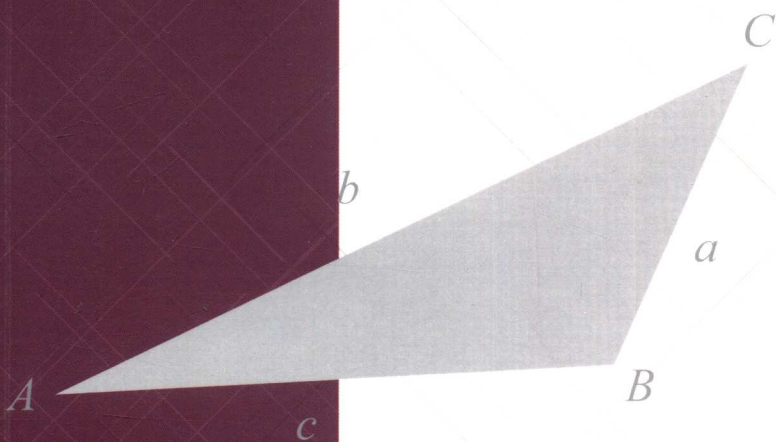


通过变式教数学： 儒家传统与西方理论的对话

(美)黄荣金 (美)李业平 主编

董建功 译



$$S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[a^2 b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2 \right]} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$



出版社公众号



天猫旗舰店

ISBN 978-7-5675-9709-9



9 787567 159709 9 >

定价：88.00元

www.ecnupress.com.cn

通过变式教数学： 儒家传统与西方理论的对话

(美)黄荣金 (美)李业平 主编

董建功 译

贵州师范学院内部使用

$$S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[a^2 b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2 \right]} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

图书在版编目(CIP)数据

通过变式教数学：儒家传统与西方理论的对话/(美)黄荣金,(美)李业平主编;董建功译. —上海:华东师范大学出版社,2019

ISBN 978-7-5675-9709-9

I. ①通… II. ①黄…②李…③董… III. ①数学教学—教学研究 IV. ①O1-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 222967 号

通过变式教数学：儒家传统与西方理论的对话

主 编 (美)黄荣金 (美)李业平
译 者 董建功
责任编辑 李文革
项目编辑 平 萍
责任校对 谭若诗
装帧设计 刘怡霖

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062
网 址 www.ecnupress.com.cn
电 话 021-60821666 行政传真 021-62572105
客服电话 021-62865537 门市(邮购)电话 021-62869887
地 址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网 店 <http://hdsdcb.com>

印 刷 者 上海昌鑫龙印务有限公司
开 本 700×1000 16 开
印 张 29.25
字 数 478 千字
版 次 2019 年 12 月第 1 版
印 次 2019 年 12 月第 1 次
书 号 ISBN 978-7-5675-9709-9
定 价 88.00 元

出 版 人 王 焰

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本

通过变式教数学：儒家传统与西方理论的对话

董建功 译

Teaching and Learning Mathematics through Variation: Confucian Heritage meets Western Theories /by Rongjin Huang and Yeping Li

Original English version of “How Chinese Acquire and Improve Mathematics Knowledge for Teaching” by Rongjin Huang, Yeping Li © (2018) by Koninklijke Brill NV, Leiden, The Netherlands. Koninklijke Brill NV incorporates the imprints Brill | Nijhoff, Hotei, Sense and Global Oriental. The Chinese version of ‘How Chinese Acquire and Improve Mathematics Knowledge for Teaching’ is published with the permission of Brill.

英文原版：博睿学术出版社（BRILL） 地址：荷兰莱顿 网址：<http://www.brillchina.cn>
Chinese Translation Copyright © 2019 by East China Normal University Press Ltd.

All rights reserved.

上海市版权局著作权合同登记 图字：09 - 2019 - 264 号。

“这本书生动细致地展现了如何教数学和学用变式教数学。对变式教学和学习变异理论进行了广泛多样的课堂教学典例分析,针对数学思维的过程和内容,将教学理论和实例结合起来。由领军学者们提供的20个不同章节为这一华人教学的基本支柱提供了一个独特而全面的视角,并展示了如何用变异的视角揭示世界各地有效教学实践之间的内在联系。因此特别强烈推荐!”

——澳大利亚墨尔本大学数学教育荣誉教授凯·斯泰西(Kaye Stacey)

“许多英国教师对运用变式教学及设计变式练习以帮助学生学好数学的想法感到兴奋。然而,充分理解和熟练地使用它需要花一些时间。本书提供了一个宝贵的资源:通过其他教师在书中分享的经验和这一重要领域中研究的深刻思考来加深理解。变异是提高英国数学成就的国家计划的核心,许多老师都问了这个问题:‘为什么我以前没有想到过这样的教学?这种体验太棒了!’”

