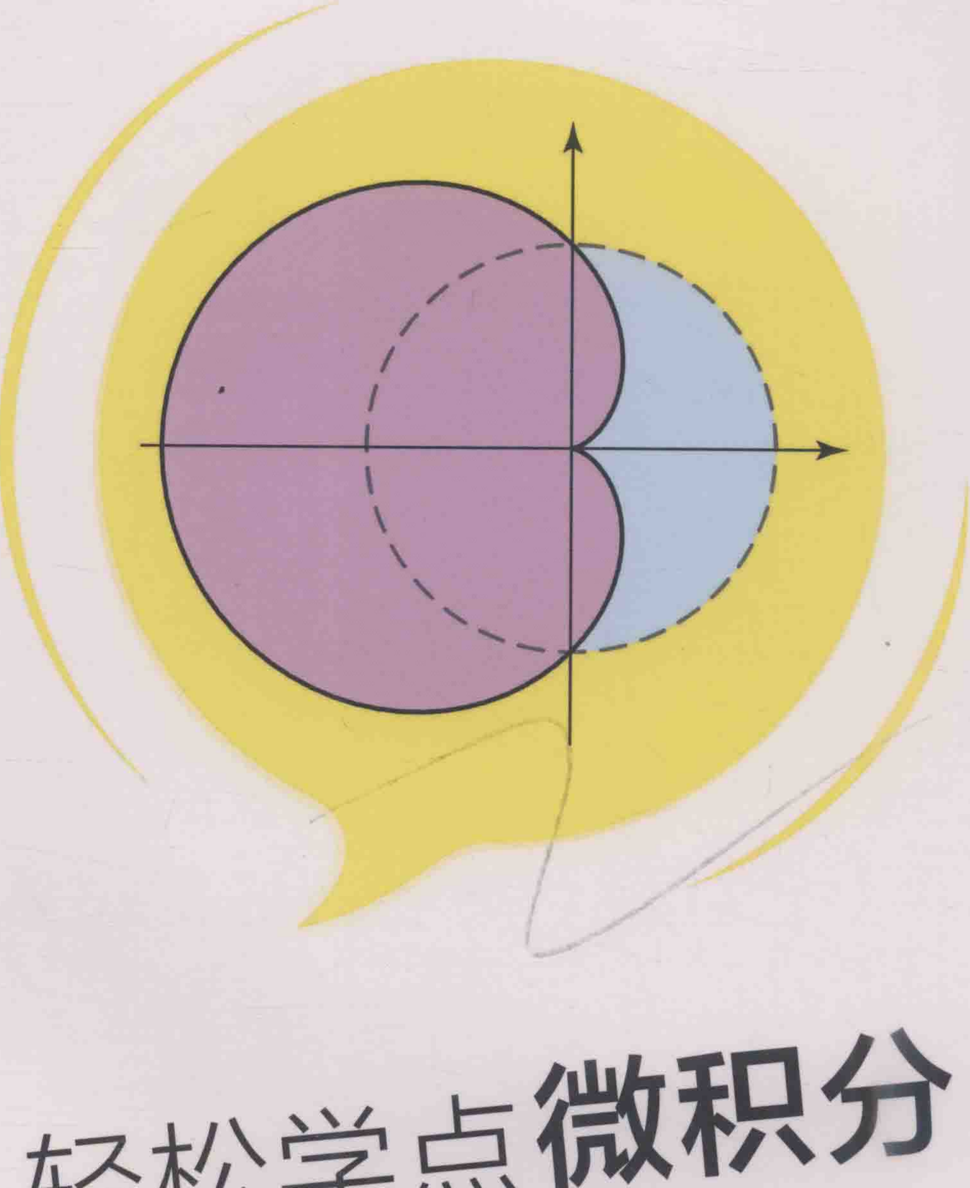
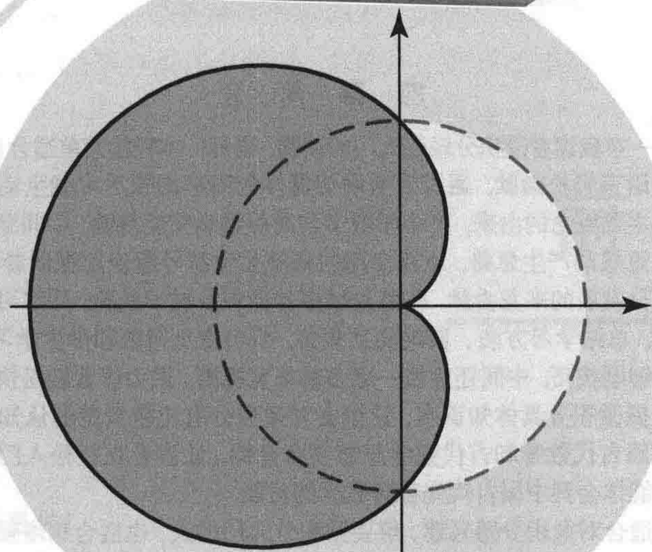


