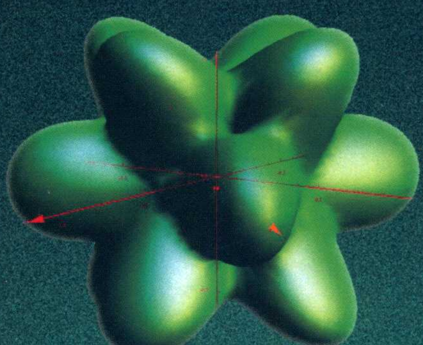
材料固体力学
概要及应用实例

Solid Mechanics in Materials and its Applications



王秀锋 编著

湘潭大学出版社

湘潭大学研究生教材资助项目

材料固体力学·概要及应用实例

王秀锋　编著

湘潭大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

材料固体力学·概要及应用实例 / 王秀锋编著. --
湘潭 : 湘潭大学出版社, 2019.7
ISBN 978-7-5687-0328-4

Ⅰ. ①材… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①材料力学－固体力学－
研究生－教学参考资料 Ⅳ. ① TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 131166 号

材料固体力学·概要及应用实例

CAILIAO GUTI LIXUE GAIYAO JI YINGYONG SHILI

王秀锋 编著

责任编辑：王亚兰
封面设计：何　健
出版发行：湘潭大学出版社
社　　址：湖南省湘潭大学工程训练中心
电　　话：0731-58298960 0731-58298966（传真）
邮　　编：411105
网　　址：http://press.xtu.edu.cn/
印　　刷：长沙印通印刷有限公司
经　　销：湖南省新华书店
开　　本：787 mm×1092 mm 1/16
印　　张：12
字　　数：209 千字
版　　次：2019 年 7 月第 1 版
印　　次：2019 年 7 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5687-0328-4
定　　价：28.00 元

前　言

固体力学是高等学校材料科学相关专业的重要课程，该课程具有概念抽象、内容复杂、公式繁多等特点。由于工科学生的物理思想普遍欠缺，对力学概念和问题求解思路的理解相对困难，清晰地展示概念和思路，是目前材料专业中固体力学教学的一个难题。当前已有的教材及其教学模式，只是一味要求学生推导公式，不能很好地引导学生理解力学思想和应用具体公式求解实际问题，以至于学生迷失在公式的海洋中，从而不能灵活运用已学知识。解决这些问题的关键在于如何将固体力学中抽象概念直观地表达出来，将理论框架清楚地呈现出来，将求解思路完整地描述出来。因此，对于材料专业的学生而言，迫切需要一本简洁介绍固体力学知识且侧重于应用的教材，即舍去繁锁的理论公式推导、强调理论应用的教材。

湘潭大学《材料固体力学》课程是周益春教授主导的湖南省研究生精品课程，它是国家级精品课程《材料的宏微观力学性能》的延续，是一门高级力学课程。编者多年面向材料专业的本科生和研究生开设该课程，深感他们对固体力学知识点的应用渴求。至此，我们在这门课程的基础上将教学要点汇总、将复杂概念可视化、将求解思路简洁化，并将其应用至实际问题求解，引入虚拟数值实验室，最终形成了此教材。这不仅有利于学生掌握力学概念和提高学习效率，还可激发其学习兴趣，从而培养其解决科学与工程问题的能力。

本教材以《材料固体力学》为基础，主要内容包括应力和应变概念、弹性基本理论及弹性平面问题、屈服及塑性理论中难理解、易混淆的知识点和关键内容。本教材的第一部分主要以表格、流程及示意图、大纲等“概要”形式呈现，让读者在学习过程中牢牢抓住要点。第二部分选取了与课程密切相关的经典案例作为“应用实例”，尝试利用课程知识结合数值方法求解实际问题，这不仅可

