

GeoGebra 可视化 与微积分教学

◆汪吉 著



东北林业大学出版社
Northeast Forestry University Press

GeoGebra 可视化 与微积分教学

◆ 汪吉 著



东北林业大学出版社
Northeast Forestry University Press

版权专有 侵权必究

举报电话 : 0451-82113295

图书在版编目 (CIP) 数据

GeoGebra 可视化与微积分教学 / 汪吉著. — 哈尔滨 :
东北林业大学出版社, 2019.9
ISBN 978-7-5674-1934-6

I . ① G... II . ①汪 ... III . ①微积分—计算机辅助教
学—应用软件 IV . ① O172-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 218937 号

责任编辑: 张立垚

封面设计: 姜 丽

出版发行: 东北林业大学出版社

(哈尔滨市香坊区哈平六道街 6 号 邮编: 150040)

印 装: 哈尔滨圣铂印刷有限公司

规 格: 185mm×260mm 16 开

印 张: 10

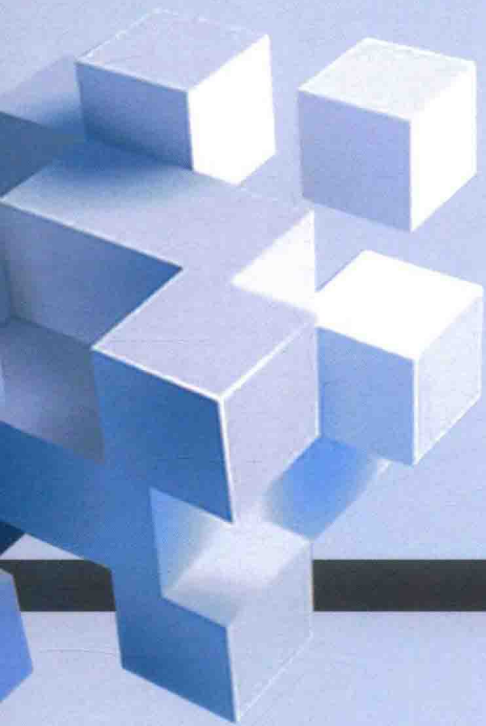
字 数: 175 千字

版 次: 2019 年 9 月第 1 版

印 次: 2019 年 9 月第 1 次印刷

定 价: 58.00 元

如发现印刷质量问题, 请与出版社联系调换。电话: 0451-82113296 82191620




作者简介

汪吉,男,汉族,出生于1981年12月,湖北武汉人。2008年毕业于武汉理工大学应用数学专业,获理学硕士学位。现任武汉市广播电视大学汉阳区分校(武汉市汉阳区社区教育学院)教师,主要从事高等数学教学及研究工作。

责任编辑：张立垚

封面设计：姜 丽

策划定制： 树上微出版
www.shushang.com

前言

GeoGebra 是一款由美国数学家 Markus·Hohenwarter 于 2001 年设计的结合几何、代数、微积分、概率统计等功能的免费数学软件。GeoGebra 以点、线、向量、平面、函数、曲线等为基本操作对象，以可视化功能为特色，深入数学学科内部，将抽象的数学思维进行可视化表达，揭示数学知识之间的内在联系，非常适合教师教学演示、学生自主探究和师生互动交流。GeoGebra 功能强大，适用于从小学、中学到大学各阶段的数学教学活动。迄今为止，GeoGebra 已在欧洲和美国获得过数十项相关领域的大奖，30 多个国家将 GeoGebra 写入教科书，并把 GeoGebra 作为教师职业发展和培训的重要内容。

相比而言，GeoGebra 引入国内的时间较晚，应用也大多局限于初等数学领域，对基于 GeoGebra 的高等数学教学研究尚处于探索阶段，相关资料非常有限。本书试图以高等数学中的微积分部分为载体，探索如何将 GeoGebra 融入微积分的教学过程。作者通过实践表明，教师运用 GeoGebra 能使抽象的概念变形象、枯燥的内容变有趣、静态的图形变动态，教学过程生动起来，从而把原本难以描述的数学知识讲清楚。学生使用 GeoGebra，通过亲自操作，主动去发现、探索、总结数学规律，能加深对数学知识、数学思想的理解。这些都使得学习效果得到了有效的改进。

