高等数学
教学与思维能力培养

GAODENG SHUXUE JIAOXUE YU SIWEI NENGLI PEIYANG

范林元 著

延边大学出版社

责任编辑：崔文香
封面设计：延大兴业

ISBN 978-7-5688-6948-5
9 787568 869485 >

定价：32.00元

高等数学教学与思维能力培养

范林元 著

延边大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学教学与思维能力培养 / 范林元著. -- 延吉: 延边大学出版社, 2019.5

ISBN 978-7-5688-6948-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①范… Ⅲ. ①高等数学－教学研究 Ⅳ. ①O13-42

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 109479 号

高等数学教学与思维能力培养

著　　者：范林元
责任编辑：崔文香
封面设计：延大兴业
出版发行：延边大学出版社
社　　址：吉林省延吉市公园路 977 号　　邮　　编：133002
网　　址：http://www.ydcbs.com　　E-mail：ydcbs@ydcbs.com
电　　话：0433-2732435　　传　　真：0433-2732434
制　　作：山东延大兴业文化传媒有限责任公司
印　　刷：北京建宏印刷有限公司
开　　本：787×1092　1/16
印　　张：7.75
字　　数：90 千字
版　　次：2019 年 5 月第 1 版
印　　次：2019 年 5 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5688-6948-5

定价：32.00 元

前言

高等数学是普通高等院校一门重要的公共基础必修课，这门课程不仅对培养学生分析问题、解决问题的能力和逻辑思维能力有着重要的作用，同时，随着数学学科自身的发展以及与其他各学科专业的交叉融合，高等数学的知识在文、史、理、工、农、医等各领域各专业方向中均有所涉及并且不断地渗透和发展，故而高等数学作为非数学专业的基础课程，其重要性是不言而喻的。作为大学的一门重要公共基础必修课，高等数学的教学，不仅需要教师具有出色的教学水平，严格清晰的推理论证，还需要学生对高等数学课的学习具有饱满的热情、高度集中的精神，在环环相扣的演算与推理中加深对高等数学知识的理解。

在大多数大学新生眼中，高等数学是抽象的、枯燥乏味的。这就要求教师在教学过程中要结合教材内容适当增加一些趣味性的内容，既可以扩大学生的知识面、开阔学生的眼界，同时也能够启发他们对数学学习的兴趣和积极性。例如，在讲授微积分中的定积分这一节之前，先向学生介绍微积分理论的发展史，微积分产生于十七世纪，十六、十七世纪的欧洲已经经历了文艺复兴运动的洗礼，彻底摆脱了封建主义与教会思想的桎梏，进入资本主义蓬勃发展的年代。在资本主义原始积累的过程中发生了诸如贩卖黑奴的勾当、羊吃人圈地运动等，从而由此产生了实际的土地面积丈量问题，再由此引入微积分的定积分理论。通过向学生讲述微积分的历史背景，可使学生感受到数学作为自然科学的人文精神的一面，也让学生了解到微积分在人类自然科学发展进程中的重要

