

# 数学建模的实践

## (上册)

裘哲勇 潘建江 主 编 ©



西安电子科技大学出版社  
<http://www.xduph.com>



XDUP 565900

封面设计： 汪易传播

## 数学建模的实践（上册）

### 内容简介

本书是从杭州电子科技大学近十年来参加全国大学生数学建模竞赛获得一等奖的论文和参加美国大学生数学建模竞赛与交叉学科建模竞赛获得特等奖的论文中精选出的20篇论文加工整理而成的。

上册选自 CUMCM2007—A题、CUMCM2007—B题、CUMCM2008—A题、CUMCM2008—B题、CUMCM2009—B题、CUMCM2010—A题、CUMCM2012—A题、CUMCM2014—A题、CUMCM2016—A题及 ICM2010—C题，共10篇论文。每篇论文都按照竞赛论文的写作要求，包括摘要、问题重述、问题分析、模型假设与符号说明、模型的建立与求解、模型的分析与检验、模型的评价与改进等内容。书中论文几乎完整地保持了参赛论文的原貌，同时在每篇论文后给出了点评。

本书可供参加全国大学生数学建模竞赛和参加美国大学生数学建模竞赛的大学生学习和阅读，也可作为数学建模课程教学和竞赛培训的案例教材，还可供从事相关学科教学和研究工作的科技人员参考。

ISBN 978-7-5606-5357-0



9 787560 653570 >

定价：36.00元

# 数学建模的实践

## (上册)

裘哲勇 潘建江 主编

西安电子科技大学出版社

## 内 容 简 介

本书是从杭州电子科技大学近十年来参加全国大学生数学建模竞赛获得一等奖的论文和参加美国大学生数学建模竞赛与交叉学科建模竞赛获得特等奖的论文中精选出的 20 篇论文加工整理而成的。

上册选自 CUMCM2007—A 题、CUMCM2007—B 题、CUMCM2008—A 题、CUMCM2008—B 题、CUMCM2009—B 题、CUMCM2010—A 题、CUMCM2012—A 题、CUMCM2014—A 题、CUMCM2016—A 题及 ICM2010—C 题,共 10 篇论文。每篇论文都按照竞赛论文的写作要求,包括摘要、问题重述、问题分析、模型假设与符号说明、模型的建立与求解、模型的分析与检验、模型的评价与改进等内容。书中论文几乎完整地保持了参赛论文的原貌,同时在每篇论文后给出了点评。

本书可供参加全国大学生数学建模竞赛和参加美国大学生数学建模竞赛的大学生学习和阅读,也可作为数学建模课程教学和竞赛培训的案例教材,还可供从事相关学科教学和研究工作的科技人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

数学建模的实践.上册 / 裴哲勇,潘建江主编. —西安:西安电子科技大学出版社, 2019.10

ISBN 978 - 7 - 5606 - 5357 - 0

I. ① 数… II. ① 裴… ② 潘… III. ① 数学模型—文集 IV. ① O22 - 53

### 中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 137148 号

策划编辑 陈 婷

责任编辑 武翠琴

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 咸阳华盛印务有限责任公司

版 次 2019 年 10 月第 1 版 2019 年 10 月第 1 次印刷

开 本 787 毫米×1092 毫米 1/16 印张 15.25

字 数 359 千字

印 数 1~1000 册

定 价 36.00 元

ISBN 978 - 7 - 5606 - 5357 - 0/O

**XDUP 5659001 - 1**

\* \* \* 如有印装问题可调换 \* \* \*

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

# 前 言

数学建模教学作为培养创新型人才的重要手段已经得到各个高校的广泛认同,并在各校大力推行。作为一所地方性大学,杭州电子科技大学开展数学建模活动始于1995年,在随后的20多年时间里,无论是在数学建模教学中还是在数学建模竞赛中都取得了优异的成绩,得到了全国组委会、省教育厅以及省内外兄弟高校的高度评价。截至2018年,杭州电子科技大学在全国大学生数学建模竞赛中共获得国家一等奖46项,二等奖89项;2006年后参加美国大学生数学建模竞赛与交叉学科建模竞赛,获得二等奖以上奖项118项,并于2010年获得特等奖。

在数学建模竞赛方面,杭州电子科技大学起初以参赛为主要目的,后经过多年的发展,将数学建模课程的指导思想确定为培养学生的创新实践能力,让尽可能多的学生受益。数学建模活动不断走向深入,由阶段性活动转为日常教学活动与课外科研活动。在教学方面,数学建模教学已经形成了多个品种、多种层次、多种方式的教学格局。对于不同层次,理论教学学时分别为32、48、64学时,并辅以上机实践训练和课外建模实践。此外,还面向全校开设了数学建模实验选修课以及数学建模课程设计。由于有着丰富完善的课程体系,每年吸引1500多名学生修读此课。在竞赛方面,2000年起每年举办校内竞赛,之后参加全国竞赛,再到来年参加美国竞赛。在学生科技方面,学生从参加竞赛发展到与教师一起做课题、撰写学术论文或参加新苗人才计划与创新杯等。

