



中国科学院规划教材

可靠性理论中的 数学方法

艾尼·吾甫尔 著



科学出版社

中国科学院规划教材

可靠性理论中的数学方法

艾尼·吾甫尔 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书以简短的篇幅介绍建立可修复系统的数学模型及其研究的思想和方法。本书共分四章。第1章提供预备知识,第2章首先阐述可靠性数学的形成和发展,然后介绍描述产品可靠性的数量指标。第3章首先详细介绍马尔可夫型可修系统的一般模型并求可靠性指标的步骤,其次通过许多实际问题的讨论来介绍用一维马尔可夫过程建立数学模型的思想与过程,最后介绍通过数学模型求可靠性指标的方法。第4章首先介绍用补充变量方法建立数学模型的过程,然后介绍运用泛函分析的理论与方法对该数学模型进行动态分析的思想。

本书可作为运筹学专业、系统科学专业及泛函分析专业的研究生教材,也可作为有关专业教师或科技工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

可靠性理论中的数学方法/艾尼·吾甫尔著. —北京:科学出版社,2020.4
中国科学院规划教材

ISBN 978-7-03-064110-6

I. ①可… II. ①艾… III. ①可靠性理论-数学方法-高等学校-教材
IV. ①O213.2; TB114.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2020) 第 002738 号

责任编辑:方小丽/责任校对:彭珍珍
责任印制:张伟/封面设计:蓝正设计

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京虎彩文化传播有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2020年4月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2020年4月第一次印刷 印张:10 1/4

字数:240 000

定价:68.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

可靠性问题萌芽于 20 世纪 20 年代, 第二次世界大战期间受到了重视, 目前几乎每个国家都有可靠性方面的学术组织. 可靠性分为三类: 可靠性工程、操作分析及可靠性数学. 本书属于可靠性数学范畴. 本书的大部分内容于 2012 年 1 月由新疆大学出版社出版发行并作为教材供新疆大学数学与系统科学学院的高年级本科生及研究生使用. 本书根据作者教学中发现的一些问题并加上近年来取得的最新研究成果撰写而成.

本书的主要适用对象是高年级本科生及研究生. 所以, 本书的第 1 章介绍预备知识, 其中的定理几乎都没有提供证明, 只提供了参考资料. 第 2 章首先阐述可靠性数学的形成和发展, 然后介绍描述产品可靠性的数量指标. 第 3 章首先详细介绍马尔可夫型可修系统的一般模型及求可靠性指标的步骤, 其次通过许多实际问题的讨论来介绍用一维马尔可夫过程建立数学模型的思想与过程, 然后介绍通过数学模型求可靠性指标的方法. 第 4 章首先介绍用补充变量方法建立数学模型的过程, 然后介绍运用泛函分析的理论与方法对该数学模型进行动态分析的思想.

本书得到了国家自然科学基金 (基金号: 11961062) 与新疆维吾尔自治区重点学科“数学”的资助.

由于作者的时间及精力有限, 书中不足及疏漏之处在所难免, 欢迎读者批评指正.

艾尼·吾甫尔

新疆大学数学与系统科学学院

2020 年 3 月 15 日

目 录

第 1 章	预备知识	1
第 2 章	可靠性的数学理论	11
2.1	可靠性数学理论的背景	11
2.2	评定产品可靠性的数量指标	12
第 3 章	一维马尔可夫型可修系统的数学方法	17
3.1	马尔可夫型可修系统的一般模型	17
3.2	单部件可修系统	33
3.3	串联系统	38
3.4	并联系统	44
3.5	表决系统	59
3.6	冷储备系统	64
3.7	温储备系统	72
3.8	两个特殊系统	89
第 4 章	补充变量方法与泛函分析方法	98
4.1	由两个同型部件与一个修理设备构成的系统的数学模型	98
4.2	系统的可用度	109
4.3	泛函分析方法	114
参考文献		153
索引		155

第1章 预备知识

本章介绍本书中用到的概念、引理及定理, 没有提供引理与定理的证明过程, 但提供了参考文献, 对证明过程感兴趣的读者可查阅所提供的参考文献. 本章的主要内容取之于文献 [1].

以下的概念及结果参考了 Arendt 等^[2] 的研究成果.

定义 1.1 (拉普拉斯变换) 假设 $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{C}$. 称

$$f^*(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换.

$$\text{abs}(f) := \inf\{\Re s \mid f^*(s) \text{ 存在}\}$$

称为 f 的收敛横坐标 (abscissa of convergence). 这里 $\Re s$ 表示复数 s 的实部.

$$\omega(f) := \inf\left\{\omega \in \mathbb{R} \mid \sup_{t \geq 0} |e^{-\omega t} f(t)| < \infty\right\}$$

称为 f 的指数增长界 (exponential growth bound).

注解 1.1 不难验证

$$\text{abs}(f) \leq \text{abs}(|f|) \leq \omega(f)$$

定理 1.1 若 $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $\int_a^b f(x) dx < \infty$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, 那么当 $\Re s > \text{abs}(f)$ 时, $f^*(s)$ 收敛; 当 $\Re s < \text{abs}(f)$ 时, $f^*(s)$ 发散.

定理 1.2 (托贝尔定理) 若 $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 并且 $\text{abs}(f) < \infty$, λ 为有限数, 则

$$(1) \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lambda \iff \lim_{s \rightarrow 0+} s f^*(s) = \lambda;$$

$$(2) \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds = \lambda \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0+} s f^*(s) = \lambda.$$

以下内容从刘次华^[3] 的书中查到.