轻松学点微积分

卓永鸿◎编著

科学出版社



轻松学点微积分

卓永鸿◎编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

这是一本教读者微积分轻松入门的读物，也是一本轻松简单适合自学的书.

本书语言轻松幽默，通过大量贴切具体的图形图像尽可能生动地介绍微积分各个主题概念的由来，将中学数学与高等数学完美衔接，中间穿插数学史还原数学思想的产生思路，还有常用的高等数学符号趣谈加深读者学习印象，了解微积分发展的来龙去脉. 作者总结多年微积分教学经验，用尽可能浅显易懂的语言，总结学习方法、归纳实用规律，指出常见错误和学生学习盲点，提供详细的解题技巧，中间还穿插一题多解拓宽视野，助力读者轻松快乐地从更高角度掌握微积分具体知识点，让读者对微积分有比较清楚的认知. 特别地，本书对中国古代数学和古代数学思想多有介绍，让读者在轻松入门微积分的过程中也能体会到中国古代先哲对数学的贡献.

本书适合对微积分感兴趣、想要微积分入门的人，也适合想增强数学素养的文科生轻松阅读，尤其对正在修课、准备考试而感到微积分学习有困难的同学很友好，当然本书也适合其他想要了解微积分的读者.

图书在版编目(CIP)数据

轻松学点微积分/卓永鸿编著. —北京：科学出版社，2020.5
ISBN 978-7-03-064195-3

Ⅰ. ①轻…　Ⅱ. ①卓…　Ⅲ. ①微积分-普及读物　Ⅳ. ①O172-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2020) 第 018317 号

责任编辑：张中兴　梁　清　李香叶／责任校对：杨聪敏
责任印制：张　伟／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京虎彩文化传播有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2020 年 5 月第　一　版　开本：720×1000　1/16
2020 年 5 月第一次印刷　印张：32　3/4
字数：660 000

定价：89.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前言

你可以做得更好!

在多年与学生的教学互动中, 笔者深深觉得, 许多人在微积分这门学科的表现之所以不够理想, 往往并非天分不佳或学习态度不良, 而是没有抓住微积分各主题中的核心精神, 停留在抽象符号操作, 于是不得其门而入. 然而通过我的阐释, 学生明白微积分各主题在做什么后, 往往恍然大悟, 能开始上手.

我在 2012 年开始进行微积分教学的写作, 希望借由分享我的阐释方式, 来帮助更多学生学习微积分. 尽可能用浅显易懂的方式提供对微积分的感觉, 不再只是操作无感的符号. 尽可能生动地介绍各主题概念的由来、谈一点点微积分发展史、点出微积分学的精神、指出常见错误, 并提供解释详细的解题步骤, 让学生对于微积分能有较清楚的认知.

数学并非是纯粹的抽象智力游戏, 多是出于实用上的需要而发展起来的, 微积分更是如此. 笔者深深相信, 正如著名数学家项武义老师不断强调的 “大道至简”“返璞归真”, 只要好好掌握微积分的思想, 你就能在这门学科表现得更好!