2003年,杭州电子科技大学“数学建模”课程被评为首批省级精品课程,数学建模团队于2008年被评为浙江省省级教学团队,数学建模活动相关成果分别获得1997年、2001年、2009年浙江省教学成果二等奖,《数学建模》教材2014年入选“十二五”国家级规划教材,并被评为浙江省普通高校“十二五”优秀教材。这是多年来杭州电子科技大学从事数学建模的同仁们共同努力的结果,也是对我们的鞭策和鼓励。

为了对学校数学建模的成果进行总结,进一步提高数学建模水平,并提高

所有参加数学建模活动的同学们的参赛水平，我们搜集整理了近十年来优秀的获奖论文，汇编成书。

本书(上、下册)收录了2007—2016年杭州电子科技大学参加全国大学生数学建模竞赛部分获得一等奖的论文和参加美国大学生数学建模竞赛与交叉学科建模竞赛获得特等奖的论文，共20篇。本书对收录的论文进行了统一的编排整理、点评，但论文的主体内容、建模方法、文章结构、计算结果等基本保持了原来的面貌。这样可使读者真实地看到获奖者在三天(美国数学建模竞赛是四天)比赛期间的论文成果，借鉴参赛论文的写作风格和方式，提高自己撰写论文的能力。

每篇论文的程序和详细数据见数字课程网站——<http://mooc.chaoxing.com/course/95314349.html>。

本书的出版得到了杭州电子科技大学教务处的全力支持，同时得到了省级数学建模教学团队负责人陈光亭教授的关心，以及沈灏、张智丰、李炜、程宗毛、李承家、章春国等各位指导老师的支持，可以说，没有他们的大力支持，本书是难以出版的。在此，还要感谢理学院领导与同事们的关心与支持，感谢所有参加过数学建模竞赛的同学们，感谢他们的辛勤努力！愿本书的出版能够给大学生数学建模活动带来积极的推动作用！

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，诚望读者批评指正。

编者

2019年6月

# 目 录

|   |    |   |    |
|---|----|---|----|
| 第 1 篇 中国人口增长预测模型 .....                                | 1  | 第 2 篇 乘公交,看奥运 .....                     | 26 |
| 摘要 .....  | 1  | 摘要 .....                                | 26 |
| 1 问题的背景和重述 .....                                      | 1  | 1 问题重述 .....                            | 26 |
| 1.1 问题背景 .....  | 1  | 2 问题分析 .....                            | 27 |
| 1.2 问题重述 .....  | 2  | 3 模型假设 .....                            | 27 |
| 2 模型的基本假设 .....                                       | 2  | 4 变量声明 .....                            | 27 |
| 3 离散中国人口发展模型 .....                                    | 2  | 5 数据构架 .....                            | 28 |
| 3.1 符号变量说明 .....                                      | 2  | 5.1 数据预处理 .....                         | 28 |
| 3.2 对宋健人口发展模型的分析 .....                                | 3  | 5.2 存储结构 .....                          | 29 |
| 3.3 用灰色预测模型对 $\delta(m, t)$ 和 $s(r, t)$<br>进行预测 ..... | 3  | 6 问题求解 .....                            | 31 |
| 3.4 对年龄别生育率 $h(r, t)$ 的分析<br>求解及检验 .....              | 6  | 6.1 问题一的求解 .....                        | 31 |
| 3.5 计算 $b_1(t)$ 并进行误差分析 .....                         | 7  | 6.2 问题二的求解 .....                        | 38 |
| 3.6 计算 $g(r, t)$ .....                                | 8  | 6.3 问题三的求解 .....                        | 46 |
| 3.7 中国人口发展模型的建立 .....                                 | 8  | 7 模型评价与改进方向 .....                       | 49 |
| 3.8 模型的求解及误差分析 .....                                  | 8  | 8 模型扩展 .....                            | 50 |
| 3.9 预测结果的综合分析 .....                                   | 10 | 参考文献 .....                              | 50 |
| 4 连续中国人口发展模型 .....                                    | 14 | 论文点评 .....                              | 51 |
| 4.1 参数说明 .....  | 14 | 第 3 篇 数码相机定位 .....                      | 52 |
| 4.2 模型的建立 .....                                       | 15 | 摘要 .....                                | 52 |
| 4.3 模型的求解 .....                                       | 16 | 1 问题重述 .....                            | 53 |
| 5 长期 Leslie 预测模型 .....                                | 20 | 2 模型假设与符号设定 .....                       | 54 |
| 5.1 模型的假设 .....                                       | 20 | 2.1 模型假设 .....                          | 54 |
| 5.2 模型的建立 .....                                       | 21 | 2.2 符号设定 .....                          | 54 |
| 5.3 模型的求解 .....                                       | 22 | 3 问题分析 .....                            | 54 |
| 5.4 模型的改进 .....                                       | 23 | 4 模型建立及求解 .....                         | 55 |
| 6 模型的评价 .....   | 24 | 4.1 建立靶标上圆心像坐标的数学模型<br>.....            | 55 |
| 6.1 离散中国人口发展模型的评价 .....                               | 24 | 4.2 利用图 1 和图 2 来具体计算靶标上<br>圆心的像坐标 ..... | 57 |
| 6.2 连续中国人口发展模型的评价 .....                               | 24 | 4.3 模型的检验 .....                         | 64 |
| 6.3 长期 Leslie 预测模型的评价 .....                           | 24 | 4.4 用此靶标给出两部固定相机相对<br>位置的数学模型 .....     | 66 |
| 参考文献 .....  | 24 | 5 模型的总结和评价 .....                        | 68 |
| 论文点评 .....  | 25 |   |    |