作用。在高等数学教学中引入数学史的内容，既活跃了课堂气氛，又激发了学生学习微积分的兴趣，也对学生的人格塑造起到了潜移默化的作用。

此外，传统的高等数学的教学手段就是三尺讲台、一支粉笔，教师授课以书本内容为主讲授数学的理论知识，从概念的介绍到定理的证明最后到例题、习题的大量灌输，这种“填鸭式”的教学方式是有利有弊的。优点在于：第一，课堂效率比较高，知识容量比较大，能够使得学生在有限的课时内获取大量的知识。第二，有利于发挥教师在教学过程中的主导作用，便于教师对教学节奏的控制，能够使得教师在规定的时间内顺利地完成教学任务，并且知识的系统性强。但是，这种“填鸭式”的教学方式的成功一定程度上依赖于学生的配合。如果学生在课前作好了充分的预习，课后又进行了系统的复习，那么这种“填鸭式”的教学方式就能够达到好的效果。但是这种教学方式的弊端在于，课堂上教师“满堂灌”，学生忙于记笔记，使学生处于穷于应付的被动局面，以简单的记忆与技能的反复机械训练为主，忽视了学生自身的思考与理解，更谈不上创新思维的培养。近些年来，随着计算机科学技术的飞速发展，多媒体技术走进了课堂，极大地丰富了教师的教学方法和学生的学习方式。运用多媒体技术教学的优点在于可以使得静态的知识动态化、抽象的知识具体化。高等数学中抽象晦涩的数学公式、概念可以借助多媒体技术以直观有趣的方式呈现给学生，既提升了学生的学习兴趣，又避免了传统教学枯燥乏味的弊端。

由于时间比较仓促，加上作者水平有限，在撰写的过程中难免出现纰漏之处，敬请读者谅解。

目 录

第一章　高等数学教学与思维能力培养概念解读

第一节　高等数学教学概念解读

一、数学发展简史与发展

19 世纪法国杰出的数学家庞加莱说过这样一段发人深省的话：“如果我们要想预见数学的未来，适当的途径就是研究这门科学的历史和现状。”他敏锐地指出了数学史在数学发展中的重要作用。对于数学的概念和理论，如果知道它的来龙去脉，了解它的现实模型和实际应用，就会对它有更深刻的认识。总之，研究数学发展史，可以总结历史上数学兴衰的经验教训，掌握数学发展的规律，继而预测数学未来的进程。

数学的发展史大致可以划分为四个时期。

第一个时期即数学形成时期，这是人类建立最基本的数学概念的时期。早在公元前十几世纪，铁器的出现大大促进了生产力的发展。社会财富快速增长，商业贸易随之迅速发展。由于生活、生产和社会经济的需要，人们不断地需要计算产品的数量、劳动时间的长短和分配物品的多少；需要丈量土地的面积，测定建筑物的形状和大小；需要进行天文、气象的观测等。人们在围绕着数与形这两个概念的研究中，使数学逐渐地发展起来。人类从数数开始逐渐建立了自然数的概念，学会了简单的计算法，并认识了最简单的几何形式，逐步地形成了理论与证明之间的逻辑关系的“纯粹”数学。当时算术与几何还没有分开，彼此紧密地交错着。

第二个时期称为初等数学，即常量数学的时期。这个时期从公元前 5 世纪或更早一些开始，直到 17 世纪，大约持续了两千余年。在这个时期逐渐形成了初等数学的主要分支——术、几何、代数、三角。

按照历史进程和地域的不同，可以把初等数学史分为三个不同的阶段：希腊时期阶段、东方时期阶段和欧洲文艺复兴时期阶段。

希腊时期正好与希腊文化普遍繁荣的时代一致。到公元前 3 世纪，在最伟大的古代几何学家欧几里得、阿基米德、阿波罗尼奥斯的时代达到了顶峰，而终止于公元 6 世纪。当时最光辉的著作是欧几里得的《几何原本》。尽管这部书是两千多年前写成的，但是它的一般内容和叙述的特征，却与我们现在通用的几何教科书非常相近。

希腊人不仅发展了初等几何，并把它导向完整的体系，得到了许多非常重要的结果。例如，他们研究了圆锥曲线：椭圆、双曲线、抛物线；证明了某些属于射影几何的定理；以天文学的需要为指南建立了球面几何以及三角学的原理，并计算出最初的正弦表；确定了许多复杂图形的面积和体积。

在算术与代数方面，希腊人也做了不少工作。他们奠定了数论的基础，并研究丢番图方程，发现了无理数，找到了求平方根的方法，知道算术级数与几何级数的性质；在几何方面希腊人已接近“高等数学”。阿基米德在计算面积与体积时已接近积分运算，阿波罗尼奥斯关于圆锥曲线的研究接近于解析几何。