定义 1.2 若 n 维随机变量 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的联合概率密度函数为

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\mathbb{B}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-a)\mathbb{B}^{-1}(x-a)^T}$$

其中, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 是常向量, $\mathbb{B} = (b_{ij})_{n \times n}$ 是正定矩阵, $(x-a)^T$ 是 $(x-a)$ 的转置向量, 则称 X 为 n 维正态随机变量或服从 n 维正态分布, 记作 $X \sim N(a, \mathbb{B})$.

定义 1.3 设 Ω 为样本空间, $\mathfrak{S}$ 是 Ω 的所有子集构成的集合族, P 是定义在 $\mathfrak{S}$ 上的概率, 则称 $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ 为概率空间. $\mathbb{T}$ 是给定的数集, 若对每个 $t \in \mathbb{T}$, 有一个随机变量 $X(t, e)$ 与之对应, 则称随机变量族 $\{X(t, e) \mid t \in \mathbb{T}\}$ 是 $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ 上的随机过程, 简记为随机过程 $\{X(t) \mid t \in \mathbb{T}\}$. $\mathbb{T}$ 称为参数集.

定义 1.4 设 $\{X(t) | t \geq 0\}$ 是取值在 $\mathbb{E} = \{0, 1, \dots\}$ 或 $\mathbb{E} = \{0, 1, \dots, N\}$ 上的一个随机过程. 若对任意自然数 n 及任意 n 个时刻点 $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, 均有

$$\begin{aligned} & P\{X(t_n) = i_n | X(t_1) = i_1, X(t_2) = i_2, \dots, X(t_{n-1}) = i_{n-1}\} \\ &= P\{X(t_n) = i_n | X(t_{n-1}) = i_{n-1}\}, \quad i_1, i_2, \dots, i_n \in \mathbb{E} \end{aligned} \quad (1-1)$$

则称 $\{X(t) | t \geq 0\}$ 为离散状态空间 $\mathbb{E}$ 上的连续时间马尔可夫过程. 进一步, 若 $\mathbb{E}$ 是有限集 $\mathbb{E} = \{1, 2, \dots, N\}$, 则称 $\{X(t) | t \geq 0\}$ 为有限状态空间 $\mathbb{E}$ 上的连续时间马尔可夫过程. 又如果对于任意 $t, u \geq 0$, 均有

$$P\{X(t+u) = j | X(u) = i\} = P_{ij}(t), \quad i, j \in \mathbb{E} \quad (1-2)$$

与 u 无关, 那么称马尔可夫过程 $\{X(t) | t \geq 0\}$ 是时齐 (齐次) 的.

本书讨论的马尔可夫过程均假设是时齐 (齐次) 的. 对固定的 $i, j \in \mathbb{E}$, 函数 $P_{ij}(t)$ 称为转移概率函数. $\mathbb{P}(t) = (P_{ij}(t))$ 称为转移概率矩阵.

注解 1.2 公式 (1-1) 可解释为: 在给定时刻 t_{n-1} 过程 $\{X(t) | t \geq 0\}$ 处于某个状态的情况下, 过程在 t_{n-1} 以后发展的概率规律与过程在 t_{n-1} 以前的历史无关. 简单地说, 当给定过程现在所处的状态时, 过程将来发展的概率规律与此过程的历史无关. 公式 (1-2) 则表示马尔可夫转移概率仅与时差 t 有关, 而与起始时刻的位置 u 无关.

此外, 我们都假定马尔可夫过程 $\{X(t) | t \geq 0\}$ 的转移概率函数满足

$$\lim_{t \rightarrow 0} P_{ij}(t) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (1-3)$$

容易验证转移概率函数满足以下性质:

$$\begin{cases} P_{ij}(t) \geq 0, & t \geq 0 \\ \sum_{j \in \mathbb{E}} P_{ij}(t) = 1, & t \geq 0 \\ \sum_{k \in \mathbb{E}} P_{ik}(u) P_{kj}(v) = \sum_{k \in \mathbb{E}} P_{ik}(v) P_{kj}(u) = P_{ij}(u+v) \end{cases} \quad (1-4)$$

事实上, 由全概率公式, 有

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{E}} P_{ij}(t) &= \sum_{j \in \mathbb{E}} P\{X(t) = j | X(0) = i\} \\ &= P\left\{\bigcup_{j \in \mathbb{E}} X(t) = j \mid X(0) = i\right\} \\ &= P\{\Omega | X(0) = i\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

由条件概率公式, 有

$$P_{ij}(u+v) = P\{X(u+v) = j | X(0) = i\}$$

$$\begin{aligned}
&= P\{X(u+v) = j, \Omega \mid X(0) = i\} \\
&= P\left\{X(u+v) = j, \bigcup_{k \in \mathbb{E}} X(v) = k \mid X(0) = i\right\} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{E}} P\{X(u+v) = j, X(v) = k \mid X(0) = i\} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{E}} P\{X(u+v) = j \mid X(v) = k, X(0) = i\} \\
&\quad \times P\{X(v) = k \mid X(0) = i\} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{E}} P\{X(u+v) = j \mid X(v) = k\} \\
&\quad \times P\{X(v) = k \mid X(0) = i\} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{E}} P_{kj}(u) P_{ik}(v) = \sum_{k \in \mathbb{E}} P_{ik}(v) P_{kj}(u)
\end{aligned}$$

定理 1.3 设 $\{X(t) \mid t \geq 0\}$ 是在离散状态空间 $\mathbb{E}$ 上的齐次马尔可夫过程. 令

$$P_j(t) = P\{X(t) = j\}, \quad j \in \mathbb{E}$$

它表示时刻 t 系统处于状态 j 的概率. 那么对它我们有

$$P_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{E}} P_k(0) P_{kj}(t) \quad (1-5)$$

定理 1.4 对有限状态空间 $\mathbb{E}$ 的时齐马尔可夫过程, 以下极限

$$\begin{cases} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} = q_{ij}, & i \neq j, \quad i, j \in \mathbb{E} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - P_{ii}(\Delta t)}{\Delta t} = q_i, & i \in \mathbb{E} \end{cases} \quad (1-6)$$

存在且有限.