|                              |     |                                   |     |
|------------------------------|-----|-----------------------------------|-----|
| 6 模型的改进 .....                | 68  | 3 符号说明 .....                      | 106 |
| 参考文献 .....                   | 69  | 4 问题分析 .....                      | 107 |
| 论文点评 .....                   | 69  | 4.1 对各个问题的初步分析 .....              | 107 |
| <b>第4篇 高等教育学费分析模型</b> .....  | 71  | 4.2 数据的整理与分析 .....                | 107 |
| 摘要 .....                     | 71  | 5 模型的建立与求解 .....                  | 110 |
| 1 问题的背景与重述 .....             | 71  | 5.1 病床安排模型评价指标的确定 .....           | 110 |
| 1.1 问题背景 .....               | 71  | 5.2 病床安排模型的建立 .....               | 111 |
| 1.2 问题重述 .....               | 72  | 5.3 病人从门诊到入院的时间估计 .....           | 118 |
| 2 问题的基本假设 .....              | 72  | 5.4 医院手术时间安排的调整 .....             | 121 |
| 3 问题分析 .....                 | 72  | 5.5 医院病床的合理安排 .....               | 124 |
| 4 学费收取影响因素及现状分析 .....        | 73  | 6 模型的评价 .....                     | 125 |
| 4.1 影响因素的分析 .....            | 73  | 6.1 模型的优点 .....                   | 125 |
| 4.2 对当前收费标准的点评 .....         | 89  | 6.2 模型的不足与改进之处 .....              | 126 |
| 5 多因素定量综合分析 .....            | 90  | 参考文献 .....                        | 126 |
| 5.1 指标数据规范化处理 .....          | 90  | 论文点评 .....                        | 126 |
| 5.2 各因素总评价值的计算 .....         | 90  | <b>第6篇 储油罐的变位识别与罐容表标定</b> ..      | 128 |
| 5.3 利用层次分析法确定相对权重 .....      | 90  | 摘要 .....                          | 128 |
| 5.4 通过模糊聚类选取代表性大学 .....      | 91  | 1 储油罐的变位识别与罐容表标定问题的               |     |
| 6 人均学费的定价模型 .....            | 92  | 由来 .....                          | 129 |
| 6.1 经济学图形定价模型分析 .....        | 92  | 2 问题的初步探索 .....                   | 129 |
| 6.2 个人、社会收益率的计算 .....        | 93  | 3 小椭圆形储油罐的变位结果分析 .....            | 129 |
| 6.3 修正数理分析模型的建立 .....        | 94  | 3.1 储油量计算中的假设 .....               | 130 |
| 6.4 国家与家庭共同分担的条件分析 ..        | 95  | 3.2 倾斜角为 $\alpha$ 时储油量与油位高度 $h$ 的 |     |
| 6.5 实证分析 .....               | 97  | 关系 .....                          | 130 |
| 7 给教育部、财务部的报告 .....          | 98  | 3.3 倾斜角为 $4.1^\circ$ 时储油量的精确计算    |     |
| 8 模型评价与改进 .....              | 99  | .....                             | 132 |
| 8.1 模型评价 .....               | 99  | 3.4 误差分析和局部误差修正 .....             | 134 |
| 8.2 模型改进 .....               | 99  | 3.5 修正后模型的误差分析 .....              | 137 |
| 参考文献 .....                   | 99  | 3.6 倾斜角 $\alpha$ 可变的分析 .....      | 138 |
| 附录1 各高校类别、办学能力与学费的           |     | 4 实际储油罐的变位识别 .....                | 139 |
| 相关分析数据 .....                 | 100 | 4.1 罐体变位后储油量与油位高度及变位              |     |
| 附录2 各高校需求量与学费的相关分析数据         |     | 参数间的一般关系 .....                    | 139 |
| .....                        | 101 | 4.2 储油罐的变位参数识别 .....              | 143 |
| 论文点评 .....                   | 102 | 4.3 变位参数的灵敏度检验 .....              | 148 |
| <b>第5篇 眼科病床的合理安排模型</b> ..... | 104 | 4.4 模型检验 .....                    | 148 |
| 摘要 .....                     | 104 | 5 模型评价与改进 .....                   | 149 |
| 1 问题重述 .....                 | 105 | 参考文献 .....                        | 150 |
| 2 模型的假设 .....                | 106 | 论文点评 .....                        | 150 |