特别要感谢我的恩师: 台湾大学数学系杨维哲老师. 我在高中求学阶段便读了老师的著作, 大一时修了老师所开设的课程 “微积分优” (Honor Calculus)①, 更是大受启发. 我对于微积分的许多特别看法、教学方式, 其实大多来自老师的教学, 当时 “杨氏微积分” 就深深植入我脑中.

除了学问方面外, 在我就读大学及研究所期间, 老师亦提供许多帮助, 包括给

① 台湾大学数学系在一些必修课程设有荣誉课程 (Honor Course), 例如微积分优、几何学优、代数优等, 荣誉课程比普通课程难度更高, 应用更广.

予我经济上的扶助, 还有栽培机会. 在我升大三的暑假, 老师就让我担任他的暑修微积分助教, 而后又因有了这项工作经验, 我得以担任台湾大学教学发展中心的微积分课业辅导咨询小老师, 使我有四年时间非常大量地接触台湾大学的同学. 面向大一到大五, 甚至硕班博班同学; 除了修课学生, 也有准备考研、学物理、搞懂论文里的数学等不同需求. 除了本地生, 也有马来西亚、美国、德国、以色列、海地等各种外籍生. 解决他们各式各样微积分问题, 使我受益匪浅.

这样回顾起来, 没有老师对我的恩助, 绝对不可能有今天这本书, 因此我要郑重说声: 老师, 非常感谢你!

老师经常强调: 比起天资优, 态度优才是优. 我的天资平平, 但做事与学习的态度得到老师赞许, 而我现在能对学生们作出一些贡献, 也算无愧于老师的栽培了! 也借此勉励各位读者, 不要因自认天分不如人就轻易放弃!

在本书写作期间, 陆续上传各主题到博客 (http://CalcGospel.in). 原意只是面向台湾的读者分享, 然而意外地有许多大陆读者造访, 因此我将本书的简体版出版到大陆, 希望能对大陆同胞有些许贡献. 考虑到原博客为全繁体内容, 最近架设了简体分站 (http://easycal.top), 可以专注发表面向大陆读者的微积分题材. 读者亦可入 QQ 群 (171702497), 进行提问、讨论、交流学习心得.

卓永鸿

2019 年 1 月

目录

第1章 极限与连续

> 微积分学，是人类思维的伟大成果之一. 这门学科乃是一种撼人心灵的智力奋斗的结晶；这种奋斗已经经历了两千五百多年之久，它深深扎根于人类活动的许多领域之中.
>
> Richard Courant

■ 1.1 微积分的起源

高中理科同学在高三下学期会接触到一点点微积分，而到了大学以后，大多数的理工农医类、经管类专业的同学都必须修习大一微积分. 微积分这一课程已经近乎是大学生的共同必修，且又是大多数学生的梦魇. 究竟微积分有什么用，以至于这么多人必须面对它，以及它是如何产生的呢？

微积分学的发展与应用，影响了非常多的领域. 例如，金融精算、经济学、商业管理、医药、生物、机械、水利、土木、建筑、航空及航海，特别是物理学，它的发展必须大量使用到微积分. 在微积分这门学科中，我们更多地认识了实数，进而对于函数有了更多认识，我们学会如何求变化率、怎么求极大极小值、怎么求曲线的弧长及其所围的面积、怎么求曲面的表面积及其所围的体积、怎么作近似计算等. 正如微积分的英文 calculus①，它可以说是高等数学中的基本运算法则. 微积分是一种革命性的数学思想，靠它可以解决以往未解决的许多难题，也可以更轻易地对付已解决但不好处理的问题. 除了微积分本身可以直接应用在许多领域外，许多数学分支诸如统计学、微分方程、概率论、微分几何、傅里叶分析等，皆基于微积分而发展起来，而它们也都被应用在许多其他领域. 可以毫不夸张地说，没有微积分，就

① 这一词来自拉丁文，其原意为计算用的小石子，罗马人用 calculus 来进行计算与赌博.

没有现代科学文明.

