TURING 图灵新知

全彩印刷

玩不够的数学 2

Les mathématiciens se plient au jeu

当数学遇上游戏

[法] 让-保罗·德拉耶——著　方弦——译

中国工信出版集团　人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵新知

Les mathématiciens se plient au jeu

玩不够的数学 2

当数学遇上游戏

[法] 让-保罗·德拉耶——著 方弦——译

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

玩不够的数学. 2, 当数学遇上游戏 / (法) 让-保罗·德拉耶著 ; 方弦译. -- 北京 : 人民邮电出版社, 2020.4
（图灵新知）
ISBN 978-7-115-53191-9

Ⅰ. ①玩… Ⅱ. ①让… ②方… Ⅲ. ①数学－普及读物 Ⅳ. ①01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第291673号

内 容 提 要

本书通过折纸、扑克、象棋、数独、掷骰子等20类家喻户晓的游戏阐述了数学家的思维方式，揭示了游戏中的代数、几何、统计学、逻辑学与人工智能的种种乐趣，展现了游戏思维在算法、大数据和人工智能发展过程中的独特作用。本书适合所有热爱数学和各种游戏的大众读者。

◆ 著　　　　[法] 让-保罗·德拉耶
译　　　　方　弦
责任编辑　戴　童
责任印制　周昇亮

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路11号
邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
雅迪云印（天津）科技有限公司印刷

◆ 开本：880×1230　1/32
印张：8.125
字数：233千字　　　　2020年4月第1版
印数：1－3 500册　　　2020年4月天津第1次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2018-4182号

定价：69.00元

读者服务热线：(010)51095183转600　印装质量热线：(010)81055316

反盗版热线：(010)81055315

广告经营许可证：京东工商广登字 20170147 号

TURING 图灵教育

站在巨人的肩上

Standing on the Shoulders of Giants

版权声明

献给我的母亲

前言

“那是个认真的人，他总是花时间玩。”

——刘易斯·卡罗尔（1832—1898）

很多人讨厌数学，但很多人喜欢玩游戏，这就十分矛盾。一来，玩游戏时总会遇到要用数学的时候；二来，所有数学家都会跟你说，对他们来说，数学就是个游戏！如果你不明白这是什么意思，请翻开这本书的任意一章，那里条分缕析了游戏和数学之间不可胜数的某种联系。下面举几个例子。

- 洗牌是我们每个人都多多少少能迅速完成的工作，但有必要洗这么多次吗？在打牌之前应该知道这一点，但直到最近，人们才搞清楚这是怎么回事，而找到答案主要归功于一位数学家兼前职业魔术师——佩尔西·迪亚科尼斯。
- 折纸是游戏，也是艺术。在探索纸张精巧的折叠过程中，数学家发现它们能提供比圆规直尺更强大的几何作图能力，同时也是一种不寻常的计算方法。
- 你会觉得，将几个在统计上不利的赌局连在一起，只会得到又一个不利的赌局。这不一定对！帕龙多悖论毫无疑问地说明了这一点，但深入理解个中原因并不容易。
- 玩游戏没什么用，更别说会给医学和生物学带来什么好处了。此言差矣！有些游戏不仅有用，而且能让人类与计算机一较高下，而计算机的实力还比不上某些优秀的玩家团队。

胜利对玩家是挑战，而理解对数学家是挑战。很多时候，游戏提出了棘手的问题，通过玩来理解以及理解怎么玩，就落到了同一个人身上，他既是玩家，又是数学家。这带来了大量的工作，某些情况下需要计算机的帮助。游戏提供了许多不可思议的数学结果，本书在展示这些结果时，会尽量避免过于技术性的部分，因为那就是人们讨厌数学的所在。

你还有疑问？接着翻开后面的书页吧。我曾在《为了科学》杂志[①]的“逻辑与计算”专栏上发表过这些文章。借此成书机会，我将之更新并完善，按主题加以归并。文中有许多框内文字，对相关内容进行了拓展和解释。每一章都在尝试证明我们一开始提到的矛盾是多么荒谬：我们应该喜欢数学，而游戏就是最好的方法。