|                                    |     |                          |     |
|------------------------------------|-----|--------------------------|-----|
| 第7篇 葡萄酒的分析评价问题 .....               | 152 | 7.2 多元线性回归的显著性检验 .....   | 175 |
| 摘要 .....                           | 152 | 7.3 模型求解与结论分析 .....      | 175 |
| 1 问题重述 .....                       | 153 | 参考文献 .....               | 177 |
| 2 问题假设 .....                       | 153 | 论文点评 .....               | 178 |
| 3 数据的显著性差异检验与信度和效度分析 .....         | 154 | 第8篇 嫦娥三号轨道设计及最优控制策略      |     |
| 3.1 显著性差异检验 .....                  | 154 | 研究 .....                 | 180 |
| 3.2 对两组评价的信度和效度分析 .....            | 154 | 摘要 .....                 | 180 |
| 4 关于葡萄酒质量评分数据的处理模型 .....           | 156 | 1 轨道设计及控制策略问题的提出 .....   | 181 |
| 4.1 问题分析 .....                     | 156 | 2 轨道设计及控制策略的问题分析 .....   | 181 |
| 4.2 分析指标的选取 .....                  | 157 | 2.1 问题一分析 .....          | 181 |
| 4.3 评分异常值的剔除 .....                 | 157 | 2.2 问题二分析 .....          | 181 |
| 4.4 基于区分度控制下的权重确立模型 .....          | 157 | 2.3 问题三分析 .....          | 182 |
| 5 基于综合评价法的酿造葡萄分级模型 .....           | 159 | 3 模型假设与符号说明 .....        | 182 |
| 5.1 问题分析 .....                     | 159 | 3.1 模型假设 .....           | 182 |
| 5.2 建模思路 .....                     | 160 | 3.2 符号说明 .....           | 182 |
| 5.3 各指标数据的初步相关性分析 .....            | 160 | 4 关于椭圆轨道位置及速度问题的研究 ..... | 183 |
| 5.4 对特殊指标的处理 .....                 | 161 | 4.1 近月点与远月点速度的确定 .....   | 183 |
| 5.5 酿酒葡萄各指标的聚类分析 .....             | 161 | 4.2 近月点与远月点位置的确定 .....   | 184 |
| 5.6 基于主成分分析的聚类后指标综合 .....          | 163 | 4.3 月球球心空间坐标系的确立 .....   | 186 |
| 5.7 酿酒葡萄理化指标得分的综合评价模型 .....        | 166 | 5 软着陆轨道设计及最优控制策略研究 ..... | 187 |
| 5.8 引入葡萄酒质量指标后的酿酒葡萄分级 .....        | 168 | 5.1 着陆准备阶段近月点的估计 .....   | 187 |
| 5.9 模型的评价 .....                    | 169 | 5.2 软着陆轨道动力学模型 .....     | 187 |
| 6 基于灰色关联度模型的酿酒葡萄与葡萄酒理化指标关联分析 ..... | 170 | 5.3 主减速阶段燃料最优制导方案 .....  | 189 |
| 6.1 问题分析 .....                     | 170 | 5.4 快速调整阶段制导方案 .....     | 192 |
| 6.2 灰色关联模型的建立 .....                | 170 | 5.5 粗避障阶段制导方案 .....      | 194 |
| 6.3 模型求解 .....                     | 171 | 5.6 精避障阶段策略 .....        | 197 |
| 6.4 结果分析 .....                     | 172 | 5.7 缓速下降阶段减速策略 .....     | 198 |
| 7 基于多元线性回归的分析与评价模型 .....           | 174 | 6 敏感性分析 .....            | 198 |
| 7.1 问题分析 .....                     | 174 | 6.1 快速调整阶段敏感性分析 .....    | 199 |
|                                    |     | 6.2 主减速阶段敏感性分析 .....     | 200 |
|                                    |     | 7 模型评价 .....             | 201 |
|                                    |     | 7.1 模型的优点 .....          | 201 |
|                                    |     | 7.2 模型的缺点 .....          | 201 |
|                                    |     | 参考文献 .....               | 202 |
|                                    |     | 论文点评 .....               | 202 |

|   |     |  |     |
|---|-----|--|-----|
| 第 9 篇 系泊系统的设计 .....   | 204 | 3.1 GM (1, 1) Model Predicts Certain<br>Growth Trend of Sequence $X_0$ ...     | 227 |
| 摘要 .....  | 204 | 3.2 Time Series Analysis Predicts Smooth<br>Random Change Trend of $X_0$ ..... | 228 |
| 1 问题重述 .....  | 205 | 3.3 Result Analysis .....  | 229 |
| 2 问题分析 .....  | 205 | 3.4 Analysis of the Impacts on the Ocean<br>Ecosystem .....                    | 230 |
| 3 模型假设与符号说明 .....   | 206 | 4 Ocean System Evaluation Model .....  | 230 |
| 3.1 模型假设 .....  | 206 | 4.1 Analytical Hierarchy Process .....   | 230 |
| 3.2 符号说明 .....  | 206 | 4.2 Evaluation Vector and Comparison<br>Function .....                         | 232 |
| 4 模型建立及求解 .....   | 207 | 4.3 Result .....   | 232 |
| 4.1 问题一的模型建立及求解 .....   | 207 | 4.4 Result Analysis .....  | 234 |
| 4.2 问题二的模型建立及求解 .....   | 214 | 4.5 Feedback Ocean System .....  | 234 |
| 4.3 问题三的模型建立及求解 .....   | 216 | 5 A Research Report to Our Expedition<br>Leader .....                          | 235 |
| 5 模型评价与改进 .....   | 221 | 5.1 Our Finding .....  | 235 |
| 参考文献 .....  | 222 | 5.2 Proposals for Solutions .....  | 235 |
| 论文点评 .....  | 222 | 5.3 Government Policies and Practices<br>.....                                 | 235 |
| 第 10 篇 Quantitative Marine Debris Impacts<br>and Evaluation of Ocean System ... | 224 | Reference .....  | 235 |
| Summary .....   | 224 | 论文点评 .....   | 236 |
| 1 Introduction .....  | 225 |  |     |
| 2 Description and Analysis .....  | 225 |  |     |
| 2.1 Debris Sources .....  | 226 |  |     |
| 2.2 Impacts .....   | 226 |  |     |
| 3 Model for Impacts on Ocean Ecosystem<br>.....                                 | 226 |  |     |