“希腊七贤”之首泰勒斯最早提出“论证数学”的思想，被后人称作世界第一位数学家和几何证明的创始人。其传人毕达哥拉斯创立的学派盛极一时，该学派在数学上信奉“万物皆数”，最早发现勾股定理等。但是毕达哥拉斯的弟子希帕苏斯在考虑边长为 1 的正方形的对角线的长度时，发现这个长度不能用已知的数来表示，便动摇了“万物皆数”的信条，遭到该学派的谴责，并被抛

向大海而葬身鱼腹。虽然如此，希帕苏斯的发现还是引发了第一次数学危机，也促成了后来无理数的发现。

应该指出，当时我国的算术和代数也已经达到了很高的水平。在公元前 2 世纪到 1 世纪已有了三元一次联立方程组的解法。同时在历史上第一次利用负数，并且叙述了对负数进行运算的规则，也找到了求平方根与立方根的方法。

随着希腊科学的终结，在欧洲出现了科学萧条时期，数学发展的中心移到了印度、中亚细亚和阿拉伯国家。从 5 世纪到 15 世纪的一千余年间，在这些地方，数学由于计算的需要，特别是由于天文学的需要而得到发展。印度人发明了现代计数法，引进了负数，并把正数与负数的对立和财产与债务的对立及直线上两个方向的对立联系了起来。他们开始像运用有理数一样运用无理数，并给出了表示各种代数运算包括求根运算的符号。由于他们没有对无理数与有理数的区别感到困惑，从而为代数打开了真正的发展道路。

“代数”这个词本身起源于 9 世纪的数学家和天文学家穆罕默德·花拉子米。花拉子米的著作基本上建立了解方程的方法。从那时起，求方程的解作为代数的基本特征被长期保持了下来。他的代数著作在数学史上起了重大作用，后来被翻译成拉丁语，曾长期作为欧洲主要的教科书。

中亚细亚的数学家们找到了求根和一系列方程的近似解的方法，得出了“牛顿二项式定理”的普遍公式，他们有力地推进了三角学，把它建成一个系统，并造出非常准确的正弦表。这时中国科学的成就开始传入邻国。约在公元 6 世纪，我国的古代数学家已经会解简单的不定式方程，知道几何中的近似计算以及三次方程的近似解法。

到 16 世纪，所缺少的主要是对数及虚数，还缺乏字母符号系统。正如在远古时代，为了运用整数而制定表示它们的符号一样，现在为了运用任意数并对

它们给出一般运算规则，需要制定类似的符号。这个任务从希腊时代就开始而直到 17 世纪才完成，在笛卡尔和其他人的工作中最终形成了现代的符号系统。

在科学复兴时期，欧洲人向阿拉伯人学习，并且根据阿拉伯文的翻译熟识了希腊科学。从阿拉伯沿袭过来的印度计数法逐渐在欧洲确定了下来。

只是到了 16 世纪，欧洲科学终于超越了先人的成就。例如意大利人塔尔塔利亚和费拉里在一般形式上解决了三次方程与四次方程解的问题；在这个时期开始运用虚数；现代的代数符号也出现了，其中出现了表示未知数和表示已知数的字母符号，这是韦达在 1591 年提出的。

最后，英国的奈皮尔发明了供天文学作参考的对数，并在 1614 年发表。布利格算出第一批十进对数表是在 1624 年。

当时在欧洲也出现了“组合论”和“牛顿二项式定理”的普遍公式；级数确定得更早，所以初等代数的建立是完成了，以后则是向高等数学即变量数学的过渡。但是初等数学仍在发展，仍有很多新的结论出现。

第三个时期是变量数学的时代。到 16 世纪，封建制度消亡，资本主义开始发展并兴盛起来。在这一时期中，家庭手工业、手工业作坊逐渐被工场手工业所取代，并进而转化为以使用机器为主的大工业。因此，对数学提出了新的要求。这时，对运动的探究变成了自然科学的中心问题。实践的需要和各门科学本身的发展使自然科学转向对运动的研究，对各种变化过程和各种变化着的量之间的依赖关系的研究。

