}{\partial a} \frac{\partial \varphi}{\partial b} - \frac{\partial F}{\partial b} \frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0.$$

所以在方程式 $F=0$, $\varphi=0$ 及方程式(10)間消去 a 及 b , 即得包封的方程式.

199. 一個直線的包封.——取一個直線 D 其方程式是法線形狀 (forme normale)

$$(11) \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha - f(\alpha) = 0,$$

變率是 α 角. 關於此變率取導來式, 得

$$(12) \quad -x \sin \alpha + y \cos \alpha - f'(\alpha) = 0;$$

自(11), (12)兩方程式得動直線和其包封的接觸點的坐標,

$$(13) \quad \begin{cases} x = f'(\alpha) \cos \alpha - f''(\alpha) \sin \alpha, \\ y = f'(\alpha) \sin \alpha + f''(\alpha) \cos \alpha. \end{cases}$$

很容易驗明此點 (x, y) 所畫曲線 E 的切線是直線 D ; 誠然, 自方程式(13)得

$$(14) \quad \begin{cases} dx = -[f'(\alpha) + f''(\alpha)] \sin \alpha d\alpha, \\ dy = -[f'(\alpha) + f''(\alpha)] \cos \alpha d\alpha, \end{cases}$$

可見切線的角係數是 $-\cot \alpha$. 這正是直線 D 的角係數. 自方程式(14)又得

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \pm [f'(\alpha) + f''(\alpha)] d\alpha,$$

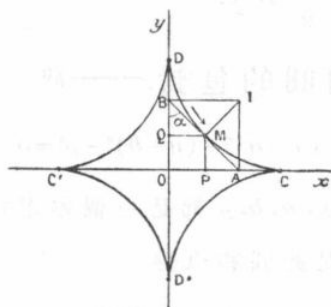
s 是包封曲線的弧, 因得

$$s = \pm \left[\int f'(\alpha) d\alpha + f'(\alpha) \right];$$

所以欲得一個能直曲線, 只須取一個已知函數的導來式為 $f'(\alpha)$ (註二).

譬如取 $f'(\alpha) = l \sin \alpha \cos \alpha$; 在方程式 (11) 中逐漸令 $y=0$ 及 $x=0$, 得 $OA = l \sin \alpha$, $OB = l \cos \alpha$ (圖33), 結果 $AB = l$. 所以所求曲線是一個直線的包封, 此直線的長為定數 l , 兩端

Fig. 33.



在兩個直交直線上, 現在公式 (13) 成為

$$x = l \sin^3 \alpha, \quad y = l \cos^3 \alpha.$$

包封的方程式是

$$\left(\frac{x}{l} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{l} \right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

這是一個過擺線 (hypocycloïde) 有四個逆退點, 其形狀如圖所示. 在 α 由 0 變至 $\frac{\pi}{2}$, 接觸點畫出 DC 弧, 由 D 點起, 弧的長度的算式是

$$s = \int_0^{\alpha} 3l \sin \alpha \cos \alpha d\alpha = \frac{3l}{2} \sin^2 \alpha.$$

設 I 是在 oA 及 oB 上所建矩形的頂點, M 是從 I 點向 AB 所引垂線的足; 三角形 AMT , APM 給與

$$AM = AI \cos \alpha = l \cos^2 \alpha, \quad AP = AM \sin \alpha = l \cos^2 \alpha \sin \alpha$$

因而 $OP = OA - AP = l \sin^2 \alpha$, 所以 M 點是直線 AB 和牠的包封的接觸點。又因

$$BM=l-A M=l\sin^2\alpha.$$

結果 弧 $DM = \frac{3}{2} BM$.

200. 一個圓的包封.——設

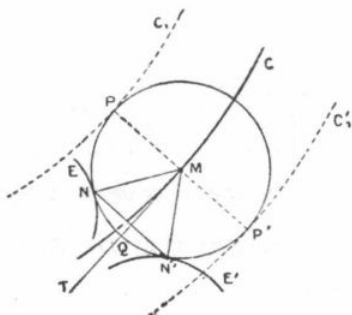
$$(15) \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 - \rho^2 = 0$$

是一個圓的方程式, a, b, ρ 都是一個變率 t 的函數. 此圓和其包封的接觸點都是此圓和直線

$$(16) \quad (x-a)a' + (y-b)b' + \rho\rho' = 0$$

的交點，此直線垂直於圓心 (a, b) 所畫曲線 C 的切線，其至圓

Fig. 34.



心的距離等於 $\rho \frac{d\rho}{ds}$ 是 s 曲線 C 的弧, 此直線割此圓於兩點 N, N' 關於切線 MT 爲對稱 (圖34); 所以包封由兩枝曲線 E, E' 所成, 一般的此兩枝曲線在解析上不是各別的, 有許多特別場合可以注意:

1° 若 ρ 是常數, 接觸弦 (corde des contacts) NN' 成爲法線 PT' , 包封由兩個平行曲線 C_1, C_1' 所成, 此二曲線是在曲線 C 的法線自 M 點的兩邊各取一個定長 ρ 得來;

2° 若是 $\rho = s + C$, 則 $\rho \frac{d\rho}{ds} = \rho$, 弦 NN' 成爲圓在 Q 點的切線, 包封的兩枝相合, 此包封 I 以曲線 C 的切線爲法線; C 叫作 I 的閉縮線, 反之 I 叫作 C 的伸開線. 若 $d\rho > ds$, 直線 (16) 和圓不相交, 包封成爲虛幻.

第二勾斯迪克 (Caustique secondaire).—假定動圓的半徑比例於圓心至一定點 O 的距離, 若取此定點爲原點, 則圓的方程式是

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = k^2(a^2 + b^2)$$

k 是一個常數因數, 接觸弦的方程式是

$$(x-a)a' + (y-b)b' + k^2(aa' + bb') = 0.$$

設 δ 及 δ' 是圓心 $M(a, b)$ 至接觸弦及至經過原點而平行於接觸弦之直線的距離, 自以上的方程式得 $\delta = k^2\delta'$. 所以自帶徑 MO 上取一點 P 使 $MP = k^2MO$, 再自 P 點引直線垂直於圓心的軌迹的切線即得接觸弦 (圖35). 假定 $K < 1$, 設 E 是圓的包封的一枝, 牠和定點 O 同居於曲線 C 的切線的一邊, 命 t 及 r