记 $T_1, T_2, \dots$ 为过程 $\{X(t) \mid t \geq 0\}$ 的状态转移时刻 $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots$; $X(T_n)$ 表示第 n 次状态转移后过程访问的状态. 若 $X(T_n) = i$, 则 $T_{n+1} - T_n$ 为过程在状态 i 的逗留时间, 那么有引理 1.1.

引理 1.1 设 $\{X(t) \mid t \geq 0\}$ 是在离散状态空间 $\mathbb{E}$ 上的齐次马尔可夫过程, 则对任何 $i, j \in \mathbb{E}$, $u \geq 0$, 有

$$P\{T_{n+1} - T_n > u \mid X(T_n) = i, X(T_{n+1}) = j\} = e^{-q_i u}, \quad n \geq 0$$

与 n 和状态 j 无关.

注解 1.3 有限状态的时齐 (齐次) 马尔可夫过程在任何状态 i 的逗留时间遵从参数为 $-q_i$ 的指数分布 ($0 \leq q_i < \infty$), 不依赖于下一个将要转入的状态.

定义 1.5 设 $\{X(t) \mid t \geq 0\}$ 是在离散状态空间 $\mathbb{E}$ 上的齐次马尔可夫过程. 若式 (1-6) 中的 q_i 满足 $q_i > 0$, 则称状态 i 为稳定态; 若 $q_i = 0$, 则称状态 i 为吸收态.

注解 1.4 过程一旦进入吸收态就永远停留在该状态.

引理 1.2 对有限状态空间 E 的时齐马尔可夫过程 $\{X(t) | t \geq 0\}$, 记 $N(t) = \{(0, t] \text{ 中 } \{X(t) | t \geq 0\} \text{ 发生的状态转移次数}\}$, 则对充分小的 $\Delta t > 0$ 有

$$P\{N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2\} = o(\Delta t)$$

即在 $(t, t + \Delta t]$ 中马尔可夫过程 $\{X(t) | t \geq 0\}$ 发生两次或两次以上转移的概率为关于 Δt 的无穷小量.

从 Gupur 等^[4], Nagel^[5]、Engel 和 Nagel^[6] 的研究中参考了以下内容.

定义 1.6 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间. 若 X 上定义一个非负值函数 $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$(1) \|f\| \geq 0, \forall f \in X; \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0;$$

$$(2) \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|, \forall f, g \in X;$$

$$(3) \|af\| = |a|\|f\|, a \in \mathbb{K}, f \in X;$$

则称 $\|\cdot\|$ 为 X 上的范数. $(X, \|\cdot\|)$ 称为赋范线性空间.

若对 $\{f_n | n = 1, 2, \dots\} \subset X$ 存在 $f \in X$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$$

则称 $\{f_n | n = 1, 2, \dots\}$ (强) 收敛于 f .

若 $\{f_n | n = 1, 2, \dots\} \subset X$ 满足

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \|f_n - f_m\| = 0$$

则称 $\{f_n | n = 1, 2, \dots\}$ 为基本列 (柯西列).

如果 $(X, \|\cdot\|)$ 上的任何基本列都是收敛列, 那么 $(X, \|\cdot\|)$ 称为巴拿赫空间, 简记为 X .

若巴拿赫空间 X 上引入元素之间的序 (大小) 关系 “ $\leq$ ”, 它与范数相容并且满足 $|f| \leq |g| \Rightarrow \|f\| \leq \|g\|, f, g \in X$, 则 X 称为巴拿赫格.

设 $Y \subset X$, 若 Y 中任何序列 $\{x_n\} \subset Y$ 存在收敛子列, 则称 Y 是列紧集. 进一步, Y 是闭集, 则 Y 称为紧集.

注解 1.5 若定义函数的 “加法”, “数乘”, “相等” 分别为 $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0, \infty)$ 几乎处处相等, 则以下空间

$$L^1[0, \infty) = \left\{ f \mid f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \|f\| = \int_0^\infty |f(x)| dx < \infty \right\}$$

构成巴拿赫空间. 进一步, 引入序关系 $f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$ 在 $[0, \infty)$ 几乎处处成立, 则该空间构成巴拿赫格.

定义 1.7 设 X 与 Y 是在数域 $\mathbb{K}$ 上的两个线性空间, D 是 X 的一个线性子空间. 映射 $A: D \rightarrow Y$ 称为算子, D 称为 A 的定义域, 常记为 $D(A)$. $R(A) = \{Af \mid f \in D\}$ 称为 A 的值域.

当 Y 是数域时, A 称为泛函.