全书分为两篇，具体内容如下：

第 1 篇预备知识是 GeoGebra 软件的概述，包括软件特点、用户界面、基本操作对象等，使读者对 GeoGebra 有一个大概的了解。

第 2 篇是本书的主要章节。本篇精选了微积分教学中的 40 个重要内容，设计基于 GeoGebra 的可视化教学案例。对每个案例的构造步骤、操作过程都做了详细的解释，有的案例后还附有说明，以帮助读者进一步理解案例的设计思路和技术问题。读者可以参照书中的案例编制相关教学课件。在这个过程中，边编制、边揣摩、边改进，如此既可以领会到 GeoGebra 的强大功能，又可以提高 GeoGebra 的运用水平。

本书在撰写过程中参考了国内外大量的研究资料和相关文献，吸收了国内外

许多专家学者的真知灼见。在此，向这些专家学者表示诚挚的感谢。感谢作者所教的学生们，他们在 GeoGebra 可视化教学活动中提出了许多有趣的问题，作者在帮助他们解决问题的过程中积累了宝贵的经验。感谢东北林业大学出版社的张立垚老师为本书的出版做了大量的工作。

由于时间仓促，作者水平有限，加之 GeoGebra 版本还在不断更新中，本书难免存在一些不足之处，有的提法可能不太严谨，有的指令与新版软件存在差异，有的案例构造过程还能进一步优化，这些还恳请读者批评指正。

汪吉

2019年7月

目录

CONTENTS

第 1 篇 预备知识

第 1 章 GeoGebra 软件概述	3
1.1 GeoGebra 简介	3
1.2 GeoGebra 的用户界面	5
1.3 GeoGebra 的基本对象	11

第 2 篇 微积分可视化教学案例

第 2 章 函数和图形	21
2.1 函数的定义与图形	21
2.2 函数的奇偶性.....	26
2.3 函数的周期性.....	29
第 3 章 极限和连续	32
3.1 数列的极限.....	32
3.2 函数的极限（自变量趋于有限值）	35
3.3 函数的极限（自变量趋于无穷大）	38
3.4 单侧极限.....	41
3.5 重要极限（一）	44
3.6 重要极限（二）	48
3.7 函数的连续性.....	53
3.8 函数的间断点.....	54
3.9 介值定理.....	58

第 4 章 函数的导数	62
4.1 导数的概念.....	62
4.2 函数可导性与连续性的关系	67
4.3 高阶导数.....	70
4.4 由参数方程所确定的函数的导数	73
4.5 函数的微分.....	77
4.6 罗尔定理.....	80
4.7 拉格朗日中值定理	82
4.8 柯西中值定理.....	84
4.9 泰勒公式.....	89
4.10 曲线的凹凸性.....	91
4.11 函数单调性和曲线凹凸性的判定法	96
4.12 曲率的概念	99
4.13 曲率圆与曲率半径.....	102
4.14 方程的近似解 (二分法)	105
4.15 方程的近似解 (切线法)	110
第 5 章 函数的积分	113
5.1 定积分的概念.....	113
5.2 定积分的近似计算 (一)	118
5.3 定积分的近似计算 (二)	122
5.4 定积分的性质 (一)	126
5.5 定积分的性质 (二)	128
5.6 定积分的性质 (三)	130
5.7 定积分的性质 (四)	132
5.8 定积分中值定理	134
5.9 微积分基本公式	136
5.10 反常积分	139
5.11 定积分的应用 (平面图形的面积)	144
5.12 定积分的应用 (旋转体的体积)	146
5.13 定积分的应用 (平面曲线的弧长)	149
参考文献	154

第 1 篇

预备知识

第 1 章 GeoGebra 软件概述

1.1 GeoGebra 简介

GeoGebra 是 2001 年由美国数学家 Markus·Hohenwarter 教授发明的可视化数学软件。“GeoGebra”是由“Geometry（几何）”的前三个字母与“Algebra（代数）”的后五个字母组合而成的，意味着软件拥有同时处理几何绘图和代数计算的能力。然而，随着跨国专家团队的不断开发，GeoGebra 的功能已不再局限于几何与代数，还扩展到微积分、概率统计、逻辑运算等领域，几乎可以完成从启蒙教育到大学教育中所有的数学教学，已在欧洲及美国荣获数十项相关领域的大奖。目前，GeoGebra 在全世界成立了 150 多所研究院，积极开展 GeoGebra 的本土化开发、研究及培训工作，软件已被翻译成 58 种语言，为 190 多个国家的教育工作者所使用。

