



启蒙数学文化译丛
丛书主编 汪宇

A Brief History of Mathematical Thought

Key Concepts and Where They Come from

Luke Heaton

李永学
译

〔英〕卢克·希顿
著

数学思想简史

✱ 这本简明易读、妙趣横生的数学思想史，以数学概念为中心，勾勒了数学思想的推进与演化，揭示了数学对人类文明进程的影响，呈现了数学的哲学文化意蕴，是一本难得的数学课外读物。



华东师范大学出版社

启蒙数学文化译丛



丛书主编 汪 宇

A Brief History of Mathematical Thought

Key Concepts And Where They Come From

Luke Heaton

数学思想简史

〔英〕卢克·希顿 著 李永学 译



华东师范大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学思想简史 / (英) 卢克·希顿著; 李永学译. —上海: 华东师范大学出版社, 2019
ISBN 978-7-5675-8829-5

I. ①数… II. ①卢… ②李… III. ①数学史—普及读物 IV. ①O11-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 026667 号

启蒙数学文化译丛系启蒙编译所旗下品牌

本书版权、文本、宣传等事宜, 请联系: qmbys@qq.com

A BRIEF HISTORY OF MATHEMATICAL THOUGHT: KEY CONCEPTS AND WHERE THEY COME FROM by LUKE HEATON

Copyright © 2015 by Luke Heaton

First published in the English language in the United Kingdom by Robinson, an imprint of Constable & Robinson. This Chinese language edition is published by arrangement with LITTLE, BROWN BOOK GROUP LIMITED through Big Apple Agency, Inc., Labuan, Malaysia. Simplified Chinese edition copyright: 2019 Wuhan Enlightenment Compilation and Translation Company Co., Ltd.

All rights reserved.

上海市版权局著作权合同登记 图字: 09-2019-732 号

数学思想简史

作 者 (英) 卢克·希顿

译 者 李永学

策划编辑 王 焰

组稿编辑 龚海燕

项目编辑 王国红

特约审读 石 岩

出版发行 华东师范大学出版社

社 址 上海市中山北路3663号 邮编 200062

网 址 www.ecnupress.com.cn

电 话 021-60821666 行政传真 021-62572105

客服电话 021-62865537 门市 (邮购) 电话 021-62869887

地 址 上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口

网 店 <http://hdsdcbs.tmall.com>

印 刷 者 山东鸿君杰文化发展有限公司

开 本 890 × 1240 32开

印 张 10.5

字 数 234千字

版 次 2020年1月第一版

印 次 2020年1月第一次

书 号 ISBN 978-7-5675-8829-5

定 价 72.00元

出 版 人 王焰

(如发现本版图书有印订质量问题, 请寄回本社客服中心调换或电话021-62865537联系)

导 言

1

数学是科学的大门与钥匙……漠视数学会伤害一切知识,因为无视数学的人无法知道其他科学或者这个世界的事物。而且,更糟糕的是,无视数学的人无法认识到自己的无知,因此也不去找补救的方法。

——罗杰·培根(Roger Bacon, 1214—1292)

数学的语言改变了我们思考这个世界的方式。毫不夸张地说,如果没有数学,我们的大部分科学和技术都是无法想象的。而且,无数艺术家、建筑师、音乐家、诗人和哲学家都坚持认为,理解数学对于他们的工作来说至关重要。显然数学是很重要的,在这部书中,我希望向读者传达数学的优雅诗意,以及数学在各种形式的实践中所产生的深刻的文化影响。无论如何,只有当你对数学的实际内容是什么有了几丝明悟之后,才能理解它的影响。我们知道,即使自己并非工程师,也可以感受到当代技术的变化所带来

- 2 的冲击;但与此不同的是,如果我们对数学这一学科本身没有一定的了解,就很难理解数学的威力和影响。

大部分人都会一点儿数学,学过一些计算规则。但遗憾的是,对于这些计算技巧后面的论证与推理,知道的人就少得多了。更有甚者,还有太多的人错误地认为,他们不能奢望自己可以理解并欣赏数学的诗意。这部书不是一本关于数学技巧的训练手册,它只是对一些数学思想的非正式优美指南。在本书中,我不会涉及太多过于专业化的东西,因为我的首要目标是让读者看到,在我们试图理解这个世界的模式的过程中,数学语言是怎样随着时间推移一步步发展起来的。我希望,通过书写数学理念的发展,我能够启发读者,能够让纯粹数学与应用数学的一些深沉厚重的假设焕发青春,并让读者看到,对数学的某种理解能够加强我们对一般事实的理解。