若 $A(\alpha f + \beta g) = \alpha Af + \beta Ag, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall f, g \in D$, 则称 A 是线性算子. 进一步, A 满足

$$\forall x_n \in D, \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\| = 0,$$

则 $\mathcal{A}$ 称为连续.

若对线性算子 $\mathcal{A}: X \rightarrow Y$ 存在正常数 L 使得 $\|\mathcal{A}f\| \leq L\|f\|, \forall f \in X$, 则称 $\mathcal{A}$ 为有界算子.

若 $\mathcal{A}$ 的图像 $\{(f, \mathcal{A}f) \mid f \in D(\mathcal{A})\}$ 是闭集, 则称 $\mathcal{A}$ 是闭算子.

若任何有界序列 $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset D(\mathcal{A})$ 的像集 $\{\mathcal{A}f_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset Y$ 是列紧集, 则称 $\mathcal{A}$ 是紧算子.

注解 1.6 若 $\mathcal{A}: D \rightarrow \mathbb{C}$ (或 $\mathbb{R}$) 线性泛函且 $D = \mathbb{C}$ (或 $\mathbb{R}$), 则 $\mathcal{A}$ 是线性函数 $Ax = ax, \forall x \in D, a$ 是某个常数.

定义 1.8 设 X 是一个赋范线性空间. X 上的所有连续线性泛函 $F: X \rightarrow \mathbb{C}$ (或 $\mathbb{R}$) 全体按范数 $\|F\| = \sup_{\|f\|=1} |F(f)|$ 构成的巴拿赫空间称为 X 的共轭空间, 记为 X^* .

设 X 与 Y 是赋范线性空间, $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow Y$ 是线性算子. 若存在线性算子 $B: D(B) \subset Y^* \rightarrow X^*$ 满足

$$\langle \mathcal{A}f, F \rangle = \langle f, BF \rangle, \quad \forall f \in D(\mathcal{A}), \forall F \in D(B)$$

则称 B 为 $\mathcal{A}$ 的共轭算子, 记为 $\mathcal{A}^*$.

注解 1.7 实数域 $\mathbb{R}$ 的共轭空间为其本身, 即 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}$. $L^1[0, \infty)$ 的共轭空间为

$$L^\infty[0, \infty) = \left\{ f \mid \begin{array}{l} f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \\ \|f\| = \inf_{\substack{\mu(E_0)=0 \\ E_0 \subset [0, \infty)}} \sup_{x \in [0, \infty) \setminus E_0} |f(x)| < \infty \end{array} \right\}$$

若 $\mathcal{A}$ 是 $n \times n$ 的矩阵, 则它的共轭算子是其转置矩阵 $\mathcal{A}^*$.

定义 1.9 若巴拿赫空间 X 上的有界线性算子族 $\{T(t) \mid t \in [0, \infty)\}$ 满足:

(1) $T(t)T(s) = T(t+s), \forall t, s \in [0, \infty)$;

(2) $T(0) = I$ (恒等算子);

(3) $\lim_{t \rightarrow 0+} \|T(t)f - f\| = 0, \forall f \in X$;

则称 $\{T(t) \mid t \in [0, \infty)\}$ 为 C_0 -半群或强连续算子半群, 简记为 $T(t)$.

若存在常数 $M > 0$ 使得 $\|T(t)\| \leq M, \forall t \in [0, \infty)$, 则称 $T(t)$ 为一致有界 C_0 -半群.

若 $M = 1$, 则称 $T(t)$ 为压缩 C_0 -半群.

进一步, X 是巴拿赫格, 若对 X 中所有 $x \geq 0$ 有 $T(t)x \geq 0$, 则称 $T(t)$ 为正 C_0 -半群.

注解 1.8 设 X 是一个巴拿赫空间. 若 $\mathcal{A}: X \rightarrow X$ 是有界线性算子, 则 $T(t) = e^{t\mathcal{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathcal{A}^n$ 是 C_0 -半群. 事实上,

$$T(0) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n!} \mathcal{A}^n = I$$

对 $\forall f \in X$ 有

$$\|T(t)f - f\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathcal{A}^n f \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \|\mathcal{A}\|^n \|f\|$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \|\mathcal{A}\|^n \|f\| - \|f\| = e^{t\|\mathcal{A}\|} \|f\| - \|f\| \\
&= (e^{t\|\mathcal{A}\|} - 1) \|f\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0+
\end{aligned}$$

即

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \|T(t)f - f\| = 0, \quad \forall f \in X$$

由级数的柯西乘积有

$$\begin{aligned}
T(t)T(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathcal{A}^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \mathcal{A}^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \mathcal{A}^k \frac{s^{n-k}}{(n-k)!} \mathcal{A}^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^k s^{n-k}}{(n-k)! k!} \mathcal{A}^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{A}^n \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} t^k s^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{A}^n \sum_{k=0}^n C_n^k t^k s^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{A}^n (t+s)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+s)^n}{n!} \mathcal{A}^n = T(t+s), \quad \forall t, s \in [0, \infty)
\end{aligned}$$

引理 1.3 若 $\{T(t) \mid t \in [0, \infty)\}$ 为 C_0 -半群, 则存在 $\omega \geq 0$ 与 $B \geq 1$ 使得

$$\|T(t)\| \leq B e^{\omega t}, \quad \forall t \in [0, \infty)$$

定义 1.10 设 $\{T(t) \mid t \in [0, \infty)\}$ 为巴拿赫空间 X 上的 C_0 -半群. 线性算子 $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \rightarrow R(\mathcal{A}) \subset X$

$$\begin{aligned}
D(\mathcal{A}) &= \left\{ f \in X \mid \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T(t)f - f}{t} \in X \text{ 存在} \right\} \\
\mathcal{A}f &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T(t)f - f}{t}, \quad f \in D(\mathcal{A})
\end{aligned}$$

称为 $\{T(t) \mid t \in [0, \infty)\}$ 的无穷小生成元.