同其他数学软件相比，GeoGebra 的特点主要集中在以下几个方面。

1.1.1 可视化功能

GeoGebra 设计定位于数学教育，非常重视运用于数学教学中的演示，具有强大的可视化功能。GeoGebra 不仅可以绘制二维图形，而且能绘制很精美的三维图形，帮助用户进行直观分析。图形的各种属性，如动画、色彩、标签、说明等都可以进行详细设置。最重要的是它将数形结合的要求体现得淋漓尽致，能实现几何图形与函数方程的同步变化。GeoGebra 几乎能将从初等数学到高等数学的基本知识都直观地展示出来，使教学过程更加生动、形象，从而帮助学习者更好地发现数学、理解数学、构建数学。

1.1.2 解决数学问题

利用 GeoGebra 能解决常见的数学问题，除了基本的几何绘图与代数计算外，还包括微积分、概率、统计、图论、最优化、微分方程等诸多领域。其中既包括无误差的符号计算，也包括满足一定精确度要求的数值计算，如它可以做多项式

的运算、展开和分解，可以求方程的精确解和近似解，求函数的极限、导数、积分和幂级数展开等。

1.1.3 操作简单

相对于众多的数学软件，GeoGebra 的操作比较容易上手。即使是没有任何编程经验的用户，只需要熟悉计算机的基本操作，并有相应的数学知识和思维基础，就能完成大部分的简单操作。GeoGebra 集成了大量作图工具图标，只需点击鼠标就可绘制点、线段、直线、向量、多边形、平面、空间几何体等对象，也可以通过输入简单的指令来绘制函数、隐式曲线、参数曲线、参数曲面等对象。GeoGebra 还具有指令联想补全功能，会自动显示与输入接近的指令。在指令栏右侧有指令说明区，通过双击或复制可直接调用，所以无须记忆相关指令便能操作。

1.1.4 支持脚本程序

GeoGebra 除了具有简单便捷的操作外，还为用户提供了更深层次的功能，也就是脚本程序。GeoGebra 支持两种脚本，一种是 GeoGebra 专属脚本，一种是 JavaScript 通用脚本。利用脚本程序可以扩充软件的功能，进行更高级的操作，这样可以使用户从软件设计者所制定的框架中解放出来，编写出用途更广、功能更强的课件。

1.1.5 免费开源

软件收费的高低是制约数学软件在教学中推广应用的一大障碍。GeoGebra 完全免费，可以从互联网上自由下载，软件的使用不受任何相关因素的制约，能满足不同地区、不同层次学校师生教学的需要，这也是 GeoGebra 能在欧美国家盛行的原因之一。GeoGebra 不但使用时完全免费，而且源码是开放的，所以 GeoGebra 的更新速度很快，功能也日益强大。

1.1.6 易于交流学习

GeoGebra 直接基于 Java 程序编写，所以它具有 Java 的很多优点：GeoGebra 具有良好的网页支持功能。即使对没有安装 GeoGebra 的设备，只需打开 GeoGebra 导出的网页文件就能浏览和操作；GeoGebra 可以跨平台使用，如可在 Windows、MacOS、Linux、Android、iOS 等操作系统中无障碍地运行，特别是能在智能手机、平板电脑等移动终端上使用，对有移动学习需求的学习者提供了便利，使他们能在任何地方进行个性化的数学学习。

1.2 GeoGebra 的用户界面

1.2.1 场景

在Windows操作系统下,第一次运行GeoGebra(本书以简体中文版5.0.498.0-d版为操作版本)时,软件会出现如图1-1所示的默认界面,称之为软件的“场景”。