以极大地激发读者的学习兴趣与热情，使其由被动学习变为主动学习，还可以缓解教师的教学压力、丰富课堂教学的内容、大大提高教学实效。本教材将十分有利于材料、机械和土木等相关专业的本科生、研究生及科研人员对基本固体力学知识的掌握，以及对科学研究和工程实际问题解决能力的培养。

本教材的完成离不开湘潭大学周益春教授的悉心指导，并得到了美国西北大学黄永刚教授的无私帮助。应用实例部分得到了原著作者哈佛大学锁志刚教授、清华大学冯西桥教授等的授权和同意，得到了清华大学张一慧老师和马寅佶老师、西南交通大学袁江宏老师、南京航空航天大学周亚东老师、美国西北大学薛烨光博士等行业专家和好友的热心帮助。在多年教学工作中，湘潭大学杨丽教授、朱旺老师、黄勇力老师、肖良红老师等也提供了许多有益的建议和帮助。近十年来，听过该课的本科生，尤其是钟博文、陈文翔和杨亚洲等同学参与了本书中应用实例的数值计算和文字编写工作。近几年来，在国家自然科学基金(11872326、11202178)，湖南省自然科学基金(2018JJ2379、14JJ3082)和湖南省高校青年骨干教师培养对象等项目的资助下，作者在材料与固体力学交叉领域尤其是柔性可穿戴微流控与传感器等方面进行了一些尝试，部分成果在本书的应用实例中也有所体现。在此，对所有引用成果的前辈和同行、指导过我的老师、项目支持的有关部门、帮助过我的同事和学生等表示衷心的感谢。

由于材料固体力学涉及面太宽、相关经典的文献太多、作者水平和书本篇幅有限，本书无论从选材，还是问题提炼都不是很完善。为此，深切期待广大读者的批评指正，并推荐相关应用实例。

王秀锋

2019 年 10 月

目　录

第一部分　概要

第 1 章　应力理论 ……………………………………………………………… (2)
　§1.1　外力和应力 ………………………………………………………… (2)
　§1.2　平衡微分方程和剪应力互等定律 ………………………………… (7)
　§1.3　任意斜面上的应力和应力边界条件 ……………………………… (9)
　§1.4　应力分量转换公式与主应力 …………………………………… (12)
　§1.5　应力张量的分解 ………………………………………………… (15)
　§1.6　最大剪应力和八面体剪应力 …………………………………… (17)
第 2 章　应变理论 …………………………………………………………… (19)
　§2.1　位移和应变 ……………………………………………………… (19)
　§2.2　应变张量的相关性质 …………………………………………… (22)
　§2.3　应变协调方程 …………………………………………………… (24)
第 3 章　弹性本构关系和弹性问题的求解 ………………………………… (27)
　§3.1　广义胡克定律 …………………………………………………… (27)
　§3.2　弹性应变能 ……………………………………………………… (30)
　§3.3　虚功原理和最小势能原理 ……………………………………… (32)
　§3.4　弹性力学问题的微分提法 ……………………………………… (38)
　§3.5　位移解法 ………………………………………………………… (40)
　§3.6　应力解法 ………………………………………………………… (42)
　§3.7　应力函数解法 …………………………………………………… (43)
第 4 章　弹性平面问题及其实空间解法 …………………………………… (47)
　§4.1　平面问题及其分类 ……………………………………………… (47)
　§4.2　平面问题的求解 ………………………………………………… (50)
　§4.3　直角坐标系下平面问题的求解 ………………………………… (52)
　§4.4　极坐标中的平面问题 …………………………………………… (56)

第 5 章　弹性平面问题的复变函数解法 …………………………………… (64)
§5.1　平面问题的复势表示 ……………………………………………… (64)
§5.2　复势的确定程度 …………………………………………………… (70)
§5.3　平面问题的复变函数级数解法 …………………………………… (73)
§5.4　平面问题的保角变换解法 ………………………………………… (77)
第 6 章　屈服准则和塑性本构关系 ………………………………………… (85)
§6.1　π 平面 ……………………………………………………………… (85)
§6.2　两个常用的屈服准则 ……………………………………………… (89)
§6.3　加卸载条件和加载曲面 …………………………………………… (92)
§6.4　本构关系的增量理论 ……………………………………………… (97)
§6.5　简单加载时的全量理论 …………………………………………… (104)