让－保罗·德拉耶

①《为了科学》（*Pour la Science*）是《科学美国人》的法语版，但相当一部分文章由法国人撰写，与英文版有相当大的差异。——译者注

目 录

第一部分

第二部分

第三部分

第四部分

第 一 部 分

骰子、纸牌和棋盘

骰子、纸牌和棋子都是游戏用到的东西，但它们的性质、分类和组织的方式，还有产生秩序和随机的方式，都赋予了它们数学身份。一个充满问题和新游戏的无垠领域就此开启……

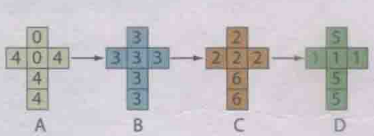
第 1 章

埃弗龙的古怪骰子

有些骰子带来的胜负结局会很奇怪，与直觉完全不同，令人“误入歧途”。即便是同一个骰子，如果不是掷一次而是两次，那么胜负的结果可能就反过来了！

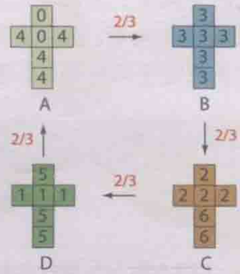
假如 1 比 2 好、2 比 3 好……直到 $N-1$ 比 N 好，那么 1 当然要比 N 好啊！但是，这不一定。在某些情况下，传递性不存在：1 会输给 N。

马丁·加德纳喜欢那些令人困惑又颠覆常识的小游戏。正是他广泛宣传了埃弗龙的非传递性骰子，后续精彩的派生游戏让最初的悖论扑朔迷离。在 1970 年《科学美国人》的每月专栏上，加德纳介绍了美国斯坦福大学的统计学家布拉德利·埃弗龙刚刚发明的四枚骰子：



我们将这些骰子写成 A = [0, 0, 4, 4, 4, 4]，B = [3, 3, 3, 3, 3, 3]，C = [2, 2, 2, 2, 6, 6]，D = [1, 1, 1, 5, 5, 5]。我们假设这些骰子没做过手脚，每个面朝上的概率都是 1/6。同时掷下骰子 A 和骰子 B，点数大的算赢的话，一共有 $6 \times 6 = 36$ 种概率相同的可能性，其中有 12 种是“A 掷到 0 而 B 掷到 3”，而有 24 种“A 掷到 4 而 B 掷到 3”。于是骰子 A 赢了的情况有 24 种，而骰子 B 赢的情况只有 12 种。骰子 A 在三分之二的情况下都能胜利，自然更好。

比较骰子 B 和骰子 C 的话，会发现 B 也能在三分之二的情况下战胜 C；同样，C 在三分之二的情况下能战胜 D。惊人的是，D 也能在三分之二的情况下战胜 A。



我们把这叫作“长度为 4 的非传递性链条”，并且如右图那样表达这些结果。

这很令人惊讶，但这个表面上的矛盾有一个简单的解释：我们错误地相信了“骰子 X 比骰子 Y 厉害”这个关系是有传递性的。一枚骰子有多厉害，不能用单一的参数来衡量，不像跑步运动员那样可以用速度来比较，也不像汽车那样可以用售价来比较。一枚骰子有多厉害，取决于每一次对决，依赖于另一枚骰子创造的环境。

骰子掷出的平均结果，也就是所有面的数字总和除以 6，本来可成为衡量骰子的唯一参数，然而它不是。实际上，对于之前的骰子 A、B、C、D，平均值分别是 2.66、3、3.33 和 3。尽管骰子 A 的平均值比骰子 B 要小，却能在三分之二的情况下打败骰子 B！同样，骰子 B 的平均值比骰子 C 要小，但在两者的对决中占了上风（在这里，大于号表示前者能赢后者）：

$$
\begin{array}{ccccccccc}
A & >_{2/3} & B & >_{2/3} & C & >_{2/3} & D & >_{2/3} & A \\
2.66 & & 3 & & 3.33 & & 3 & & 2.66
\end{array}
$$

在这里，不论是骰子的平均值还是别的整体参数，都无法完整地衡量骰子有多强。

1. 奇迹般的逆转

蒂姆·罗伊特提出了一个新的悖论：胜者的逆转。例如，当我们考虑骰子 R_1 = [6, 3, 3, 3, 3, 3] 和 R_2 = [5, 5, 5, 2, 2, 2] 时，就会有以下看似不可能的性质：如果每枚骰子只掷一次的话，那么 R_1 能以 7/12 的概率战胜 R_2，骰子 R_1 看上去更强；但如果掷两次，然后将 R_1 和 R_2 各自的点数加起来，那么这回胜利的就是 R_2，胜利概率是 765/1296，大概就是 0.5903。将占上风的骰子掷两次，就变