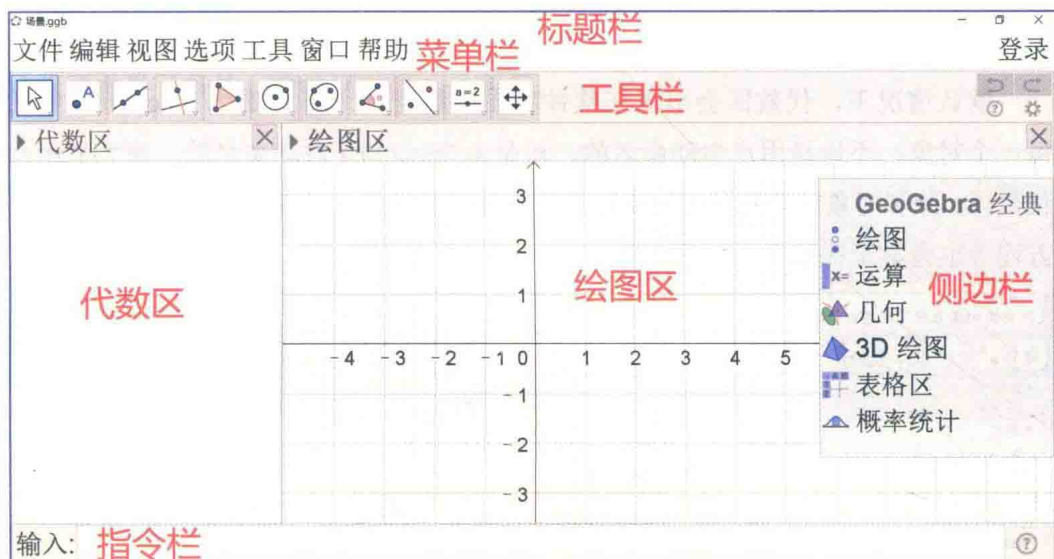


图 1-1

“标题栏”：显示当前编辑的文档名称。

“菜单栏”：显示基本的功能选项。在默认的情况下，菜单栏由“文件”“编辑”“视图”“选项”“工具”“窗口”“帮助”等部分组成。

“工具栏”：GeoGebra 列出了大量常用的工具图标让用户能直观便捷地操作。当软件的某个视图处于激活状态时，该视图区域可用的工具图标会相应显示在工具栏中。有些工具图标带有下拉三角箭头，可以下拉选择更多同类的工具。

“指令栏”：在默认的情况下，指令栏位于软件的最下方。GeoGebra 提供了500多个指令，并支持中文指令（注意：指令中的标点为英文）。通过在指令栏输入指令可以完成几乎所有的软件操作，其中许多操作是利用工具图标无法完成的。掌握 GeoGebra 指令是熟练使用软件的关键。

“代数区”：负责列出对象的代数属性。

“绘图区”：显示对象图形的区域，可以让用户获得直观的操作与体验。

“侧边栏”：点击软件界面右边框上的三角箭头，显示软件的侧边栏，通过点击侧边栏上相应的按钮可以快速切换视图。

1.2.2 视图

在 GeoGebra 界面中，最主要的工作窗口就是视图。视图是构造、操作、显示对象的区域，是软件的主要工作空间。GeoGebra 视图包括“代数区”“表格区”“运算区”“绘图区”“3D 绘图区”“概率统计”等，不同视图可以通过“视图”菜单项或侧边栏进行切换。

1.2.2.1 代数区

默认情况下，代数区会出现在软件界面的最左侧（图 1-2）。GeoGebra 中的每一个对象，不论是用户主动命名的，还是由 GeoGebra 自动命名的，都会显示在代数区。除了对象的名称外，对象包含的各种代数属性：坐标、长度、面积、数值、方程等也会显示在这里。