17 世纪开始了人类的科学时代。由于人们掌握了科学方法，自然科学在各方面都呈现出一派突飞猛进的大好形势，其中由牛顿一手奠定基础的物理科学两大支柱：力学和数学，尤其起了带头和主力军的作用。这时，“运动”成为自然科学研究的中心课题，进而迫使数学去建立相应的概念和理论。17 世纪上半

叶，变量的概念随之而生。伟大的数学家笛卡尔以力学的要求为背景，把几何内容与代数形式结合起来，引进了笛卡尔“变数”，他把过去对立着的两个研究对象“数”和“形”统一起来，于1637年建立了解析几何学，完成了数学史上一项重要的变革；从此，开始了变量数学的新纪元。恩格斯对笛卡尔的变量思想给予了极高的评价：“数学中的转折点是笛卡尔的变数。有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生，并且是由牛顿和莱布尼茨大体上完成的，但不是由他们发明的。”

作为变化着的量的一般性质和它们之间依赖关系的反映，在数学中产生了变量和函数的概念。数学对象的这种根本扩展决定了数学向新的阶段，即向变量数学时期的过渡。数学中专门研究函数的领域叫作数学分析，或者叫无穷小分析，无穷小量的概念是研究函数的重要工具。所以，从17世纪开始的数学的新时期——变量数学时期，可以被定义为数学分析出现与发展的时期。

1637年，笛卡尔完成了其著作《几何》。这本书奠定了解析几何的基础，给出了字母符号的代数和解析几何原理，即引进坐标系和利用坐标方法把具有两个未知数的任意代数方程看成平面上的一条曲线。解析几何给出了回答如下问题的可能：

（1）通过计算来解决作图问题；

（2）求由某种几何性质给定的曲线的方程；

（3）利用代数方法证明新的几何定理；

（4）反过来，从几何方面来看代数方程。

解析几何是这样一个数学门类，即在采用坐标法的同时，用代数方法研究几何对象。在笛卡尔之前，数学中起优势作用的是几何学。笛卡尔把数学引向

另一途径，这就使代数获得更重大的意义。

变量数学发展的第二个决定性标志是牛顿和莱布尼茨在 17 世纪后半叶建立的微积分。事实上牛顿和莱布尼茨只是把许多数学家都参与过的艰难准备工作完成了，它的萌芽却要追溯到古代希腊人所创造的求面积和体积的方法。

微积分的起源主要来自三个方面的问题：一是力学的一些新问题，如已知路程与时间的关系求速度及已知速度与时间的关系求路程；二是几何学中一些相当古老的问题，如作曲线的切线和确定面积与体积等问题；三是函数的极值问题。

除了变量与函数概念以外，以后形成的极限概念也是微积分以及相关学科进一步发展的基础。同微积分一道，还产生了数学分析的另外部分：级数理论、微分方程论、微分几何。所有这些理论都是因为力学、物理学和技术问题的需要而产生并向前发展的。

当时尽管微积分学得到了广泛的应用，但是逻辑上却存在着一些不严密之处，尤其是在无穷小概念上的混乱，曾引起过不少科学家的批评。1734 年，英国哲学家、牧师贝克莱（George Berkeley，1685—1753）发表了在科学史上引起轩然大波的小册子《分析学家，或致一位不信神的数学家》，矛头直指牛顿的流数方法和莱布尼茨的微积分，立即引发了历史上耸人听闻的第二次数学危机，从而激发 18、19 世纪的众多数学家为微积分的完善作了大量出色的工作，促使微积分日臻完善，化解了第二次数学危机，也发展了一些后续学科，诸如微分方程、微分几何、复变函数等。