# 第1篇 中国人口增长预测模型<sup>①</sup>

队员：张金漫(信息安全)，段胜安(信息对抗技术)，冯玉峰(信息对抗技术)

指导教师：数模组

## 摘 要

本文对中国的人口增长趋势问题做了研究，根据中国人口特点以及对人口中短期和长期预测的需要建立了3个预测模型。

对于人口的中短期预测，本文建立了离散中国人口发展模型和连续中国人口发展模型。

在离散中国人口发展模型中，首先根据中国人口发展所呈现的出生人口性别比持续升高、老龄化进程加速的特点，对宋健人口发展模型中的静态出生人口性别比和各年龄段死亡率引进了时间参数 $t$ ，使其动态化，并用灰色预测模型对其进行2006—2010年的短期预测，然后将参数的预测值代入中国人口发展模型，得到2006—2010年各个地区各年龄不同性别的人口数量的预测(2010年，城市、城镇、乡村的男性人口数量分别将达到1.84亿、1.15亿、3.94亿，女性人口数量分别将达到1.83亿、1.13亿、3.81亿，中国总人口数量将达到13.7亿)；最后对得到的结果进行检验，并对人口地区差异、性别差异、年龄结构差异进行分析和比较，对中国的人口发展形势进行一定的研究。

在连续中国人口发展模型中，首先将影响人口数量的参数进行分段拟合，以区分劳动力与非劳动力的不同波动，使数据具有我国人口的特色；同时在拟合过程中加入时间序列和随机过程因素，使得回归曲线与实际数据更加贴合，提升了精确度。

对于人口的长期趋势预测，本文采用长期Leslie预测模型来预测城市总人口50年的发展趋势，得出了“在2033年人口数量将达到峰值，然后趋于稳定”的结论。接着提出了改进模型，将Leslie模型与线性回归模型相结合，分段预测人口。

**关键词：**中国人口发展模型；灰色GM(1, 1)预测；Leslie模型；分段拟合预测

## 1 问题的背景和重述

### 1.1 问题背景

我国是一个人口大国，人口问题始终是制约我国发展的关键因素之一。人口数量的飞

<sup>①</sup>此题为2007年“高教社杯”全国大学生数学建模竞赛A题(CUMCM2007—A)，此论文获该年全国一等奖。

速增长, 严重影响了我国经济和社会的发展, 预测人口数量和发展趋势是我们制定一系列相关政策的基础。因此, 怎样更好地预测人口数量、结构、分布、劳动力、负担系数及人口的出生率、死亡率、增长率等, 并通过控制这些参数来控制人口的数量, 以利于经济的增长和社会的发展, 这是摆在我们面前亟待解决的问题。目前, 我国的人口发展出现了新的特点: 老龄化进程加速, 出生人口性别比持续升高, 乡村人口城镇化等, 所以研究人口问题更加迫在眉睫。

## 1.2 问题重述

关于我国人口问题已有多方面的研究, 并积累了大量数据资料。试从我国的实际情况和人口增长的特点出发, 参考原题附录中的相关数据(也可以搜索相关文献和补充新的数据), 建立我国人口增长的数学模型, 并由此对中国人口增长的中短期和长期趋势做出预测, 并指出模型中的优点与不足之处。

## 2 模型的基本假设

本文研究基于以下基本假设:

- (1) 中短期预测年限为 5 年, 长期预测年限为 50 年。
- (2) 中国统计年鉴给出的统计数据基本准确, 但是也有误差, 所以预测的数据存在一定的误差是可以接受的。

还有一些具体的假设在各模型中进行具体说明。

## 3 离散中国人口发展模型

人口的预测就是根据一个国家、一个地区人口的现状, 考虑到社会政治经济条件对人口再生产和转化的影响, 分析其发展规律, 运用科学的方法预测未来某个时期人口的发展状况。人口预测首先是针对人口数目, 其次还可预测人口的出生率、死亡率、增长率以及人口的性别和年龄构成等。由于我国人口出现的新特点, 还可以对未来人口的分布、婚姻状况、家庭构成、城乡人口比例等进行预测。人口的短期预测一般为 1~3 年, 中期预测一般为 5~10 年, 长期预测一般为 10 年以上(甚至可长达 100 年)。

### 3.1 符号变量说明

$p(r, t)$ —— $t$  时刻年龄为  $r$  的人数;

$p_1(r, t)$ —— $t$  时刻年龄为  $r$  的男性人数;

$p_2(r, t)$ —— $t$  时刻年龄为  $r$  的女性人数;

$s(r, t)$ —— $t$  时刻年龄为  $r$  的人数的存活率;

$s_1(r, t)$ —— $t$  时刻年龄为  $r$  的男性人数的存活率;

$s_2(r, t)$ —— $t$  时刻年龄为  $r$  的女性人数的存活率;

$m(r, t)$ —— $t$  时刻年龄为  $r$  的人数的死亡率;