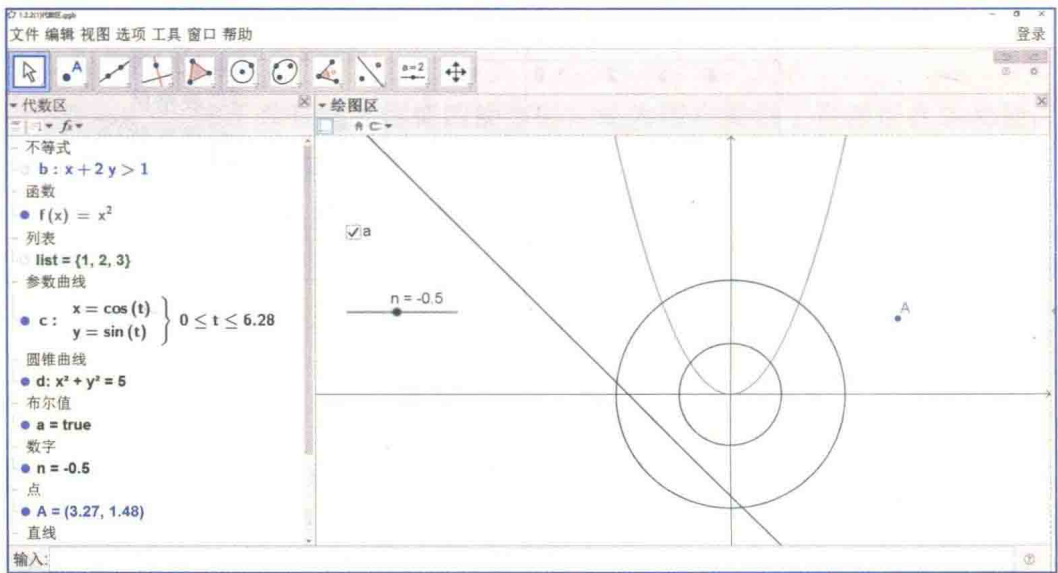


图 1-2

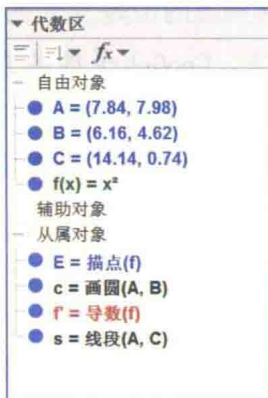


图 1-3

代数区内的对象依据类别分成不同的群组，用户可按从属关系、对象类型、图层、作图顺序等方式将对象重新排列。例如，从属关系是将对象分成自由对象和从属对象。如果一个新构建的对象没有使用已有对象，就称为自由对象；否则就是从属对象（图 1-3）。

如果想在代数区隐藏某个对象，可以将其设定为辅助对象。右击选中的对象，在快捷菜单中选择“属性”，在“属性”对话框的“常规”选项卡中勾选“辅助对象”，

该对象便成为辅助对象。默认情况下，辅助对象在代数区是不显示的，需要显示时可以右击代数区空白处，在快捷菜单选择“辅助对象”。

当要修改某个对象时，只需在代数区双击该对象，重新编辑其定义，完成后按回车即可。

1.2.2.2 表格区

GeoGebra 的表格区类似 Excel，具有处理、分析数据的功能，为研究概率统计问题提供了条件。表格区如图 1-4 所示。

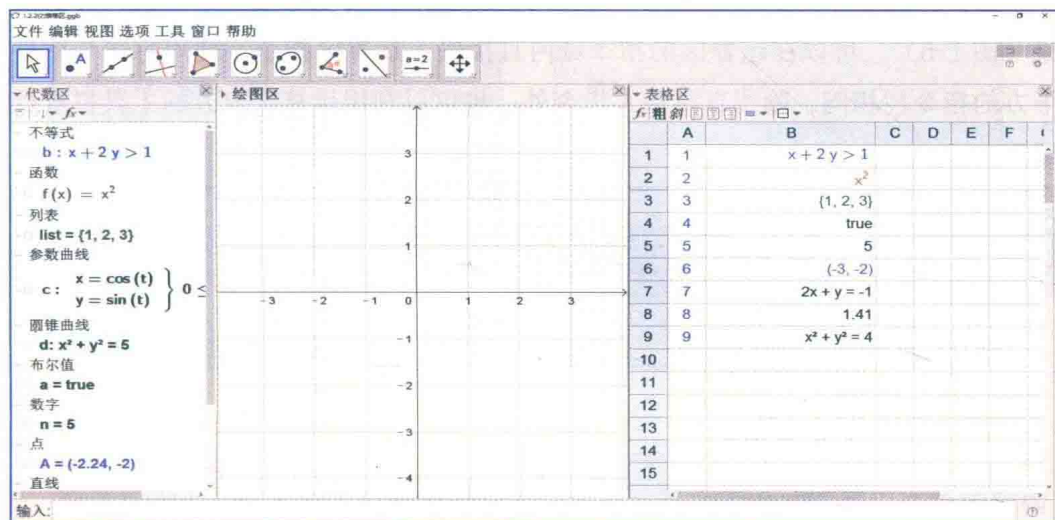


图 1-4

单元格是表格区的最小组成元素，每个单元格有唯一的地址方便引用，如第一行第一列的单元格地址为“A1”。单元格的地址可用于指令中以引用单元格。类似于 Excel 的“R1C1”引用，GeoGebra 也可以用行号和列标的数字形式来引用单元格，如指令“单元格(<列序>,<行序>)”。