成占下风了！实际上，罗伊特发现的悖论更加厉害。如果我们再考虑骰子 $R_3 = [1, 4, 4, 4, 4, 4]$，就会出现非传递性链条 $R_1 > R_2 > R_3 > R_1$；而如果掷两次的话，链条就完全反过来了，变成 $R_1 < R_2 < R_3 < R_1$。

用悖论取胜

埃弗龙的骰子也许能帮你在朋友面前炫耀一把。你可以提出这样的游戏："这里有四枚骰子 A、B、C、D，每人各选一枚，我让你先选，然后我们一起掷 5 次骰子，看谁赢的轮数多。"

如果你的朋友选了骰子 A，那么你就选骰子 D，它比骰子 A 要强；如果他选的是骰子 B，那么你就选比它强的骰子 A，如此等等。非传递性链条可以保证你一定能选到比这位"冤大头"更强的骰子。

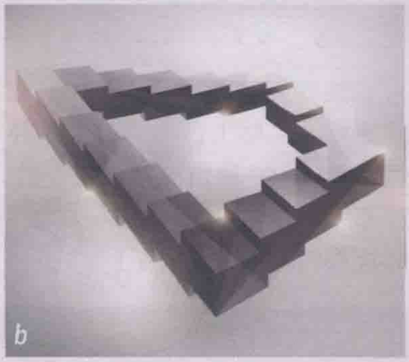
每一次掷骰子你都有三分之二的机会赢，如果五轮三胜的话，你赢的机会就是 79.01%。如果你觉得这样风险还是太大，那么可以提出一共玩 25 轮，而不是 5 轮，这样你就能在 95.84% 的情况下获胜。具体的计算就是，在你以 2/3 的机会赢下每一局的前提下，将在 25 轮中赢得 25 轮、24 轮、23 轮……一直到赢得 13 轮的概率全部加起来。二项分布告诉我们，在这种情况下，掷 n 轮骰子恰好赢 p 轮的概率是 $n!/((n-p)!p!)(2/3)^p(1/3)^{n-p}$。我们从中就能得到之前所说的 79.01% 和 95.84%。

只有在你朋友没起疑心的情况下，你才能用埃弗龙骰子大获全胜。有一天，美国的亿万富翁沃伦 · 巴菲特就向美国微软公司创始人比尔 · 盖茨提出用埃弗龙骰子来打赌。当然，巴菲特请盖茨先选择骰子。盖茨起了疑心，仔细分析了那些骰子，然后建议巴菲特先选。没人知道他们打算押下多少赌注！

故事讲到这里，有点吊人胃口。我们用四枚骰子能取胜，那么三枚行不行？能不能避免在不同的面上写相同的数字？因为这样既不雅观又让人起疑。为了让玩家觉得骰子更漂亮、更放心，有没有可能做到三枚骰子各自面上数字之和都相同（从而平均值也相同）？

非传递性能让你百思不得其解！在体育运动中，A 队赢 B 队、B 队赢 C 队、C 队赢 A 队的事情并不少见。这不满足传递性（如果 a > b 并且 b > c，那么 a > c）。如果 A 队状态不好，对阵 C 队的时候打得很烂，那么这种事情就会发生。这种现象在数学中也经常出现，而且不能用“状态不好”来解释我们观察到的非传递性。尽管这一局和下一局之间的一切不变，但也会发生像“石头、剪刀、布”（图 a）这样的情况：剪刀赢布（因为剪刀能剪开布），布赢石头（因为布能包住石头），而石头赢剪刀（因为石头能砸烂剪刀）。


a


b

孔多塞悖论也很经典。假设有 60 位选民投票给三名候选人 A、B 和 C，其中有 23 位选民的排序是 A > B > C，17 位是 B > C > A，2 位是 B > A > C，10 位是 C > A > B，还有 8 位是 C > B > A。

这样的话，有 33 位选民觉得 A 比 B 好，不赞成的有 27 位；42 位选民觉得 B 比 C 好，不赞成的有 18 位；35 位选民觉得 C 比 A 好，不赞成的有 25 位。