$m_1(r, t)$ —— $t$ 时刻年龄为 $r$ 的男性人数的死亡率；

$m_2(r, t)$ —— $t$ 时刻年龄为 $r$ 的女性人数的死亡率；

$g(r, t)$ —— $t$ 时刻年龄为 $r$ 的净迁入人数；

$b(t)$ —— $t$ 时刻的出生人数；

$b_1(t)$ —— $t$ 时刻出生的男性人数；

$b_2(t)$ —— $t$ 时刻出生的女性人数；

$\delta(f, t)$ —— $t$ 时刻女婴的出生比率；

$\delta(m, t)$ —— $t$ 时刻男婴的出生比率；

$h(r, t)$ —— $t$ 时刻年龄为 $r$ 的妇女的生育率。

### 3.2 对宋健人口发展模型的分析

宋健人口发展模型如下：

$$b_1(t) = \sum_{r=r_1}^{r_2} p_2(r, t)h(r)\delta(m)$$

$$\begin{cases} p_1(0, t) = b_1(t+1) + g_1(0) \\ p_1(1, t+1) = p_1(0, t)s_1(0) + g_1(0) \\ \vdots \\ p_1(n, t+1) = p_1(n-1)s_1(n-1) + g_1(n-1) \end{cases}$$

首先，可以看到该模型中 $\delta(m)$ 、 $s_1(n-1)$ 是静止不变的，这不能体现当今中国人口所呈现的性别出生比上升和老龄化进程的特点。所以我们在提出的中国人口发展模型中对 $\delta(m)$ 、 $s_1(n-1)$ 引进时间参数 $t$ ，将其动态化为 $\delta(m, t)$ 、 $s(r, t)$ 。然后用灰色预测模型对这两个参数进行预测。

其次，进一步分析 $p_1(0, t) = b_1(t+1) + g_1(0)$ 项，其意思是该年出生的人在下一年作为0岁的人数计算，而原题附录所给统计数据中0岁所对应的是当年所出生的人数，所以宋健人口发展模型是滞后一年的。我们将其修正为 $p(0, t+1) = s(0, t+1)b(t+1) + g(0, t+1)$ 。

### 3.3 用灰色预测模型对 $\delta(m, t)$ 和 $s(r, t)$ 进行预测

#### 3.3.1 灰色预测模型GM(1, 1)原理分析

灰色系统是指部分信息已知、部分信息未知的系统。灰色系统预测理论的基本思路是将已知的数据序列按照某种规则构成动态的或非动态的白色模块，再按某种变化、解法来求解未来的灰色模型。在灰色模块中再按照某种准则，逐步提高白度，直到未来发展变化的规律基本明确为止。其基础是建立模型，通常为一阶单变量模型GM(1, 1)和一阶多变量模型GM(1, n)。我们这里建立的是GM(1, 1)模型。GM(1, 1)模型是指一阶、一个变量的微分方程预测模型，是一阶单序列的线性动态模型。用于时间序列预测的模型是离散形式的微分方程模型。

设 $x^{(0)}$ 为 $n$ 个元素的数列，即 $x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$ ， $x^{(0)}$ 的累加生成

(AGO)数列为  $x^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n))$ , 其中  $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i)$ ,  $k=1, 2, \dots, n$ . 定义  $x^{(1)}$  的灰导数为

$$dx^{(1)}(k) = x^{(0)}(k) = x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)$$

令  $z^{(1)}$  为数列  $x^{(1)}$  的均值(mean)数列, 即

$$z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1) \quad k=2, 3, \dots, n$$

则  $z^{(1)} = (z^{(1)}(1), z^{(1)}(2), \dots, z^{(1)}(n))$ . 定义 GM(1, 1) 的灰色方程模型为

$$dx^{(1)}(k) + az^{(1)}(k) = b$$

即

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b \quad (1)$$

其中,  $x^{(0)}(k)$  称为灰导数,  $a$  称为发展系数,  $z^{(1)}(k)$  称为白化背景值,  $b$  称为灰作用量。

对于 GM(1, 1) 的灰微分方程, 即式(1), 如果将  $x^{(0)}(k)$  的时刻  $k(k=2, 3, \dots, n)$  视为连续的变量  $t$ , 则数列  $x^{(1)}$  就可以看成时间  $t$  的函数, 记为  $x^{(1)}(t)$ . 于是得到 GM(1, 1) 的灰微分方程对应的白微分方程:

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)}(t) = b \quad (2)$$

称之为 GM(1, 1) 的白化型。

将时刻  $k=2, 3, \dots, n$  代入式(1), 有

$$\begin{cases} x^{(0)}(2) + az^{(1)}(2) = b \\ x^{(0)}(3) + az^{(1)}(3) = b \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) + az^{(1)}(n) = b \end{cases}$$

令

$$Y_N = [x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \dots, x^{(0)}(n)]^T$$

$$u = [a, b]^T$$

$$B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}$$

称  $Y_N$  为数据向量,  $u$  为参数向量,  $B$  为数据矩阵, 则 GM(1, 1) 可以表示为矩阵方程

$$Y_N = B \cdot u$$

参数  $u$  的确定方法如下:

如果  $B^T \cdot B$  的逆矩阵存在, 由最小二乘法, 求使得  $J(\hat{u}) = (Y_N - B \cdot \hat{u})^T (Y_N - B \cdot \hat{u})$