引理 1.4 (C_0 -半群的唯一性) 设有两个 C_0 -半群 $\{T(t) \mid t \in [0, \infty)\}$ 与 $\{S(t) \mid t \in [0, \infty)\}$, 它们的无穷小生成元分别为 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$. 若 $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, 则 $T(t) = S(t)$, $\forall t \in [0, \infty)$.

定理 1.5 (希勒-吉田耕作定理) 一个线性算子 $\mathcal{A}$ 是一个 C_0 -半群 $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$ 的无穷小生成元的充分必要条件是以下两条同时成立:

(1) $\mathcal{A}$ 是闭算子并且 $\overline{D(\mathcal{A})} = X$ ($D(\mathcal{A})$ 在 X 中稠密);

(2) $\|(\gamma I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{\gamma - \omega}$, $\gamma > \omega$.

定理 1.6 (菲利普斯定理) 设 $\mathcal{A}$ 是 $L^1[0, \infty)$ 上定义域稠密的线性算子, 那么以下两条等价:

- (1) $\mathcal{A}$ 是一个正压缩 C_0 -半群的无穷小生成元.
- (2) 方程 $(\gamma I - \mathcal{A})f = g \in L^1[0, \infty)$ 有解 $f \in D(\mathcal{A})$ 并且 $\langle \mathcal{A}p, \phi \rangle \leq 0$, 其中 $p \in D(\mathcal{A})$,

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & p(x) > 0 \\ 0 \leq \phi(x) \leq 1, & p(x) = 0 \\ 0, & p(x) < 0 \end{cases}$$

定理 1.7 (C_0 -半群的扰动) 设 X 是巴拿赫空间, $\mathcal{A}$ 是 C_0 -半群 $T(t)$ 的无穷小生成元, $T(t)$ 满足 $\|T(t)\| \leq Be^{\omega t}$. 若 G 是 X 上的有界线性算子, 则 $\mathcal{A} + G$ 生成一个 C_0 -半群 $S(t)$ 满足 $\|S(t)\| \leq Be^{(\omega + B\|G\|)t}$.

定义 1.11 设 X 是一个巴拿赫空间, X^* 是其共轭空间, $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$ 是线性算子, $L \subset D(\mathcal{A})$, $L^* \subset X^*$. 若对 $\forall p \in D(\mathcal{A})$, $\forall q^* \in L^*$ 有 $\langle \mathcal{A}p, q^* \rangle = 0$, 则称 $\mathcal{A}$ 是对集合 L^* 的保守算子.

若对 $\forall p \in L$ 有 $\|\mathcal{A}p\| = \|p\|$, 则称 $\mathcal{A}$ 对集合 L 为等距算子.

定理 1.8 (法托里尼定理) 设 X 是一个巴拿赫空间, X^* 是其共轭空间, $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$ 是线性算子并且生成 C_0 -半群 $T(t)$. 如果 $\mathcal{A}$ 是对

$$\theta(p) = \{q^* \in X^* \mid \langle p, q^* \rangle = \|p\|^2 = \|q^*\|^2\}$$

是保守算子, 那么 $T(t)$ 对 $D(\mathcal{A}^2)$ 是等距算子.

定义 1.12 设 $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$ 线性算子. 集合 $\rho(\mathcal{A}) = \{\gamma \in \mathbb{C} \mid (\gamma I - \mathcal{A})^{-1} \text{ 存在并有界}\}$ 称为 $\mathcal{A}$ 的豫解集, $\rho(\mathcal{A})$ 中的点称为 $\mathcal{A}$ 的正则点; 集合 $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$ 称为 $\mathcal{A}$ 的谱; 集合 $\sigma_p(\mathcal{A}) = \{\gamma \in \mathbb{C} \mid (\gamma I - \mathcal{A})f = 0 \text{ 有解 } f \in D(\mathcal{A}) \setminus \{0\}\}$ 称为 $\mathcal{A}$ 的点谱, 此时 $\gamma \in \sigma_p(\mathcal{A})$ 称为特征值, 相应的向量 f 称为特征向量; 集合 $\sigma_c(\mathcal{A}) = \{\gamma \in \mathbb{C} \mid (\gamma I - \mathcal{A})^{-1} \text{ 存在但无界}\}$ 称为 $\mathcal{A}$ 的连续谱; $\sigma_r(\mathcal{A}) = \{\gamma \in \mathbb{C} \mid (\gamma I - \mathcal{A}^*)f^* = 0 \text{ 有非零解 } f^* \in D(\mathcal{A}^*)\}$ 称为 $\mathcal{A}$ 的剩余谱. $s(\mathcal{A}) = \sup\{\Re \gamma \mid \gamma \in \sigma(\mathcal{A})\}$ 称为 $\mathcal{A}$ 的谱界.

注解 1.9 若 $\mathcal{A}$ 是 $n \times n$ 的矩阵, 则 $\mathcal{A}$ 只有点谱 (特征值) 与正则点, 即 $\sigma_c(\mathcal{A}) = \sigma_r(\mathcal{A}) = \emptyset$.