选民表达出的偏好组成了非传递性链条：A > B > C > A。

埃弗龙的四枚骰子（见第 3 页）也以类似的形式组成了非传递性链条。

还有人发明了其他骰子游戏，比起孔多塞悖论或者埃舍尔那不断上升却又回归原点的不可能阶梯（图 b）来说，它们拥有更违反直觉的性质。

三枚没那么可疑的骰子

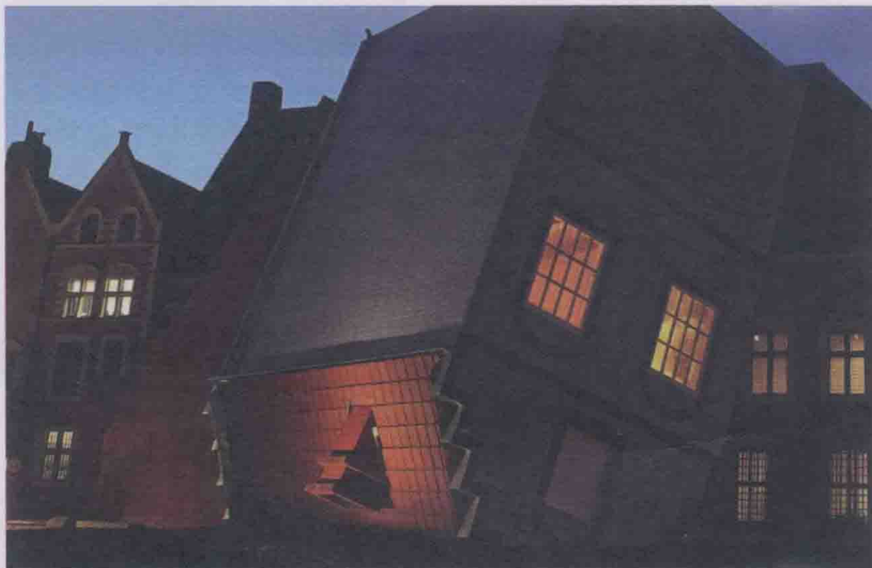
答案是肯定的！在加博尔 · 塞凯伊 1986 年出版的一本书里（见参考文献），就出现了这样的三枚非传递性骰子的一个例子：A′ = [5, 7, 8, 9, 10, 18]，B′ = [2, 3, 4, 15, 16, 17]，C′ = [1, 6, 11, 12, 13, 14]。从 1 到 18 的每个数字都被用到且只用了一次。每枚骰子的数字总和都是 57，于

是平均值就是 9.5。计算表明，骰子 A′在 36 种情况的 21 种（也就是所有情况的 7/12）之中能打败骰子 B′。骰子 B′对阵骰子 C′，还有骰子 C′对阵骰子 A′的结果也一样。尽管三枚骰子各不相同，但它们之间似乎有着完美的对称性：一来，每枚骰子的所有可能投掷结果平均都是 9.5；二来，每枚骰子打败下一枚的概率都是 7/12，输给上一枚的概率也是这样。这些骰子组成了一条长度为 3 的非传递性链条，就像“石头、剪刀、布”那样：

$$A' >_{7/12} B' >_{7/12} C' >_{7/12} A'$$

9.5　　9.5　　9.5　　9.5

然而新的矛盾又出现了，如果同时投掷三枚骰子的话，骰子 B′显然更好。实际上，一共有 216 种可能的结果，对这些结果的分析表明，骰子 B′在 90 种情况下大获全胜，而骰子 A′胜利的情况只有 63 种，骰子 C′也一样。这三枚骰子在独自投掷或者两枚对战时的平衡性，在一起投掷的时候就消失了！



颠倒的世界

这座像从天上掉下来的房子，是艺术家让－弗朗索瓦·富尔图在法国里尔展出的作品（*Fantastic*，为“里尔 3000”项目设计，2012）。

为了列出所有这样的三枚骰子的组合，加丁·布莱克在2010年进行了一项彻底的计算，发现对于寻找各自拥有相同平均值、以相同概率战胜彼此，并且从1到18的每个数字恰好用到一次的三枚非传递性骰子的组合这个问题，它的解答一共有8种。每种组合的胜利概率都不超过7/12，而每个组合的三枚骰子一起投掷时胜率也不均衡。框3给出了这8种解答，还有它们三枚一起投掷时各自的胜率（胜利的情况数）。

3. 8组平衡的三枚套骰子

$[5, 7, 8, 9, 10, 18]_{63}$ $[2, 3, 4, 15, 16, 17]_{90}$ $[1, 6, 11, 12, 13, 14]_{63}$

$[1, 2, 9, 14, 15, 16]_{81}$ $[3, 4, 5, 10, 17, 18]_{81}$ $[6, 7, 8, 11, 12, 13]_{54}$