随便举些例子来说, 有一些工科专业会学「信号与系统」, 而这门课程就大量处理许多困难的积分问题. 对于物理系来说, 计算做功、转动惯量、磁通量等, 皆大量使用了微积分, 流体力学用到向量微积分与微分方程, 相对论用到微分几何. 国企系、财金系、经济系等, 也会用到微积分的概念来研究金融与经济, 甚至在经济系的高年级或研究所的同学, 还学到数学分析①, 来进一步研读经济理论. 而近年很火的机器学习, 同样用到许多高等数学, 诸如微积分、线性代数、概率论与数理统计等. 其他科系的课程也同样会用到许多高等数学, 例如图 1-1.

课程概述	地壳变形为形塑地形的重要因子之一, 也是提供地形与山脉发育的重要动力. 由于地球内部的引力作用, 地表与地壳中的岩石会产生变形. 反过来说, 我们可以利用测地学方法对地表进行观测, 进而反推各种引力在不同时空尺度下的作用情形. 本课程讲解测地学的基本原理、大地与卫星测量及雷达遥测在地壳变形观测上的应用、介绍观测的实作方式, 以及讲授地壳变形的基本理论与程序使用. 本课程适合已学习或接触过微积分、统计学、地质学、地形学与遥测学的高年级大学部与研究生选修, 作为整合以上学科于地表监测与地形演育的应用课程.

图 1.1　台湾大学地理系「地壳变形与原理」课程大纲

那么, 微积分又是如何发展起来的呢? 众所周知, 微积分是在十七世纪末, 由牛顿和莱布尼茨所发明的. 其实这样讲, 并不是说他们独自从头建立起整个微积分学说. 事实上, 微积分的概念, 早在古希腊时代便已萌芽. 到了十七世纪时, 数学逐渐开始高度发展, 有许多数学家致力于微分学与积分学的工作. 后来由牛顿与莱布尼茨, 集其大成、进一步突破, 而形成微积分学说.

微积分的思想源流, 最早可推溯到公元前四世纪的欧多克索斯 (Eudoxus), 他发展了穷尽法, 将圆视为圆内接多边形的极限、将无理数视为有理数的极限. 到后来公元前三世纪的阿基米德 (Archimedes), 也使用穷尽法来处理许多体积与面积的问题, 将穷尽法发扬光大.

到了大约十六七世纪的时候, 人们开始考虑对物理问题做一些定量的研究. 在此之前, 流行的是亚里士多德的物理学, 对于物理问题是以定性的探讨为主. 而且当中有很多描述, 与我们现在物理学上的认知是有出入的. 譬如说, 物体的重量越大, 其趋向天然位置的倾向也越大, 所以其下落的速度也越大; 天体是由特殊物质构成的, 具有特殊性质. 天体是神灵们居住的处所, 所以天体的运动是沿着最完美的曲线, 也就是圆周, 且是以最完美的速度, 也就是等速运动来做运动. 以上这些我们今日听来荒谬, 都是当时被奉为圭臬的概念. 大约十六世纪中期开始, 兴起了一股反对亚里士多德学说的思潮, 他们对于阿基米德的方法大为崇拜. 譬如说十六世纪末物理学家伽利略, 他就希望能有别于这种定性的、原因方面的探讨, 做些定量

① 数学分析是数学系的必修, 将许多大一微积分所未谈, 或是讲得较随便的地方, 作严格的探讨. 如果大一微积分的难度是「八千」, 那么数学分析起码是「十万」.

上[①] 的、现象方面的描述. 于是在比萨斜塔做了落体实验, 发现重球与轻球看起来是同时落地的. 这个时期, 就是文艺复兴时期的科学革命. 在此期间, 科学研究开始快速发展.

在当时的物理与数学中, 启发微积分快速发展的, 有四大问题:

(1) 研究物理中的非等速运动;

(2) 作出曲线的切线与法线;

(3) 找出函数的极大值、极小值;

(4) 求曲线所围出的面积及曲线的弧长.