数学分析蓬勃发展，不仅成为数学的中心和主要部分，而且还渗入数学中较古老的一些领域，如代数、几何与数论。通过分析变量、函数和极限等概念，运动、变化等思想，使辩证法渗入全部数学。同样地，只有通过分析，数学才

能在自然科学和技术的发展中成为精确表述规律和解决问题的得力工具。

在希腊人眼中，数学基本上就是几何；在牛顿以后，数学基本上就是分析了。因而可以说，微积分的创立在科学史上具有决定性的意义。

当然，分析不能包括数学的全部。在几何、代数和数论中都保留着它们特有的问题和方法。比如，在17世纪，与解析几何同时产生的还有射影几何，而纯粹几何方法在射影几何中占统治地位。

同时期还产生了另一个重要的数学门类——概率论。它研究大量“随机”现象的规律问题，给出了研究出现于偶然性中的必然性的数学方法。

在希腊几何的历史上，欧几里得所做的严格和系统的叙述结束了以前发展的漫长道路。和这种情况相似，随着分析的发展必然出现更好地论证理论、使理论系统化、批判地审查理论的基础等这样一些任务。这些任务出现于19世纪中叶，这些重要而困难的工作在许多杰出学者的努力下而圆满完成，特别是获得了实数、变量、函数、极限、连续等基础性概念的严格定义。变量数学的长足发展，促使许多新兴的数学学科蓬勃向前，其内容和方法不断地充实、深入和扩大。到19世纪初，数学研究领域业已枝繁叶茂，硕果累累，似乎数学的宝藏已挖掘殆尽，无多大发展的余地了。数学这块鏖战的阵地上出现了胜利后的暂时宁静。这宁静孕育着新的激战，预示着巨大革命潮流的到来。随着自然科学及工程技术的迅猛发展，19世纪20年代，数学革命终于再次来临了。

理论原则的建立是其发展的总结，但不是它的终结，相反的，正是新理论的起点。分析的情形也是这样，由它的基础的准确化而产生了新的数学理论。这就是19世纪70年代德国数学家康托尔所建立的集合论。在此基础上又产生了分析的一个新分支——实变函数论。集合论的一般思想已渗入数学的所有分支。这种“集合论观点”与数学发展的新阶段不可分割地联系在一起。

正当人们欢呼喝彩时，“罗素悖论”好似一颗重磅炸弹，震撼了数学界，号称天衣无缝、绝对正确的精确数学居然也出现了自相矛盾。这一悖论使数学家们惶恐不安，许多人努力设法去消除这个悖论，于是引起了一场涉及数学基础的大论战。它刺激着大批数学家去奋力探索如何进一步建立严格的数学基础，比如希尔伯特形式化公理方法及罗素对数理逻辑的探讨，都对数学发展有着十分重要的影响。由于这些崭新的数学领域的出现，数学又迈进了一个新的历史时期——现代数学时期。

第四个时期为现代数学时期。这一时期的特征是数学的研究对象数量急剧增加，一切可能的和更为一般的量及其关系，都成为数学的研究对象。现代数学的另一个特征是新的概括性概念的建立，富有新的更高的抽象程度。

19 世纪上半叶，罗巴切夫斯基和波尔约就已经建立了新的非欧几何学，它的思想是别开生面的和出乎意外的。正是从这个时候起，开始了几何学的原则上的新发展，改变了几何学是什么的本来理解。它的研究对象与使用范围迅速扩大。1854 年，著名的德国数学家黎曼继罗巴切夫斯基之后，提出了几何学家能够研究的“空间”的种类有无限多的一般思想，并指出这种空间的可能的现实意义。如果说，以前几何学只研究物质世界的空间形式，那么现在；现实世界的某些其他形式，由于它们与空间形式类似，也成了几何学的研究对象，可采用几何学的各种方法对它们进行研究。因此，“空间”这一术语在数学中获得了新的更广泛的，也是更专门的意义，同时几何学方法本身也大大地丰富和多样化了。欧几里得几何本身也发生了很大的变化。现在可研究更为复杂的图形，乃至任意点集的性质。同时也出现了研究图形本身的崭新的方法，在这些研究的基础上，产生了各种新而又新的“空间”和。它们的“几何”罗巴切夫斯基空间、射影空间、各种不同维数的欧氏空间、黎曼空间、拓扑空间等，所有这