在 GeoGebra 中，单元格的引用也有所谓相对引用和绝对引用之分。如复制一个单元格的内容到另一个单元格时，会默认将所有的相对引用关系也复制到目标位置，若要使用绝对引用，可以在涉及的单元格的行号或列标前插入“\$”。

除了可以储存数字外，其他类型的对象也可以存储在单元格内（图 1-4）。向单元格中输入数据，除直接输入外，还可以采用从代数区拖拽对象、在指令栏输入有关指令、导入数据文件（外部数据）、记录到表格等方式。其中记录到表格的操作方式：右击绘图区中的对象，在快捷菜单中选择“记录到表格”，就可以将对象的代数属性，如坐标、角度、长度、面积等记录到单元格中。

在单元格中输入任何数据，都将创建新的对象，并且新建的对象不会随原对象的删除而删除。例如，将点 $A = (3, 5)$ 从代数区拖拽到单元格中，会生成新点 $A1 = (3, 5)$ ，删除点 A 后，点 $A1$ 不会随之删除。

1.2.2.3 运算区

运算区主要包括表达式的符号计算、数值计算，表达式的分解、展开、检查，方程或方程组的精确求解、近似求解，导数、积分、概率统计的运算等功能，软件所支持的数学运算都能在这里完成。

运算区由多个可执行块组成，每个可执行块上方为指令域，下方为执行的结果（图 1-5）。可以在运算区的指令域内直接输入运算区指令，使用方式与软件下方的指令栏相同。除了直接输入指令外，也可以利用运算区上方的工具栏进行运算。

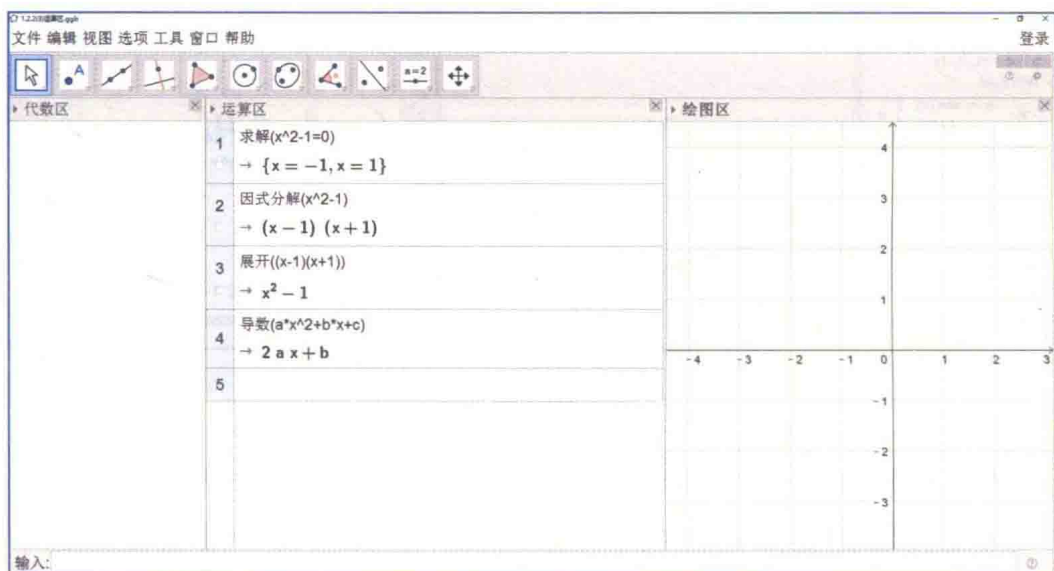


图 1-5

运算区区别于其他视图的主要特点是能进行符号计算。所谓符号计算，是相对于数值计算而言的，符号计算处理的对象和结果都是符号（表达式）。运算区的符号计算是基于软件的计算机代数系统（GeoGebra’ CAS）实现的。例如，在运算区的指令域输入指令“导数 $(a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$ ”，结果如图 1-5 所示。

1.2.2.4 绘图区

绘图区是显示对象图形的区域，是 GeoGebra 的核心视图。通过绘图区左上角的样式栏可以设置绘图区的坐标轴、网格等样式。如需更详细地设置，可以右击