达到最小值的  $\hat{u} = [\hat{a}, \hat{b}]^T = (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T Y_N$ , 其中

$$\hat{a} = \frac{CD - (n-1)E}{(n-1)F - C^2}$$

$$\hat{b} = \frac{DF - CE}{(n-1)F - C^2}$$

式中:  $C = \sum_{k=2}^n z^{(1)}(k)$ ,  $D = \sum_{k=2}^n x^{(0)}(k)$ ,  $E = \sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) \cdot x^{(0)}(k)$ ,  $F = \sum_{k=2}^n (z^{(1)}(k))^2$ 。

于是求解式(2)可得

$$x^{(1)}(k+1) = \left( x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) e^{-ak} + \frac{b}{a} \quad k=1, 2, \dots, n \quad (3)$$

而且

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) \quad k=1, 2, \dots, n \quad (4)$$

式(4)即为预测的计算式。

使用残差法来检验预测值。令残差为  $\epsilon(k)$ , 计算

$$\epsilon(k) = \left| \frac{x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)} \right| \quad k=1, 2, \dots, n$$

如果  $\epsilon(k) < 0.2$ , 则可认为达到一般要求; 如果  $\epsilon(k) < 0.1$ , 则可认为达到较高的要求。

### 3.3.2 对 $\delta(m, t)$ 和 $s_1(n-1)$ 进行灰色预测

1) 计算  $\delta(m, t)$  并检验

(1) 计算。

根据中国人口统计年鉴中的统计数据, 我们对城市各年份男性出生所占比率情况用 Excel 作图给出, 见图 1。

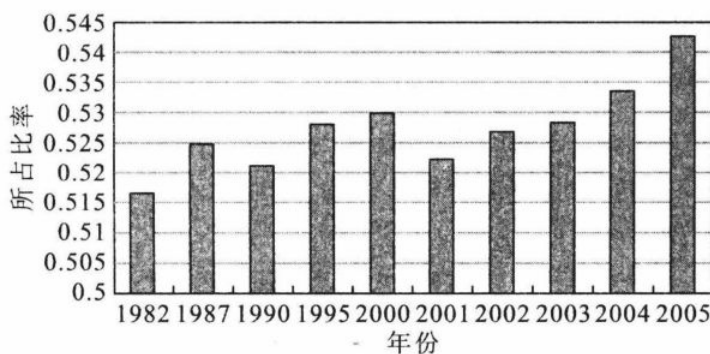


图 1 历年城市男性出生所占比率

观察图 1, 可以发现男性出生比率有一定的波动, 但大致呈上升趋势。所以对  $\delta(m, t)$  在  $t=2006, 2007, \dots$  的值, 我们采用灰色预测模型 GM(1, 1) 对未来男性出生率进行预测。根据表 1, 我们可以得到初始  $x_0$  矩阵如下:

表 1 历年城市男性出生所占比率

| 年份 | 1994      | 1995   | 1996      | 1997   | 1998   | 1999   | 2000     | 2001  | 2002      | 2003   | 2004     | 2005  |
|----|-----------|--------|-----------|--------|--------|--------|----------|-------|-----------|--------|----------|-------|
| 比率 | 0.533 843 | 0.5281 | 0.527 589 | 0.5211 | 0.5253 | 0.5244 | 0.530 51 | 0.522 | 0.526 896 | 0.5284 | 0.533 66 | 0.543 |

$$x_0 = [0.533843 \quad 0.5281 \quad 0.527589 \quad 0.5211 \quad 0.5253 \quad 0.5244 \quad 0.53051 \quad 0.522 \quad 0.526896 \quad 0.5284 \quad 0.53366 \quad 0.543]$$

根据灰色预测的原理, 我们用 MATLAB 编程(见数字课程网站), 得到 2006 年到

2010 年的城市男性出生所占比率(见表 2)。

表 2 预测城市男性出生所占比率

| 年份 | 2005        | 2006        | 2007        | 2008        | 2009        | 2010     |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|----------|
| 比率 | 0.527 345 3 | 0.527 329 6 | 0.527 316 9 | 0.527 306 4 | 0.527 297 5 | 0.527 29 |

(2) 检验。

下面对  $\delta(m, t)$  的残差进行检验。

由于 2006 年的数据还未得到, 在这里只能先将 2005 年也作为预测值, 然后与真实值作比较得到残差, 进行检验。计算得到的残差为  $3.7274 \times 10^{-5}$ , 预测较为准确。

2) 计算  $s_1(m, t)$  并检验

由于原题所给的数据是死亡率  $m(r, t)$  的统计值, 所以可由  $s(r, t) = 1 - m(r, t)$  求得  $s(r, t)$ 。对于  $m(r, t)$  的确定, 我们用上述同样的方法来求解。