定理 1.9 (抽象柯西问题的适定性) 设 $\mathcal{A}$ 是定义域稠密的线性算子并且 $\rho(\mathcal{A}) \neq \emptyset$. 抽象柯西问题

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = \mathcal{A}u(t), \forall t \in (0, \infty) \\ u(0) = u_0 \in D(\mathcal{A}) \end{cases}$$

有连续可微解 $u(t)$ 的充分必要条件是 $\mathcal{A}$ 生成一个 C_0 -半群 $T(t)$. 此时, $u(t) = T(t)u_0$.

定义 1.13 设 $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$ 是线性算子, γ 是 $\mathcal{A}$ 的特征值. 集合 $\{f \in D(\mathcal{A}) \mid (\gamma I - \mathcal{A})f = 0\}$ 的维数称为 γ 的几何重数; $\mathbb{P} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\gamma I - \mathcal{A})^{-1} d\gamma$ 的值域的维数称为 γ 的代数重数, 其中 Γ 是以 γ 为中心的充分小的圆. 若 γ 的代数重数为 1, 则称 γ 为简单特征值.

注解 1.10 设 $\mathcal{A}$ 是 $n \times n$ 的矩阵, γ 是其特征值. γ 对应的特征多项式 $|\gamma I - \mathcal{A}|$ 的重数就是 γ 的代数重数, 或者将 $\mathcal{A}$ 化成若尔当标准性后, γ 对应的若尔当块的维数就是 γ 的代数重数. 例如, 若 $\mathcal{A}$ 的若尔当标准性为

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

则 $|\gamma I - \mathcal{A}| = (\gamma - \gamma_1)^5 (\gamma - \gamma_2)^2$, 即 γ_1 的代数重数为 5, γ_2 的代数重数为 2.

定理 1.10 设 X 是一个巴拿赫空间, $T(t)$ 是在 X 上的一致有界的 C_0 -半群, $\mathcal{A}$ 是其生成元. 如果 $\sigma_p(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} = \sigma_p(\mathcal{A}^*) \cap i\mathbb{R} = \{0\}$, $\{\gamma \in \mathbb{C} \mid \gamma = ia, a \neq 0, a \in \mathbb{R}\} \subset \rho(\mathcal{A})$, 0 是 $\mathcal{A}^*$ 的代数重数为 1 的特征值, 那么抽象柯西问题

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = \mathcal{A}u(t), \forall t \in (0, \infty) \\ u(0) = u_0 \in D(\mathcal{A}) \end{cases}$$

的时间依赖解 $u(t)$ 强收敛于其稳态解 u , 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - \langle u_0, u^* \rangle u\| = 0$$

其中, $\mathcal{A}^*u^* = 0$, $\mathcal{A}u = 0$, $\langle u, u^* \rangle = 1$.

定义 1.14 若巴拿赫空间 X 上的 C_0 -半群 $T(t)$ 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf \{\|T(t) - K\| \mid K : X \rightarrow X \text{ 是线性紧算子}\} = 0$$

则称 $T(t)$ 为拟紧 C_0 -半群.

注解 1.11 从定义容易看出, 紧 C_0 -半群是拟紧 C_0 -半群.

定义 1.15 设 $T(t)$ 是在巴拿赫空间 X 上的一个 C_0 -半群, $\mathcal{A}$ 是其生成元.

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \inf \left\{ \omega \in \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{存在 } M \geq 1 \text{ 使得} \\ \|T(t)\| \leq M e^{\omega t}, \forall t \geq 0 \end{array} \right\} \\ &= \inf_{t > 0} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} \end{aligned}$$

称为 $T(t)$ 的增长界.

$$\begin{aligned} \omega_{\text{ess}} &= \omega_{\text{ess}}(\mathcal{A}) \\ &= \inf_{t > 0} \frac{1}{t} \ln \{ \inf \{ \|T(t) - K\| \mid K : X \rightarrow X \text{ 是线性紧算子} \} \} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \{ \inf \{ \|T(t) - K\| \mid K : X \rightarrow X \text{ 是线性紧算子} \} \}}{t} \end{aligned}$$

称为 $T(t)$ (或 $\mathcal{A}$) 的本质增长界.

注解 1.12 设 $T(t)$ 是在巴拿赫空间 X 上的一个 C_0 -半群, $\mathcal{A}$ 是其生成元, 则

$$-\infty \leq s(\mathcal{A}) \leq \omega_0 < \infty$$

$$-\infty \leq \omega_{\text{ess}}(T) \leq \omega_0 < \infty$$

若 $K: X \rightarrow X$ 是线性紧算子, 则 $\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A}) = \omega_{\text{ess}}(\mathcal{A} + K)$.

引理 1.5 (拟紧 C_0 -半群的扰动) 设 $T(t)$ 是在巴拿赫空间 X 上的拟紧 C_0 -半群, $\mathcal{A}$ 是其生成元, $K: X \rightarrow X$ 是线性紧算子, 那么 $\mathcal{A} + K$ 生成一个拟紧 C_0 -半群 $S(t)$.

定理 1.11 设 $T(t)$ 是在巴拿赫空间 X 上的 C_0 -半群, $\mathcal{A}$ 是其生成元, 那么

$$\omega_0 = \max\{\omega_{\text{ess}}, s(\mathcal{A})\}$$

对每个 $w > \omega_{\text{ess}}$ 集合

$$\sigma(\mathcal{A}) \cap \{\gamma \in \mathbb{C} \mid \Re \gamma \geq w\}$$

是有限集并且对应的投影算子是有限秩算子.