我们先来看 (4). 多边形的面积我们都会计算, 可是一旦一个几何形状不是由直线段围成的, 而是由曲线围成的, 那该怎么办呢? 曲线所围面积之中, 最常见、最基本的例子就是圆的面积. 如前所述, 早在公元前四世纪的欧多克索斯和公元前三世纪的阿基米德, 就用穷尽法来求圆周率及圆面积. 后来公元三世纪, 三国时代的刘徽也做了类似的事. 他用割圆术[②] 逼近圆的面积, 其内涵是透过内接正多边形的方式来逼近圆.

在图 1.2 中可见, 圆内接正 16 边形看起来就已经跟圆相当接近了. 而实际上刘徽用到正 96 边形, 到了南北朝的祖冲之, 更是内接了正 24576 边形[③]. 我们用数学式子把这件事写下来:

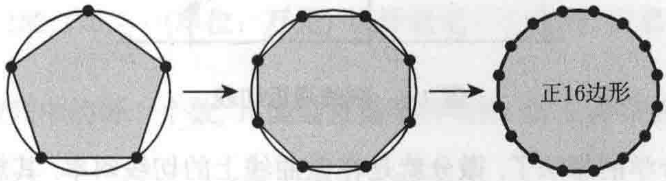


图 1.2 圆内接多边形

性质 1.1.1

设 A 为我们要计算的圆面积, A_3 为圆内接正三角形面积, A_4 为圆内接正方形面积. 以此类推, A_n 为圆内接正 n 边形面积. 于是当 n 越来越大、无止尽地大下去, 换句话说, 当 n 趋向无穷大的时候, 圆内接正 n 边形趋向圆, A_n 便会趋向于圆面积 A. 这件事若用数学式子表示, 便是

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A \tag{1.1.1}$$

式 (1.1.1) 是极限的数学写法, 将英文字 limit 去掉末两个字母, 然后挂在 A_n

① 达·芬奇: 「人们的探讨不能称为是科学的, 除非通过数学上的说明和论证. 」

② 刘徽为《九章算术》作注时说: 「割之弥细, 所失弥少. 割之又割, 以至于不可割, 则与圆合体而无所失矣. 」

③ 祖冲之所估计的圆周率已经精确到小数点后七位, 相当于千万分之一的误差, 这已是相当难得的.

的左边, 用以表示 A_n 的极限, 且下面标示 $n \to \infty$①, 用意是告诉读者, 足码 (index number) 是谁. 在这里我们的足码是 n, 接着表达这个极限是 n 趋向无穷大, A_n 会随之趋向何值.

积分学就是源自求曲线下所围面积的问题, 其所用的就是这种类似割圆术的办法. 我们这里只是先作很粗略的介绍, 先让你看看积分学是在探讨什么问题, 暂时不正式地去讨论积分.

接着我们来看第二个问题: 求曲线的切线斜率. 如果在曲线中取两个点, 将两点之间拉出一条割线, 那么这条割线的斜率我们都会做, 就是写下 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. 但如果是给定一个点当作切点, 并作过此切点的切线, 应该如何求此切线的斜率呢? 我们先看一下图 1.3, 若以图中的 A 点为切点, 过 A 有一条切线. 若将 A 点依序与 E, D, C, B 分别都拉出割线, 我们可发现这些割线越来越靠近切线.

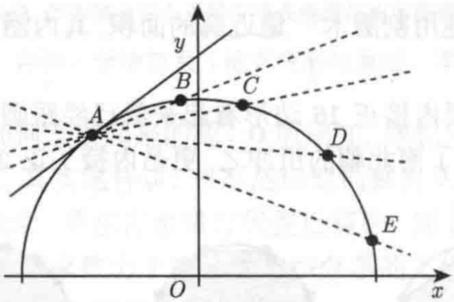


图 1.3　割线逼近切线

这就是微分学的想法了, 微分就是在做曲线上的切线斜率. 其想法是, 利用我们会算的割线斜率, 去趋向切线斜率. 如果切点的坐标是 (x_1, y_1), 先找附近一个点 (x_2, y_2), 拉出割线斜率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. 接着我们将切点 (x_1, y_1) 固定不动, 让 (x_2, y_2) 趋向切点 (x_1, y_1). 于是割线斜率就会越来越趋向切线斜率了. 我把这个想法整理如下.