人们经常称颂(或漠视)数学,原因是它高高在上,远离普通人的生活,但对这一学科的这种评价是全然错误的。G. H. 哈代(G. H. Hardy)曾在《一个数学家的自白》(*A Mathematician's Apology*)中如是说:

正如大部分人能够享受令人心旷神怡的曲调一样,大部分人也都有些数学鉴赏力,对数学真正感兴趣的人可能比对音乐感兴趣的人还要多。表面上看可能与此相反,但解释起来并不难。音乐可以刺激大众情绪,但数学做不到这一点;不懂音乐多少有些令人颜面扫地,但并无大碍;而大部分人对数学之名畏之如虎,以至于每个人都在由衷地强调自己在数

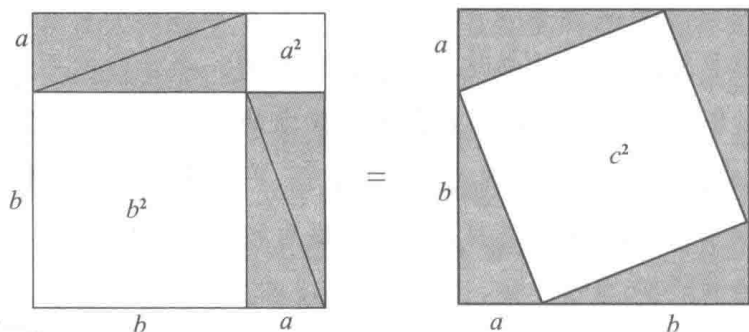
学上的愚蠢。

数独的广受欢迎就说明了这一点。这个游戏所要求的完全是 3
对数理逻辑的应用,但为了不使游戏者产生畏惧之心,游戏说明上经常宣称它“不需要数学知识!”我们所知道的数学塑造了我们审视这个世界的方式,尤其是因为它是“科学的婢女”。举个例子,一位经济学家、一位工程师或者一位生物学家或许要多次测量一个东西,然后取几次测量的平均值。因为我们已经发展出计算平均值的符号算法,所以能够建立“平均值”这样一个十分有用也高度抽象的概念。但这一切只有在有了数学的符号系统之后才能进行,没有这些符号,我们就无法记录数据,更遑论定义平均值了。

除了计算,数学家感兴趣的还有概念和模型。然而,每个人都应该清楚的是,数千年来,计算技术一直都对人类具有至关重要的意义。例如,如果没有数字的概念,大部分贸易形式就无法想象;没有数学,人们就无法组织一个王朝,或者发展现代科学。更普遍地说,数学理念并非只有实际应用上的重要性:正是我们手中掌握的概念工具塑造了我们处理这个世界的方式。正如心理学家亚伯拉罕·马斯洛在他的著名评论中所说的那样,“如果我们手中掌握的唯一工具是锤子,就会把一切事物都视为钉子”。无论在实际上还是心理上,我们对世界中的事物进行计数、计算和测量方面的能力都是关键的,但需要强调的一点是,数学家并没有把时间花在计算上。数学的真正挑战是建立论证。

许多数学思想都常遭人误解,毕达哥拉斯的著名定理给我们提供了一个绝好的例子。大部分受过教育的人都知道,已知任意 4

直角三角形,只要知道了其中两条边的长度,我们就可以利用公式 $a^2+b^2=c^2$ 计算另一条边的长度。但当人们被要求反复进行这类计算的时候,就会错误地认为数学的全部真谛就是应用一套给定的规则。尽管对毕达哥拉斯定理的证明事实上数以百计,但令人遗憾的是很少有人能令人信服地证明毕达哥拉斯定理**为什么**一定正确。证明这一定理成立的一个简单方法可以围绕下面的图解展开:



毕达哥拉斯: 等号两边是一对全等正方形,边长都是 $a+b$ 单位长度。等号左边的正方形含有一个边长为 a 单位长度的正方形、一个边长为 b 单位长度的正方形、再加上 4 个直角三角形。而等号右边的正方形则由一个边长为 c 单位长度的正方形加上 4 个直角三角形组成。我们只需要移动左边那个正方形中的 4 个三角形,就可以把它转化成右边的三角形,而移动图形不会改变它们的面积。因为白色图形的面积在两个图形中始终不变,因此,对于任何直角三角形来说, $a^2+b^2=c^2$ 。证毕。