些概念都找到了自己的应用。

在 19 世纪，代数也出现了质的变化。以往的代数是关于数字的算术运算的学说。这种算术运算是脱离了给定的具体数字在一般形态上形式地加以考察的。也就是说，在代数中，量都以字母来表示，按照一定的法则对这些字母进行运算：现代代数在保持这种基础的同时，又把它大大地推广了。它还考察比数具有更普遍得多的性质的“量”，并且研究对这些量的运算，这些运算在某种程度上按其形式的性质来说与加、减、乘、除等普通算术运算是类似的。向量是最简单的例子，我们知道，向量按照平行四边形法则相加，以致“向量”这个术语本身也常常失去意义，而一般的是讨论“对象”了，对这种“对象”可以进行与普通代数运算相似的运算。例如，两个相继进行的运动相当于某一个总的运动，一个公式的两种代数变换相当于一个总的变换等，因此就可讨论运动与变换所特有的“加法”。现代代数在一般抽象形式上研究所有这种类似的运算。

现代代数理论是综合了 19 世纪前半叶许多数学家的研究理论后形成的，其中尤以法国数学家伽罗瓦的理论最为著名。现代代数的概念、方法和结果在分析、几何、物理以及结晶学中都有重大应用。群论与线性代数是现代代数中内容丰富的两个分支，并在自己的发展中得到很广的应用。

与此同时，分析也发生了深刻的变化。首先，它的基础得到了精确化，特别是形成了它的基本概念：函数、极限、微分、积分，最后是变量概念本身的精确和普遍定义，实数的严格定义也给出了。这些工作是由一批杰出的数学家完成的，其中有捷克数学家波尔查诺、法国数学家柯西、德国数学家魏尔斯特拉斯和戴德金等。在分析中发展出一系列新的分支，如实变函数论、函数逼近论、微分方程定性理论、积分方程论、泛函分析。在分析和数学物理发展的基础上同几何与代数新思想相结合产生的泛函分析在现代数学中起着特别重要的

作用。

此外，我们还必须提到德国数学家康托尔的集合论。它促进了数学的其他许多新分支的发展，对数学发展的一般进程产生了深刻的影响。集合论还导致了数学领域的另一分支——数理逻辑的发展。一方面，数理逻辑基于数学的起源和基础，另一方面它又和计算技术的最新课题紧密相连。数理逻辑得到了许多深刻的结论。这些结论从一般认识论的观点来看也十分重要。但是，从好似笑话的罗素悖论，再到天才数学家康托尔的集合论不能自圆其说，惹起第三次数学危机，直到朴素集合论蜕变为公理集合论时，才平息了轰动一时的第三次数学危机。

敢问：是否还会有第四次乃至第 n+1 次数学危机呢？

从以上数学发展的轨迹中可以预测，数学的现代发展趋势不仅表现在现代数学的新领域和高层次中，而且还表现在数学向一切学科与社会部门的渗透和应用中，其主要表现在以下几个方面。

（1）从单变量到多变量，从低维到高维。

（2）从线性到非线性。

（3）从局部到整体，从简单到复杂。

（4）从连续到间断，从稳定到分岔。

（5）从精确到模糊。

（6）数学与计算机的结合。

二、数学教育本质与趋势

数学教育发展的源头，可以上溯到古代中国的“六艺”（礼、乐、射、御、书、数）教育和西方的“七艺”（文法、修辞、逻辑学、算术、几何、天文、音乐）教育。随着社会政治、经济、文化、科学、技术和生产的发展，数学本身