性质 1.1.2

若 P 点是 $y = f(x)$ 上的一点, L 是以 P 当切点所作的切线, 而 P_2 是 $y = f(x)$ 上的一动点. 如果

$$\lim_{P_2 \to P} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1.1.2}$$

这个极限是存在的, 其值等于 m, 那么 m 就是切线 L 的斜率.

① 罗马人常用 1000 这个数字来代表「多」. 而在罗马数字中, 1000 的其中一个写法是 C|Ɔ. 后来十七世纪, 微积分先锋之一的英国数学家 John Wallis, 他在其著作《无穷的算术》中, 将 C|Ɔ略作变形, 写成 ∞ 以表示无穷大.

这里也只是先粗略介绍什么是微分, 你看不看得懂都无所谓, 我们现在暂不去求切线斜率.

综上所述, 微分学来自求切线问题, 而积分学则来自求面积问题. 两者看似截然不同, 但这当中却隐含着重要的关系:

$$\boxed{\text{它们事实上是反问题!}}$$

当十七世纪数学家们不断在微分学与积分学上有些突破时, 慢慢开始有些人看出二者间的关系, 譬如说牛顿的老师巴罗 (Issac Barrow). 最后是由牛顿与莱布尼茨, 他们都明确指出微分与积分的互逆性, 将微积分集大成. 所以, 大家公认是由他们两个创立微积分.

在以上的介绍当中, 微分与积分都牵涉极限. 极限的概念是微积分的基础, 所以市面上各家微积分教科书, 几乎都是从极限开始作介绍的①. 让读者先明白何谓极限, 并且能自己动手计算极限, 接着才继续介绍微分以及积分.

■ 1.2 数列的极限

将数字一个个地排成一列, 就是数列. 举例来说, 访查班上同学家庭年收入, 得到 $155, 99, 238, 133, 175, \cdots$ (单位: 万元) 这样就是一个数列, 顾名思义, 只不过把数字排成一列.

有时候, 数列中的每一个数, 可能会依循某种规律. 比方说等差数列

$$4, 7, 10, 13, \cdots, 91, \tag{1.2.1}$$

其规律是第一项为 4, 后面每到下一项就增加 3, 一直列到 91. 像这种情况, 通常我们简单列几项, 别人就知道我们想表达的是数列. 但这件事如果要严格说起来, 真是这样吗? 比方说, 我列出数列前四项为 $1, 4, 9, 16$, 并问你: 你知道我的第五项是什么吗? 你心想: 「嘿嘿! 这岂不简单!? 不就 25 吗? 」此时我狡黠地回答: 「哈哈! 我的第五项是 π 啦! 因为我的**一般式** 是 $n^2 + \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(\pi-n^2)}{24}$ 呀! 」.

当书写者非常确定读式子的人可以掌握规律, 便简单写几项. 如果没有这样的把握, 那么在给出数列时, 就会选择写清楚到底规律是什么. 其中一种标示规律的方法, 就是给出一般式. 举例来说,

$$\langle a_n \rangle = \langle 3n+1 \rangle_{n=1}^{30} \tag{1.2.2}$$

① 有一本书叫做*Calculus Without Limits : Almost*, 然而它还是用到极限了.

就很清楚地告诉人家, 第一项 a_1 就代 $n=1$ 得到 4, a_2 代 $n=2$ 得到 7. 总共有 30 项, $a_{30}=91$. 其实这个就是上面列的那个等差数列 (1.2.1), 要认出并不困难, 从 $3n$ 可看出: 当 n 每增加 1, 一般项 a_n 就增加 3, 所以是等差数列, 其公差为 3. 又代 $n=1$, 得知首项为 4.

如果要列出等比数列, 可能长得像这样

$$\langle a_n \rangle = \langle 5 \cdot 3^n \rangle_{n=1}^{20} \tag{1.2.3}$$

可以看出: 当 n 每增加 1, 一般项 a_n 就变为 3 倍, 所以是等比数列, 公比为 3. 又代 $n=1$, 得知首项为 15.