怀疑者: 你怎么能够肯定在右边总会得到一个正方形? 更具

5 体地说,你怎样才能确定,无论 a 和 b 取何值,三角形总会相接于

一点呢？

毕达哥拉斯：两个图形的高都是相等的，同为 $a+b$ 单位长度。这告诉我们，正好在等号右边的两个三角形一定会相接于一点，因为它们的大小刚好，可以被塞进图形中的大正方形之内。与此类似，右边图形中底部的两个三角形也会在同一点相遇，因为这一边的长度也是 $a+b$ ，等于 $b+a$ ，即大正方形的边长。

怀疑者：那好吧。但你怎么知道右边的那些三角形总是直角三角形呢？换句话说，你怎么知道右边图像的确是个正方形？

毕达哥拉斯：你是否同意，这个图形的四条边等长，四个角也相等？

怀疑者：我同意。旋转右边的图形，经过 90° 、 180° 或者 270° 之后，我们会得到同样的图形。

毕达哥拉斯：看到了这些事实之后，难道你还认为这个图形有可能不是正方形吗？怪不得人们都把你叫作怀疑者！

我写这本书是要告诉读者，数学语言是如何进化的，数学论证是怎样与人类更为广阔的探索紧密相连的。这本书与许多哲学家的工作相关，特别是与路德维希·维特根斯坦的工作相关；但它不是一部非数学理念史，也不打算在数学哲学中那些相互冲突的“全局观点”之间划出一条战线来。如果这本书能够让人深思，那就说明我已经达到了我的预想目标；但我也试图反驳有些人的某种观点，即认为就像科学家发现关于物理对象的事实一样，数学家是发现有关抽象对象的事实。数学语言是没有意义的，因为抽象对象先于数学家而存在！事实恰好相反，因为数学语言是人们实际上

可以使用的工具,所以我们才能够认识抽象的对象。

有关人类认知的一个基本要点是,我们是通过语言来表达有关物质世界的理论或阐释的。人们做出关于事实的**命题**,对做出命题的能力进行的反思性的系统研究则引导我们走进数学的世界。确实,我们对数学的理解总是从一个清晰的、易于理解的情况开始,进而形成一套起作用的抽象原理。例如,儿童学唱数数歌,然后由此开始,他们对实际存在的物理事物进行计数。我们的计数基础是为实物计数,这种具体的经验让我们的头脑产生了对数字的感觉。当我们逐步发展出抽象的概念之后,便会恰如其分地相信,我们也可以着手对任意物体的集合计数。也就是说,对于某人来说,当他在某种特定场合下,在某种实在的、可数的物体存在的情况下使用数字词汇时,这些词于他而言已经是有意义的事物了。因此,一旦人们获得了某种语言,这种语言本身就会让人从数字的角度考虑问题,而不管他们要计数的是何种物体。

有些人错误地认为,从事数学工作,只需要遵循某些规则。我猜测,这些人之所以有这样错误的观点,是因为为了应付自己的老师和考官,他们所要做的工作仅仅是正确地使用某些规则而已。事实上,高等数学本质上是一种创造性的追求,它要求人们具有想象力。因此,一旦我们具有创造性的洞察力,就离掌握规则的时刻相去不远了。因为如果数学家想要对数学知识的整体有所贡献,就需要互相交流想法。完整陈述论证所需要的那些形式训练对数学知识的形成本质上是一种约束,但我们所知道的数学也反映了激励数学共同体的成员的问题、挑战和文化关切。

我希望,这本书会让你相信,数学家是一批探索规律的人,而

能被系统地检验的正式、合乎逻辑的证明,是对数学有效性的终极测试。一个严格按照形式做出的简洁清晰的证明是人们可以理解的优美事物,而且我认为,如果一项论证明显可以形式化,那么就可以很公允地说,它是一项数学论证。不过,尽管我们可以通过学习使用某种特定的形式概形而获得理解力,但即使并不了解手头的主题,人们也有可能正确地检查某项形式论证的每一个步骤。的确,一台计算机可以进行这种工作,尽管计算机根本不是什么数学家,就像一台复印机远算不上艺术家一样。

在本书的写作过程中,我采用的是一种更为直观的方法,因为我的目的并不是要对读者进行形式技巧的恰当训练,而仅仅是想让每种论证的核心尽可能易于理解。尽管如此,因为本书的主题是微妙的、复杂精细的,因此在某些情况下,我们仍然不可避免地需要进行某些仔细的论证。数学是这样一门学科,在学习它的时候,同一个句子你必须多读几遍;正如阅读诗歌一样,你必须以合适的速度阅读。