### 3.4 对年龄别生育率 $h(r, t)$ 的分析求解及检验

1) 计算  $h(r, t)$

根据中国人口统计年鉴中 2001—2005 年统计的数据, 我们对城市育龄妇女的年龄别生育率的分布情况用 Excel 作图给出, 见图 2。

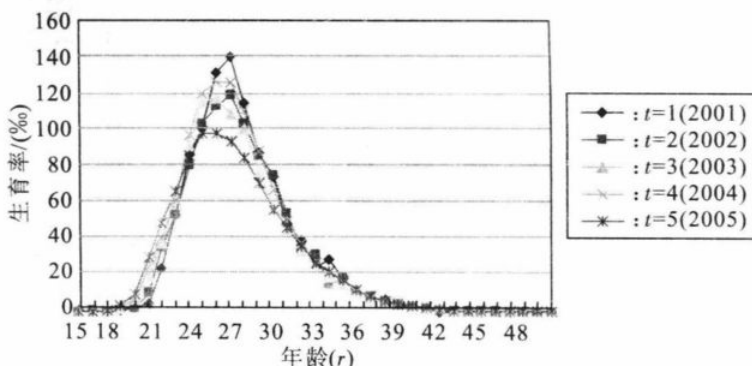


图 2 城市育龄妇女的生育率

观察图 2, 可以发现在  $r=27$  附近生育率最高, 由此值向两边递减; 生育率随时间有下降的趋势, 但是在短期(3 年)内, 下降不是很明显。综合分析这几年我国的发展情况, 总体比较稳定, 所以在短期预测时, 我们假设生育率水平随时间不变。而且根据其分布可以借用概率论中的  $\Gamma$  分布来对其表示:

$$h(r) = \begin{cases} 0 & r < r_1, r > r_2 \\ \frac{(r-r_1)^{a-1} e^{-\frac{r-r_1}{\theta}}}{\theta^a \Gamma(a)} & r_1 \leq r \leq r_2 \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $r_1=15$ ,  $r_2=49$ , 并取  $\theta=2$ ,  $a=n/2$ 。

根据  $h(r)$  的表达式, 我们可以近似得到  $h(r)$  序列, 见表 3。

表3 城市女性年龄别生育率

| 年龄 | 生育率<br>/(%) | 年龄 | 生育率<br>/(%) | 年龄 | 生育率<br>/(%) | 年龄 | 生育率<br>/(%) | 年龄 | 生育率<br>/(%) | 年龄 | 生育率<br>/(%) |
|----|-------------|----|-------------|----|-------------|----|-------------|----|-------------|----|-------------|
| 1  | 0           | 16 | 0.03        | 31 | 35.398      | 46 | 0.326       | 61 | 0           | 76 | 0           |
| 2  | 0           | 17 | 0.496       | 32 | 26.42       | 47 | 0.258       | 62 | 0           | 77 | 0           |
| 3  | 0           | 18 | 1.708       | 33 | 20.918      | 48 | 0.252       | 63 | 0           | 78 | 0           |
| 4  | 0           | 19 | 5.596       | 34 | 16.912      | 49 | 0.352       | 64 | 0           | 79 | 0           |
| 5  | 0           | 20 | 17.208      | 35 | 11.066      | 50 | 0           | 65 | 0           | 80 | 0           |
| 6  | 0           | 21 | 36.63       | 36 | 7.97        | 51 | 0           | 66 | 0           | 81 | 0           |
| 7  | 0           | 22 | 58.56       | 37 | 6.276       | 52 | 0           | 67 | 0           | 82 | 0           |
| 8  | 0           | 23 | 86.754      | 38 | 4.496       | 53 | 0           | 68 | 0           | 83 | 0           |
| 9  | 0           | 24 | 105.926     | 39 | 3.218       | 54 | 0           | 69 | 0           | 84 | 0           |
| 10 | 0           | 25 | 115.082     | 40 | 2.288       | 55 | 0           | 70 | 0           | 85 | 0           |
| 11 | 0           | 26 | 115.514     | 41 | 1.342       | 56 | 0           | 71 | 0           | 86 | 0           |
| 12 | 0           | 27 | 100.87      | 42 | 0.98        | 57 | 0           | 72 | 0           | 87 | 0           |
| 13 | 0           | 28 | 80.38       | 43 | 0.57        | 58 | 0           | 73 | 0           | 88 | 0           |
| 14 | 0           | 29 | 64.866      | 44 | 0.438       | 59 | 0           | 74 | 0           | 89 | 0           |
| 15 | 0           | 30 | 48.174      | 45 | 0.314       | 60 | 0           | 75 | 0           | 90 | 0           |

## 2) 检验

在这里我们用  $s(t)$  表示  $h(r)$  相对于  $h(r, t)$  的偏差 ( $t=2001\sim 2005$ ), 令

$$s(t) = \sqrt{\frac{[h(r) - h(r, t)]^2}{n}}$$

然后得到如表4所示的标准偏差。

表4 2001—2005年  $h(r)$  的偏差检验

| 年份       | 2001      | 2002     | 2003      | 2004      | 2005      |
|----------|-----------|----------|-----------|-----------|-----------|
| 标准偏差/(%) | 6.380 249 | 3.318 08 | 3.048 952 | 3.871 749 | 7.276 267 |

可以发现在偏差置信度为 0.05 的情况下, 都可以通过检验。

3.5 计算  $b_1(t)$  并进行误差分析1) 计算  $b_1(t)$ 

根据  $b_1(t) = \sum_{r=r_1}^{r_2} p_2(r, t)h(r, t)\delta(m, t)$ , 又由 3.3 节、3.4 节得到的  $\delta(m, t)$ 、 $h(r, t)$ ,

我们得到  $b_1(t)$  的序列值, 如表5所示。