——英国国家卓越数学教学中心小学数学部主任黛比·摩根(Debbie Morgan)

译者序

英文版《通过变式教数学：儒家传统与西方理论的对话》已于 2017 出版，该书从全球多个国家的视角，展现了一幅有丰富细节的、绚烂多彩的用变式教数学和学数学的画面。

近年来中国数学教育突出的成就吸引了全球关注的目光，也引发了对“中国学习者悖论”的探究。本书对中国数学教育独有的“变式教学理论”进行了细致的分析，其中的脉络清晰、观点客观。娓娓道来的变式教学案例分析让读者感受亲切，循着书中概念的变式、拓展的例题，并踏着教师所给的“铺垫”，可以让读者领略到教学艺术处理的乐趣。

作为生在儒家传统中的华人数学教师，似乎与生俱来就对变式教学驾驭运用自如，正如《论语》中所述“教学有法、教无定法”所传递的变式教学理念那样。许多华人教师对用变式教学及设计变式练习提升学生数学素养充满信心。从《学记》中蕴含“变异的概念”，到胡塞尔《现象学》中体现出的“唯一不变的是变化本身”思想，无不体现东西方学习理论的契合。

变式教学在华人数学课堂中虽被广泛使用，但是教师们往往忽略了变式教学所具有的系统性和理论基础。不深入领会其精髓就会导致变式不能发挥出应有的效果。华人变式教学的实践已取得了极大的进展和丰富的成果，但理论的提升仍显不足。在西方世界，一种与变式教学类似的教育理论——变异理论——正在渐渐地扩大其影响力，而背后的推动者就是教育学家费兰伦斯·马顿（Ferenc Marton）。变异理论相对变式教学，有着不同的背景，但教学效果又惊人地相似。

英文版主编黄荣金和李业平两位教授引领全球数学教育的领先学者们精心提供了这 20 篇各有侧重的论文，体现出了相当高的体系性和逻辑性。读者在通过一个个真实课堂案例感受变式教学和变异理论精妙之处的同时，也会被每个案例后准确的分析和反思所折服，真正地体会到数学教育之美，并领悟到世界各地有效教学实践之间的内在联系。本书正如《周髀算经》所述“能类以合类，此贤者

业精习，智者质也”。这些不同章节为这一华人教学的基本支柱提供了一个独特而有理解力的观点，

在此要感谢马顿及其同事所撰写的《变异理论》给华人数学教学带来的启迪，更要感谢面对复杂的数学教学工作还能开展细致研究的教研员和教师，向顾泠沅以及他的团队表示深深地敬意，感谢他们 30 多年的开创性工作，将中国数学教学的特色推出国门、发扬光大。

在翻译此书的过程中，我反复回忆曾经指导齐敏老师参加全国优质课大赛时在磨课过程中的点点滴滴，那是对《任意角》的概念课教学的反复斟酌。通过对本书各章内容的反复品味，让我深深感受到在数学教学实践中对“概念性变式”和“过程性变式”的深邃思考。

我虽然读过许多变式教学的论著，但依然明显地感到这本书是独特的，它的独特性在于它的前瞻性和对变化的关注，以及对“变式教学法”进行元分析，其高远的视角是许多论著所不能达到的。因此，我欣然接受了为华东师大出版社翻译这本书的邀请，并借此机会能够仔细阅读它的所有章节，深入细致地研读它的内容，领略到变异教学法理论的丰富内涵，当然受到的震撼也是深刻的。

由于本书的篇幅较长，翻译任务繁重，时间紧迫。在近 2 年的翻译过程中力求准确，发现并修正了原著的一些疏漏。尽管如此，翻译 20 篇极富思想深度和学术完备性的论文仍非易事，再加上原著者们来自海内外不同国家和地区的高校和研究所，语言风格迥异。限于本人水平，只能在“信、达、雅”上尽力而为，疏漏难免，望读者谅解。

这里要特别感谢华东师范大学出版社的编辑所付出的辛劳，感谢安徽师范大学数学教育硕士董阳春、张苏妍和华东师范大学教育硕士戴泽莉为本书个别章节译校所作的贡献，特别感谢浙江大学的董博语，他在赴日本攻读硕士学位的前夕，挤出时间对本书的日语人名进行校对并通读了全书，提出建议为本书润色不少。