本书是依照数学实践发展的历史顺序写作的,其中对概念的创新投入了较多的关注。我无法声称本书涵盖了所有关键的理念,但我努力为人们普遍理解的数学的主要变革画出一份概图。本书的写作结构是两种考虑的结合,其一为历史性的考虑,其二为主题方面的考虑,全部 13 章可以分为 4 个主要部分。我从讨论数字概念开始,从对史前仪式的试探性和修辞性叙述一直说到古代世界中的数学。我审查了计数与总体测量之间的关系,试图解释代数的兴起是怎样戏剧性地改变了我们的世界的。

第一部分到现代时期的“数学挂锁”为止,但我在第二部分又

回溯了过去。更具体地说,我讨论了微积分的起源,以及伴随着非欧几里得几何的诞生而发生的概念性转变。简而言之,我试图解释现代数学是怎样从超越希腊、阿拉伯和其他古代文明的过程中成长起来的。

第三部分转而讨论数学中最富哲学性的术语:无穷的概念和形式逻辑的基础。我也讨论了艾伦·图灵(Alan Turing)的天才想法,并试图阐明真理、证明与可计算性之间的关系。尤其是,我通过对马季亚谢维奇(Matiyasevich)定理的演示,集中关注了一个有关加法和乘法的无限丰富性的证明。我还探讨了库尔特·哥德尔(Kurt Gödel)有关算术不完备性的著名定理。

在最后一部分,我探讨了数学在我们试图理解周围世界的过程中所扮演的角色。我尤其描述了模型的重要性,以及数学在生物学中扮演的角色。在本书的最后,我不再考虑任何特定的定理,而是试图使用我们从前面讨论的数学活动中学到的东西来对人们的思想行为进行一番总体思索。

撰写这本书的一个挑战在于要正确地确定那些便于讲解的简单命题的重要性。有些命题就像纸飞镖,如果你知道它们会飞向哪里,就可以稍微给它们一点儿篇幅,说明它们的含义。但如果你除了它们字面上的意义之外没有别的信息,便无法准确地探知它们的含义,因为这些命题的目的性并没有被明确地写出来。其他命题显得很庄重,它们就像石头一样,具有容易理解的简洁,能够简单明了地告诉我们哪些事情是可行的、人们是怎样叙述的。但遗憾的是,人们往往倾向于低估容易理解的简单命题的价值,因为我们更倾向于去赞美那些看上去深奥晦涩、难以理解的想法。正

如伟大的思想家布莱兹·帕斯卡(Blaise Pascal)在《说服的艺术》(*The Art of Persuasion*)一书中所评论的那样:“人们偏离他们应该选择的正确道路的一个主要原因是他们碰到的第一个概念,即优美的东西是难以理解的,它们身上带有各种伟大的、强大的、高尚的、庄严的标志。这种概念毁掉了一切。我情愿称这些东西为低俗的、平凡的、司空见惯的事物。这些称呼对于它们而言更为合适。我极不喜欢那些虚夸的词句……”

数学定理的万丈高楼有着玲珑剔透的完美,它看上去高高在上,远离这个喧嚣杂乱、充满了偶然事件的日常世界。然而,数学是人类文化的产物,它与我们理解这个世界的种种尝试一起进化发展。我们不应该把它描绘为对“抽象”对象的研究,而应该把它视为模型的诗歌,我们的语言在其中引导出了它所宣布的真理。数学家带来了他所宣称的真理,这听上去有些神秘,但我们可以用一个简单的例子加以说明。我们不妨想一想国际象棋的情况。通过描绘下棋的规则,我们创造了象棋这种游戏,它很完整,也创造出了我们一开始发明它的时候没有想到的真理。举个例子:无论玩没玩过这个游戏,我们都可以证明,如果可供你驱使的只有一个王和一对马,你无法将死一位懂得象棋的对手,无论他手上还有哪些棋子。很显然,象棋是人类的一项发明,但在世界上的任何一个角落,只要人们遵守同样的规则,有关象棋的这一事实都将是真实的,而且我们也不难想象,这些熟悉的规则会在任何地方起作用。

数学的语言和方法论呈现和描绘了我们可以研究的体系,这些体系或者模型和象棋一样也是人类的发明。然而,作为一个整

术与人类的目的相符合。例如,人类(以及其他动物)能够在意识中将物品分组,我们发现,计数过程的确说明了这些组的多样化形式。而且,许多不同的数学分支都与艺术、科学和数学的其他部分之间具有深刻的关联。