另一种标示规律的方法, 是使用**递归式**. 举一例子是

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} + 3, \quad 2 \leqslant n \leqslant 30 \end{cases} \tag{1.2.4}$$

想要写出这个数列的某一项, 需使用这个数列本身的前一项或前几项来计算其值. 以此例来说, 在第二项以后, 每一项都是将前一项再加上 3 而得到的. 当然也要注意, 必须讲清楚第一项 a_1, 才有办法套用递归关系得到 $a_2, a_3, \cdots$, 否则只是知道这个前后项关系也没用.

如果一个数列是用递归式定的, 有时候可以找出它的一般式. 像是我所给的递归式, 有看出来吗? 又是那个等差数列 (1.2.1) 了! 但有时候也不好找, 例如, 斐波那契数列

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.2.5}$$

你能找出一般式吗? 恐怕没这么容易, 其一般式为

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \tag{1.2.6}$$

数列的项数不一定是有限项, 也可能是无限多项. 这种数列我们称为**无穷数列**. 例如, 将等差数列 (1.2.1) 由 30 项扩写为无穷数列, 便成为

$$\langle a_n \rangle = \langle 3n+1 \rangle_{n \in \mathbb{N}} \tag{1.2.7}$$

明显地, 这个数列会越来越大, 无止尽地大下去.

数列的取值并不一定都无止尽地变大. 也有可能, 无穷数列的趋势是越来越接近一个定值. 这件事情, 我们可以用极限式来表示.

定义 1.2.1 数列的极限

若 n 越来越大, 以致无穷大时, a_n 便跟着越来越靠近 L. 那么我们就说, 当 $x \to \infty$ 时, $a_n \to L$. 若以极限式的写法就是

$$\lim_{x\to\infty} a_n = L \tag{1.2.8}$$

举例来说, 在《庄子・天下》里有一句话:"一尺之棰, 日取其半, 万世不竭."所以我们便有庄子数列: $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{2^n} \right\rangle$, 这是一个公比为 $\frac{1}{2}$ 的无穷等比数列. 明显地, 随着 n 越来越大, 庄子数列的一般项 a_n 应该会越来越小、越来越接近 0. 所以庄子数列的极限就是 0. 在符号上, 我们记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{1.2.9}$$

用以表达当 n 越来越大的时候, 数列的一般项 a_n, 其值趋向 0.

必须强调一点: **极限值与数列取值是不一样的概念**. 我们说 a_n 趋向 0, 并不是在说它会变成 0. 可能会, 也可能不会. 以庄子数列为例来说, 我们注意那句「万世不竭」. 虽说古人没有分子的概念, 以致这句话若是以物理的观点来说其实是错的, 你无法真的将物体一直切一半切不停. 但其传达的意思就是说: 虽然是会一直变小下去, 小到越来越接近 0, 但其实它并没有真正变 0 的一天. 从数学式上来看, 无论你对于 n 代入多少, $\frac{1}{2^n}$ 都不会是 0.

当数列取值趋向一个定值, 我们说它极限存在, 此数列是收敛的; 如果数列不趋向一个定值, 我们就说它极限不存在, 此数列是发散的. 所谓发散, 就是不收敛, 有两种情况. 一种情况例如, $\langle a_n \rangle = (-1)^n$, 数列取值一直在 $1, -1$ 两数之间跳来跳去, 并不趋向一个定值. 另一种情况即趋向无穷大, 此时虽然算是极限不存在, 但这种情况我们依然可用极限式表示.

定义 1.2.2 数列的极限

若 n 越来越大, 以致无穷大时, a_n 便跟着也越来越大, 以致无穷大. 那么我们就说: 当 $n \to \infty$ 时, $a_n \to \infty$. 若以极限式的写法就是

$$\lim_{x\to\infty} a_n = \infty \tag{1.2.10}$$

例题 1.2.1 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} 7.2$.

解 这个数列为