衷心希望本书的出版，能够为国内数学教育带来新的启迪，并期待海内外华人数学教育工作者更进一步的通力合作，将华人数学教育推至新的高度。

董建功

2019 年秋于芜湖市教育科学研究所

前 言

吉尔·阿德勒(Jill Adler)^①

最近的一段时间里,我在自己的围绕“代数教与学”的硕士课程中加入了“变异的概念”。大多数学生都是有实践经验的老师,他们对所读文献很感兴趣。例如,他们说“这是同感”,“这就是我们所做的”。但他们不相信这些“同感”、“显而易见”的教学要素具有可见和明确的价值,他们反对将这一观点理论化的必要性。随着时间的推移,课程变得成熟了。同期,我在很大程度上借鉴了变异这一概念,在自己的研究中描述和解释了南非课堂中数学教学的变化,这对数学教育学中的范例化具有重要意义(Adler & Ronda, 2015, 2017; Adler & Venkat, 2014)。在我们的专业发展项目中,无论是硕士生还是与我一起工作的其他人都逐渐认识到,在他们的教学中,有必要对数学思想、过程和实践进行深思熟虑地关注,以及如何体现这些思想、过程和实践。他们进一步认识到关注“不变中的变化”(Watson & Mason, 2006)、“对比”和“类比”(Marton & Tsui, 2004)对数学概括性的建构与底层结构的价值,从而加强了这一至关重要的教学工作。慎重地对案例进行选择 and 排序使他们能够更连贯地进行教学,或者像一些人所说的那样更加“有力”。用一种语言(理论)来谈论教学的这些方面可以激发和支持协作化的实践。

因此,我欣然接受了为这本书撰写前言的邀请。我很高兴有机会能够先于其他人拿到这本书,并预览它的内容。

在引言部分,主编黄荣金和李业平对该书作了概述,介绍了该书以这种形式呈现的原因,以及他们作为主编和章节作者希望读者能学到的东西。事实上,书中有许多评论和反思性意见。书的每一部分开头都有介绍性的评论,在最后一部分有两个反思和评论章节。因此,我不会在这里作进一步的点评,而是把注意力

^① 吉尔·阿德勒,南非约翰内斯堡金山大学教育学院。

集中在各章节、各部分中吸引我的地方，因为正是在这些章节和部分中，我看到了其价值所在，并鼓励大家对它进行广泛和批判性地解读。

首先是对复杂的数学教学工作以及开展这一工作的教师的崇高敬意。在顾、黄和马顿(2004)的研究中，顾泠沅的开创性工作激励了许多通过变异原理进行数学教学的研究。接着就是将数学教学研究工作的关键点所需要的东西描述得直观和清晰。当然，所教的与所学的不同，但教什么——可供学习——是至关重要的。书中各章节所研究报道的“主体”主要是华人，但也包括其他国家教师，他们是发展中的变式故事的领导角色。在对第三节的介绍中，康拉德·凯勒(Konrad Krainer)也注意到了这一点，他在该章节中描述了教师作为数学教育研究和实践中的关键“利益相关者”的地位。教师是发展数学知识和理解学校数学教学的重要参与者。这本书的各章都有很多要学习的地方，既有对具体课堂实践进行研究的方法，也有对作为研究者的新任数学教师在向经验丰富的教师学习教学中的归纳。

这不是第一本突出呈现中国数学教学实践的书，也不会是最后一本。用主编的话说，它的独特性在于它的前瞻性和对变化的关注。这包括对在中国出现并最初由顾泠沅描述的“变式教学法”进行元分析；在代数和几何课中探索这类教学法，以及在不同类型课(复习、问题解决)、教科书和其他课程文本中的探索应用；参与研究和撰写关于变异思想和理论如何在其他地方数学教育研究中的应用。它的广泛目标是通过变化推进对数学教学跨情境的系统检测。

这接下来就引出了在这本书中对我来说最有感触的地方：一种用来描述变异教学法的语言，因为它已经在中国和其他地方被使用。该术语阐述为“变式(Bianshi)”，并区分为概念性变式和过程性变式两种情况；“铺垫(Pudian)”(脚手架)以及锚定知识、知识链等相关概念，为读者参与对这些实践研究的解释，也为自己的研究和教学联系起来提供了便利。在我看来，最有感触的(也许这是翻译成英语的原因)是与其他地方数学教育研究中用词的类似。然而，这种用法往往有着不同的细微含义，引发了在必须这样做以进一步讨论我们在工作时对命名结构含义的思考。这本书的关键章节梳理了使用变式/异的方法和理论的异同，使读者能够更好地处理跨背景的系统检测和运用。