简而言之,数学是一种语言,而且,尽管我们可能会对宇宙终究是可以理解的这一点感到吃惊,科学具有数学性这一点不应该让我们感到惊讶。科学家需要交流他们的理论,而当我们有一种由规则管理的理解力的时候,一个学生遵循指令便可以画出数学家随后可以研究的模型或结构。当你对之有正确的理解的时候,纯粹的数学性就不再是一个遥不可及的抽象概念了,它就如同你所能感受到的世界一样触手可及,就像我们面前的那些实体一样真实。我认为,数学并不抽象,因为它必须如此,从语言开始发展的时候便必须如此。实际上它是从最简单、最合乎情理的那种语言实践开始的。我们追求更高水平的抽象,其原因无非在于,这是成就现代数学家崇高目标的必由之路。

尤其是,数学语言变得更抽象,意味着由此得到的结论更具普遍性,这就好像孩子们逐步意识到,无论数苹果、梨还是人,本质上都毫无差别。经过代代传承,人们发现,数字与其他的形式系统对他们具有强烈的吸引力:它们能够塑造我们的想象,而且使理解变得可能。数学的故事令人神往,但在撰写这本书的时候,我希望不仅仅是在勾画一部数学思想史。我确信,数学的历史和哲学能为我们理解人类的本质和事实的本质提供一个非常珍贵的视角。我希望,这本书不但能够让读者欣赏一出数学发现的扣人心弦的戏剧,还能向读者转达这一学科的文化、美学和哲学意义。

目 录

导言	1
第一章 开端	1
1.1 语言与目的	1
1.2 人类认知与数学的含义	4
1.3 石器时代的仪式与自行产生的符号	9
1.4 创造清晰的模式	13
1.5 事实的存储	16
1.6 巴比伦、埃及和希腊	19
1.7 圆的逻辑	23
1.8 数学的真实性	25
第二章 从希腊到罗马	30
2.1 早期希腊数学	30
2.2 毕达哥拉斯科学	32
2.3 柏拉图与对称形式	36
2.4 欧几里得几何	41
2.5 欧几里得算法	45
2.6 阿基米德	47

2 数学思想简史

2.7 罗马时期的亚历山大港	50
第三章 比率与比例	53
3.1 测量与计数	53
3.2 归谬法	57
3.3 欧多克索斯、戴德金与分析的诞生	60
3.4 循环小数与戴德金分割	67
3.5 连分数	70
3.6 二次方程式与黄金分割比率	74
3.7 无理性的结构	77
3.8 斐波那契数列	80
第四章 代数的兴起	88
4.1 零与数位制	88
4.2 花拉子密与方程式的科学	94
4.3 代数与中世纪的欧洲	97
4.4 费马小定理	102
4.5 如何制造数学挂锁	104
第五章 力学与微积分	109
5.1 分析学的起源	109
5.2 测量世界	114
5.3 时钟的时代	117
5.4 笛卡尔坐标	119
5.5 线性序与数轴	124

5.6	艾萨克·牛顿	127
5.7	微积分基本定理	130
5.8	从代数到变化率	136
第六章	莱昂哈德·欧拉与哥尼斯堡的桥	142
6.1	莱昂哈德·欧拉	142
6.2	哥尼斯堡的桥	144
6.3	如何画出一个网络	146
6.4	柏拉图立体再研究	149
6.5	庞加莱与拓扑学的诞生	152
第七章	欧几里得第五公设与重新发明几何	157
7.1	测量与方向	157
7.2	非欧几里得几何	164
7.3	空间曲率	166
7.4	几何的统一与多样性	171
7.5	对称与群	177
7.6	古怪的左与右	183
7.7	莫比乌斯带	185
第八章	与无穷打交道	189
8.1	布莱兹·帕斯卡与数学中的无穷	189
8.2	循环论证	192
8.3	数学上的无穷大	195
8.4	康托尔的对	197

8.5 对角线方法	201
第九章 逻辑形式的结构	205
9.1 形式逻辑——“且”“或”“非”	205
9.2 经典逻辑与排中律	209
9.3 机械演绎	211
9.4 量词与性质	212
9.5 谓词演算的输入	216
9.6 公理集合论	218
第十章 艾伦·图灵与计算的概念	222
10.1 从机械演绎到可编程机器	222
10.2 描绘计算	227
10.3 确定型语言游戏	228
10.4 丘奇论题	232
10.5 判定问题	233
10.6 图形与基	237
10.7 半可判定问题	239
第十一章 库尔特·哥德尔与多项式的威力	243
11.1 马季亚谢维奇定理	243
11.2 库尔特·哥德尔	248
11.3 寻找答案	250
11.4 算术不完备	251
11.5 真理、证明与自治	256