定理 1.12 设 $T(t)$ 是在巴拿赫空间 X 上的正 C_0 -半群, $\mathcal{A}$ 是其生成元. 若 $T(t)$ 是一致有界并且 $\mathcal{A}$ 的谱界 $s(\mathcal{A}) = 0$, 则 $T(t)$ 的边界谱 (boundary spectrum) 是循环 (recycle) 的, 即

$$i\gamma \in \sigma_b(\mathcal{A}) \Rightarrow ik\gamma \in \sigma_b(\mathcal{A}), \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \gamma \in \mathbb{R}$$

其中, $i^2 = -1$, $\sigma_b(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$ 的边界谱 $\sigma_b(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}) \cap \{\gamma \in \mathbb{C} \mid \Re \gamma = s(\mathcal{A})\}$.

定理 1.13 设 $T(t)$ 是在巴拿赫空间 X 上的拟紧 C_0 -半群, $\mathcal{A}$ 是其生成元, 则

(1) $\{\gamma \in \sigma(\mathcal{A}) \mid \Re \gamma \geq 0\}$ 是有限集或空集. 此外, 它由 $(\gamma I - \mathcal{A})^{-1}$ 的代数重数有限的极点组成.

进一步, 若设这些极点为 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$, k_i 是 γ_i 的代数重数 $i = 1, 2, \dots, m$, 则

(2) 存在 $\epsilon > 0$, $M \geq 1$ 使得

$$T(t) = T_1(t) + T_2(t) + \dots + T_m(t) + L(t)$$

$$T_n(t) = e^{\gamma_n t} \sum_{j=0}^{k_n-1} \frac{t^j}{j!} (\mathcal{A} - \gamma_n I)^j \mathbb{P}_n$$

$$\mathbb{P}_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\gamma_n I - \mathcal{A})^{-k_n} d\gamma_n, \quad n = 1, 2, \dots, m$$

$$\|L(t)\| \leq M e^{-\epsilon t}, \quad \forall t \in [0, \infty)$$

定理 1.14 设 $T(t)$ 是巴拿赫空间 X 上的正有界拟紧 C_0 -半群, $\mathcal{A}$ 是其无穷小生成元. 若它的谱界为零, 即 $s(\mathcal{A}) = 0$, 则存在一个有限秩的正投影算子 $\mathbb{P} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\gamma I - \mathcal{A})^{-1} d\gamma$ 及常数 $\delta > 0$, $M \geq 1$ 使得

$$\|T(t) - \mathbb{P}\| \leq M e^{-\delta t}, \quad \forall t \geq 0$$

其中, Γ 是以 0 为中心的充分小的圆.

以下结果见参考文献 [7].

定理 1.15 设 $Y \subset X = \{y \in \mathbb{R} \times L^1[0, \infty) \times L^1[0, \infty) \times \cdots \mid \|y\| = |y_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|_{L^1[0, \infty)} < \infty\}$, 则 Y 是列紧集的充分必要条件为以下四个条件同时成立:

(1) $\exists$ 常数 $C > 0$, 使得 $\|y\| \leq C, \forall y \in Y$.

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |y_n(x+h) - y_n(x)| dx = 0$, 对 $y = (y_0, y_1, y_2, \cdots) \in Y$ 一致成立.

(3) $\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_h^{\infty} |y_n(x)| dx = 0$, 对 $y = (y_0, y_1, y_2, \cdots) \in Y$ 一致成立.

(4) 对 $\forall \epsilon > 0$, 存在自然数 $N(\epsilon)$, 使得对一切 $y = (y_0, y_1, y_2, \cdots) \in Y$ 有

$$\sum_{n=N(\epsilon)+1}^{\infty} \int_0^{\infty} |y_n(x)| dx < \epsilon$$

推论 1.1 一个有界子集 $Y \subset X = \{y \in \mathbb{R} \times L^1[0, \infty) \times L^1[0, \infty) \mid \|y\| = |y_0| + \|y_1\|_{L^1[0, \infty)} + \|y_2\|_{L^1[0, \infty)}\}$ 是列紧集当且仅当以下两个条件同时成立:

(1) $\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=1}^2 \int_0^{\infty} |\phi_j(x+h) - \phi_j(x)| dx = 0$, 对 $\phi = (\phi_0, \phi_1, \phi_2) \in Y$ 一致成立.

(2) $\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^2 \int_h^{\infty} |\phi_j(x)| dx = 0$, 对 $\phi = (\phi_0, \phi_1, \phi_2) \in Y$ 一致成立.

第2章 可靠性的数学理论

本章主要介绍可靠性数学理论的产生及可靠性数量指标. 本章参考了曹晋华和程侃的学术著作^[8]以及文献^[1].

2.1 可靠性数学理论的背景

可靠性数学理论大约起源于 20 世纪 30 年代. 最早被研究的领域之一是机器维修问题^[9], 另一个重要的研究工作是将更新论应用于更换问题^[10]. 此外, 在 30 年代 Weibull^[11]、Gumbel^[12] 和 Epstein^[13] 等研究了材料的疲劳寿命问题和有关的极值理论.