$[1, 2, 11, 12, 13, 18]_{81}$ $[3, 4, 5, 14, 15, 16]_{75}$ $[6, 7, 8, 9, 10, 17]_{60}$

$[1, 6, 7, 8, 17, 18]_{81}$ $[2, 9, 10, 11, 12, 13]_{60}$ $[3, 4, 5, 14, 15, 16]_{75}$

$[1, 7, 10, 12, 13, 14]_{63}$ $[2, 3, 4, 15, 16, 17]_{90}$ $[5, 6, 8, 9, 11, 18]_{63}$

$[1, 8, 9, 12, 13, 14]_{63}$ $[2, 3, 4, 15, 16, 17]_{90}$ $[5, 6, 7, 10, 11, 18]_{63}$

$[1, 8, 10, 11, 13, 14]_{63}$ $[2, 3, 4, 15, 16, 17]_{90}$ $[5, 6, 7, 9, 12, 18]_{63}$

$[1, 9, 10, 11, 12, 14]_{63}$ $[2, 3, 4, 15, 16, 17]_{90}$ $[5, 6, 7, 8, 13, 18]_{63}$

最大胜率

四枚骰子能达到2/3的胜率，三枚骰子能达到7/12的胜率（不需要加上从1到18的数字全部各用一次的限制），有没有可能做得更好？如果我们能使用更多的骰子，每枚骰子可以超过六个面，那么我们所知的最大可能优势又是什么呢？

奇怪的是，所有这些一般性问题的答案早已出现在扎尔曼·乌西斯金于 1964 年发表的一篇文章中，而那时埃弗龙的骰子还没有扬名天下。这篇文章的框架更为广泛，但也包括了多枚骰子的游戏。对于三枚骰子来说，最大胜率只能达到黄金分割常数 φ 的倒数 $1/\varphi = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0.6180...$。对于四枚骰子来说，可能的最大胜率是 $2/3 = 0.6666...$（埃弗龙的骰子达到了这个胜率）。对于五枚骰子来说，胜率不超过 0.692，这是方程 $b^3 + 3b^2 - 4b + 1 = 0$ 的解。

乌西斯金解释了如何对超过五枚的骰子进行计算，并证明了当非传递性链条中骰子数目增加时，每枚骰子相比下一枚的优势可以任意接近 3/4，但永远达不到这个数值。

在 1994 年，理查德·萨维奇证明了一个关于三枚非传递性骰子的漂亮结论，其中也牵涉到了黄金分割。萨维奇研究的是有 n 个面的骰子，限定了每个面的数字都在 1 和 $3n$ 之间，而且每个数字都恰好用到一次，就像骰子 A′、B′ 和 C′ 那样。萨维奇计算了一枚骰子能战胜下一枚的最低胜率 M，然后想办法让这个最小值取到最大的可能值，这样的话，当玩家提出类似巴菲特和盖茨之间的那个用三枚骰子进行的赌局时，就能获得最大的收益。萨维奇证明了，如果取用拥有很多个面的骰子的话，那么我们可以任意接近 $1/\varphi$ 这个极限，其中 $\varphi = 1.618...$ 是黄金分割常数，而乌西斯金证明了这个极限是不可逾越的（同时要满足从 1 到 $3n$ 每个数都恰好用一次的限制）。于是，我们能继续提升六面骰子的最优值 $7/12 = 0.5833...$，不断接近 $1/\varphi = 0.61833...$，想要多近就有多近，前提是要用一组超过六面的骰子。

还有个值得一提的一般性结论。马克·芬克尔斯坦和爱德华·索普曾经研究了所谓的“可接受”骰子。如果一枚 n 面的骰子，每个面上的数字都在 1 和 n 之间（同一个数字可以多次出现，也不要求所有数字都出现），而且所有面上的数字之和跟面上写有 $1, 2, 3, \cdots, n$ 的标准 n 面骰子相同（也就是 $n(n + 1)/2$），那么它就是可接受的。芬克尔斯坦和索普的美妙定理断言，如果 n 大于 3，那么对于任意可接受 n 面骰子，只要不同于标准 n 面骰子，都存在能打败它的另一枚可接受 n 面骰子；另外，标准 n 面骰子与任意一枚可接受 n 面骰子都不分胜负。这个定理的推论之一，就是对于所有 $n > 3$ 的情况，都存在由可接受 n 面骰子组成的非传递性链条。