在这里，我将只关注概念性和过程性变式之间的区别，因为在数学教育的文

献中,这些词(概念、过程)非常丰富,有时指的是知识,有时指的是理解,有时指的是熟练程度。在我目前与教师的课堂学习研究工作中(见 Adler & Ronda, 2017 a),制定研究性课堂的第一项任务是确定“课堂目标”。我们还提到这个目标,在马顿(Marton)等人(op cit)之后称为“学习目标”。我们发现区分“目标”是一个数学概念(例如,相等的概念或“解或求解”的含义)还是一个数学过程(例如,寻找方程解的算法或方法/策略)是有用和重要的。在中学早期就引入了相等和解的概念以及用方程式解决问题的方法和策略在我们的课程中也是很重要的。然后,根据和重点是什么,在课堂中的例子、任务、表述和相关的思考和讨论中需有实质性的不同。在这本书的许多章节报道的研究中使用了过程性和概念性变式之间的区别来分析课堂以及其中可供学习的内容。正如我从这些研究中所理解和学习的那样,我赞赏这里与教学工作的紧密联系:在何时和如何转换一个图形,是教学内容的要素使然,为此可提供一个新的概念,选择一个具有多种解决问题的策略。在这里使用“过程性”绝不是贬义的,与没有理由的规则概念没有任何关系(知其然不知其所以然),它与基尔帕特里克(Kilpatrick)、斯瓦福德(Swafford)和芬德尔(Findell, 2001)所阐述的教学中的程序流畅是一致的。然而,我相信,在使用这些结构的过程中,仍有许多工作要做,以便更清楚地界定我们在使用它们时意味着什么,我们怎样在教和学数学的实践中“看到”这些东西,以及分析它们是如何起作用的。

我的第三个问题是“为什么是现在”,为什么教育学中的变异现在吸引着注意力,抑或现在重新引起注意?我在20世纪80年代中期第一次发现了“变异”的概念,当时我还是一名职前小学数学教师教育者。我在工作中使用了迪尼斯(Dienes, 1973)的知觉变异。看到迪尼斯在中国早期的研究工作的影响是很有趣的。然而,当我把注意力转移到多语种数学课堂的语言实践以及教师知识发展的实践时,“变异”并没有体现出特点。一个简短的答案是,我的工作处于社会转向之中(Lerman, 2000),它是由社会正义的兴趣所塑造的,而不是由认知或感知塑造的,但这却忽略了维果茨基理论(Vygotskian theory)的深度和广度。然而,大约20年后的今天,变异概念对于研究和实践的价值已成为人们关注的焦点。在南非严重不平等和贫困的背景下,数学教师的专业发展和研究项目也变得更重要了。

一个初步的建议是，当我们越来越适应数学教学的复杂工作和在不同课堂背景下进行数学教学的核心实践时，变异是一种富有成效的隐喻/构造/工具（取决于它的使用方式），这也是我对这本书中的一些章节产生共鸣的原因所在。教学法的变异也许就是这样的核心实践之一。本书在这一刻的贡献不仅在于它提供了用英文获取中国数学教育研究成果的一个重要领域，而且还在于它为将这一工作应用于课程和教育学的其他地方提供了一种观点，并促进了世界各地对变式教学法的进一步研究。

参考文献

- Adler, J. , & Ronda, E. (2015). A framework for describing mathematics discourse in instruction and interpreting differences in teaching. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 19(3),237 - 254.
- Adler, J. , & Ronda, E. (2017a). A lesson to learn from: From research insights to teaching a lesson. In J. Adler & A. Sfard(Eds.), *Research for educational change: Transforming researchers' insights into improvement in mathematics teaching and learning* (pp.133 - 143). London: Routledge.
- Adler, J. , & Ronda, E. (2017b). Mathematical discourse in instruction matters. In J. Adler & A. Sfard(Eds.), *Research for educational change: Transforming researchers' insights into improvement in mathematics teaching and learning* (pp.64 - 81). Abingdon: Routledge
- Adler, J. , & Venkat, H. (2014). Teachers' mathematical discourse in instruction: Focus on examples and explanations. In M. Rollnick, H. Venkat, J. Loughran, & M. Askew (Eds.), *Exploring content knowledge for teaching science and mathematics* (pp.132 - 146). London: Routledge.
- Dienes, Z. P. (1973). A theory of mathematics learning. In F. J. , Crosswhite, J. L. Highins, A. R. Osborne, & R. J. Shunway (Eds.), *Teaching mathematics: Psychological foundations* (pp.137 - 148). Ohio, OH: Charles A. Jones Publishing.
- Gu, L. , Huang, R. , & Marton, F. (2004). Teaching with variation: An effective way of mathematics teaching in China. In L. Fan, N. Y. Wong, J. Cai, & S. Li(Eds.), *In How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders* (pp.309 - 348). Singapore: World Scientific.
- Kilpatrick, J. , Swafford, J. , & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children*

- learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. In J. Boaler(Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 19 - 44). Westport, CT: Ablex.
- Marton, F. , & Tsui, A. B. M. (2004). *Classroom discourse and the space of learning*. Mahwah, NJ; Lawrence Erlbaum Associates.
- Watson, A. , & Mason, J. (2006). Seeing an exercise as a single mathematical object: Using variation to structure sense-making. *Mathematical Thinking and Learning* , 8 (2),91 - 111.

致 谢

我们谨借此机会感谢我们 45 位作者承担的义务和所做的贡献。对于每一个参与者来说,这都是一个很好的学习和合作机会。事实上,在过去两年中各章节都经过了多次交换审核与修订。我们的作者作出了巨大努力,以确保其章节的高质量。我们还要感谢外聘审稿人在阅读和评论手稿方面提供的帮助,没有这些建设性投入,就不可能有如此高质量的章节汇编。

这些审稿人包括:

埃弗尔·科尔斯(Afl Coles),英国布里斯托尔大学;

高桥昭彦(Akihiko Takahashi),美国德保大学;

安杰伊·索科洛夫斯基(Andrzej Sokolowski),美国孤星学院;

阿瑟·B·鲍威尔(Arthur B. Powell),美国纽瓦克罗格斯大学;

陈倩(Qian Chen),四川师范大学;

江春莲(Chunlian Jiang),澳门大学;

格伦达·安东尼(Glenda Anthony),新西兰马西大学;

杰里米·斯特莱尔(Jeremy Strayer),美国中田纳西州立大学;

王科(Ke Wang),美国得克萨斯州农工大学;

高宝玉(Ko Po Yuk),香港教育学院;

莎拉·K·布莱勒-巴克斯特(Sarah K. Bleiler-Baxter),美国中田纳西州立大学;

萨莎·王(Sasha Wang),美国博伊西州立大学;

李文俊(Wenjun Li),美国南伊利诺斯州立大学;

先威·Y·范哈本(Xianwei Y. Van Harpen),美国威斯康星大学密尔沃基分校。

我们感谢中田纳西州立大学和得克萨斯州农工大学在编辑和出版这本书的过程中给予的各种支持。我们特别感谢来自中田纳西州立大学的学术研究和创

新活动拨款为这本书的出版提供了资金。最后,同样重要的是,我们感谢凯尔·普林斯博士(Dr. Kyle Princ)对整本书手稿的全程专业编辑,以及迈克尔·鲁格先生(Mr. Michael Rugh)对该书章节校勘的协助。

目 录

前言 / 001

致谢 / 001

第一部分 理论视角 / 001

1. 引言 / 002
2. 中国数学变式教学的理论与发展 / 011
3. “变式”与学习变异理论：数学教学中的变与不变的两大框架的阐释 / 040
4. 基于工具的数学教育学中的变异——以动态虚拟工具为例 / 064
5. 变异教育学中各种概念的综合 / 080

第二部分 从教育学视角看中国课堂教学中的变式 / 099

- 引言 / 100
6. 中国数学问题解决教学的特点——从变式的角度分析一节课 / 104
 7. 完全平方公式的变式教学 / 118
 8. 几何概念的变式教学——一节上海课的案例研究 / 142
 9. 用变式教几何复习课——一个案例研究 / 161
 10. 通过变式教代数：对比、概括、融合和分离 / 178

第三部分 从教育学视角看中国课程与教师专业发展的变异原则 / 197

引言 “教学计划只是教师对学生学习的假设” / 198

11. 遴选中国数学教材中的运用变式任务的策略 / 202

12. 一名专家型教师使用变式教学帮助初中数学教师的专业学习 / 229

13. 课堂学习研究中的数学变式教学 / 255

第四部分 世界各地变异教学的运用 / 285

引言 应用变异理论 / 286

14. 通过变式改进教学：日本的视角 / 290

15. 在美国通过变式发展代数推理能力 / 311

16. 利用多样的变异突出多解任务和建模的关键方面 / 330

17. 学会用变异教学：源自瑞典学习研究的经验 / 344

第五部分 评注和结论 / 363

18. 通过变异教学——一个亚洲视角：学习的变异理论是变化的吗 / 364

19. 变异教学——一个欧洲视角 / 379

20. 变异理论中的问题及其对教学选择的启示 / 397

关于作者 / 432

主题索引 / 444