可靠性问题在第二次世界大战期间才真正受到重视. 一个基本原因是军事技术装备越来越复杂. 复杂化的目的在于使技术装备具有更高的性能. 但是装备越复杂, 往往就越容易发生故障. 当复杂化的程度严重影响设备可靠性时, 设备复杂化也就失去了意义. 因此, 复杂化和可靠性之间存在着尖锐的矛盾. 另一个基本原因是, 新的军事技术装备的研制过程是一场争时间争速度的竞赛. 但是研制周期又很长, 经不起研制过程的重大反复. 这就需要有一整套科学的方法, 将可靠性贯穿于研制、生产和使用维修的全过程. 因此复杂设备的可靠性成了相当严重而又迫切需要解决的问题. 从 20 世纪 50 年代至今, 可靠性理论这门新兴科学以惊人的速度发展着, 各方面都已积累了丰富的经验. 可靠性理论的应用已从军事技术扩展到国民经济的许多领域. 随着可靠性理论的日趋完善, 用到的数学工具也越来越深刻. 可靠性数学已成为可靠性理论最重要的基础理论之一.

要提高产品的可靠性, 需要在材料、设计、工艺、使用维修等多方面努力. 因此可以说可靠性的改善主要是工程问题和管理问题. 可靠性数学在其中所占的分量并不是很大. 然而, 作为一个必不可少的工具, 可靠性数学在可靠性理论中有着特殊的地位. 可靠性理论以产品的寿命特征作为主要研究对象, 这就离不开对产品寿命的定量分析和比较, 从这种意义上来看, 可靠性理论是一门定量的科学, 可靠性的许多基本概念的定义是用数学术语给出的, 不理解这些基本概念的严格数学定义, 往往会在实际工作中产生概念的混淆, 同时一个可靠性工作者只有熟悉可靠性理论中最基本的数学模型和数学方法, 才有可能在工作中根据具体问题, 提出既不脱离实际, 又在数学上可能解决的合理的数学模型. 因此, 可靠性数学与可靠性工程、可靠性管理等其他手段紧密配合, 就能发挥其应有的作用.

一般来说, 产品的寿命是一个非负随机变量, 研究产品寿命特征的主要数学工具是概率论. 也许有人会说, 可靠性数学只是概率论的一个简单应用, 不值得特别发展. 美国的可靠性数学专家 Barlow 和 Proschan^[14] 指出: 这种目光是短浅的, 就像有人说, 概率论本身只是标准的数学理论的一个简单应用, 而不值得去特别地发现它的情形一样. 可靠性问题有它本身的结构, 且反过来刺激了概率论中一些新领域的发展. 因此, 可靠性数学与应用和各种最优化问题有紧密的关系, 这就决定了可靠性数学又是运筹学的一个重要分支.

在解决可靠性问题中所用到的数学模型大体可分为两类: 概率模型和统计模型. 概率模型是指, 从系统的结构及部件的寿命分布、修理时间分布等有关的信息出发, 来推断出与系统寿命有关的可靠性数量指标, 进一步可讨论系统的最优设计、使用维修策略等. 统计模型是指, 从观察数据出发, 对部件或系统的寿命等进行估计、检验等.

2.2 评定产品可靠性的数量指标

定义 2.1 每个组成部分具有一个功能, 它们合起来能完成单独不能完成的更大功能的有机整体称为系统.

系统的概念是相对的. 例如, 一个核电站可以看成一个系统, 其中的安全保护装置可以看成它的一个部件. 但是, 如果我们单独地研究安全保护装置, 那么可以把它看成一个系统, 它也是由某些部件组成的完成某种指定功能的整体. 一个高等院校是一个系统, 它的每个院(系)是它的一个部件. 但如果单独研究每个院(系), 那么可以把它看成一个系统. 类似地, 人也是系统. 在可修系统中, 组成系统的部件不仅包括物, 也可以包括人——修理工.

定义 2.2 若产品(部件或系统)丧失规定功能, 则称为失效或故障.

通常, 对不可修产品称失效, 对可修产品则称故障. 在讨论具体问题时, 往往难以明确加以区分. 因此, 我们把“失效”和“故障”看成同义词.

产品的寿命是与许多因素有关的. 例如, 该产品所用的材料, 设计和制造工艺过程中的各种情形, 以及产品在储存和使用时的环境条件等. 寿命也与产品需要完成的功能有关. 当产品丧失了规定的功能, 即当产品失效时, 它的寿命也就终止了. 显然对同一产品, 在同样的环境条件下使用, 由于规定的功能不同, 产品的寿命也将不同.

我们通常用一个非负随机变量 X 来描述产品的寿命, X 相应的分布函数为

$$F(t) = P\{X \leq t\}, \quad t \geq 0 \quad (2-1)$$

定义 2.3 设非负随机变量 X 的寿命分布函数为 $F(t)$, 则产品在时刻 t 以前都正常(不失效)的概率, 即产品在时刻 t 的生产率

$$R(t) = P\{X > t\} = 1 - F(t) = \bar{F}(t) \quad (2-2)$$

称为产品的可靠度函数或可靠度.

$R(t)$ 表示产品在时刻 t 以前都正常(不失效)的概率, 即产品在时刻 t 的生产率. 因此, 可靠度也可定义为: 产品在规定的条件下和规定的时间内, 完成规定功能的概率. 对于一个给定的产品, 规定的条件和规定的功能确定了产品寿命 X 这个随机变量, 规定时间就是公式 (2-2) 中的时间 $[0, t]$.

定义 2.4 设非负随机变量 X 的寿命分布为 $F(t)$, 那么

$$EX = \int_0^{\infty} t dF(t) \quad (2-3)$$

称为产品的平均寿命.