第二部分　应用实例

E1：新型材料弹性模量特性及其应用 ……………………………………… (110)
E2：基于界面黏附机制的自形成双螺旋结构分析 ………………………… (115)
E3：马蹄形微结构的非线性力学模型 ……………………………………… (121)
E4：柔性微流控芯片中通道和储液腔的自塌陷问题 ……………………… (126)
E5：刚性薄膜与预拉伸柔性基底体系的褶皱问题 ………………………… (134)
E6：刚性薄膜与双层预拉伸柔性基底体系的褶皱问题 …………………… (138)
E7：刚性岛/柔性基底的应力屏蔽问题 …………………………………… (142)
E8：复杂载荷下简支梁的应力场计算 ……………………………………… (145)
E9：层状横观各向同性材料空间轴对称问题的求解 ……………………… (154)
E10：刚性岛与柔性基底的界面脱黏问题 ………………………………… (161)
E11：实心圆域问题的复变函数级数解法 ………………………………… (166)
E12：带凹槽非晶态合金圆柱的拉伸屈服强度测试 ……………………… (171)
E13：纳米压痕法测量非晶态合金的理想强度 …………………………… (174)
E14：材料烧结与扩散连接中的孔洞闭合模型 …………………………… (178)

第一部分

概 要

第 1 章　应力理论

§1.1　外力和应力

在外力作用下，物体会发生变形，其各部分之间会产生相互作用。这种内部相互作用为抵抗外力作用而出现，并试图使物体恢复到变形前的位置。用数学的语言来描述这种相互作用就是应力理论，应力是固体力学中最基本的物理量之一。下面以人们常见的滑板受力情况为例，来引入外力和应力的概念。

一、外力

静力学平衡下的滑板受到三种外力对它的作用，即下部支架对它的两个支撑力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$，人脚对它的压力 $\boldsymbol{F}_3$，以及滑板自身的重力 $\boldsymbol{F}_4$（图 1.1a）。若滑板满足静力学平衡状态，可将其简化为一个简支梁（图 1.1b），它在这三种外力的作用下达到力的平衡（$\sum \boldsymbol{F}=0$）和力矩的平衡（$\sum \boldsymbol{M}=0$）。

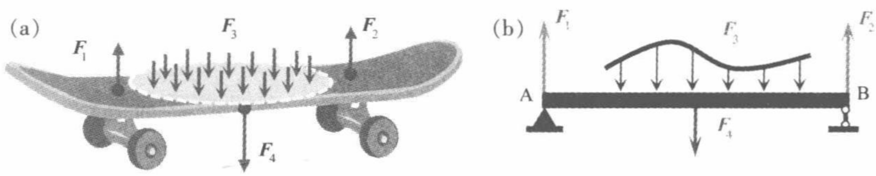


图 1.1　静力学平衡状态下的滑板：(a)受力分析；(b)简支梁模型

根据以上滑板的受力分析，我们可以将其外力分为两类：体力和面力。

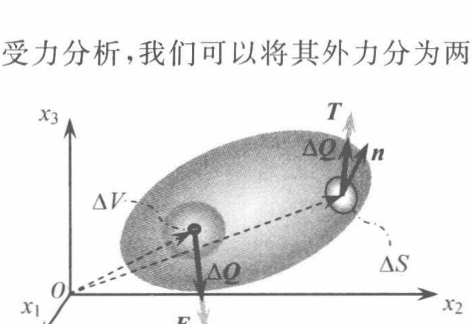


图 1.2　物体所受的两种外力：面力 $\boldsymbol{T}$ 和体力 $\boldsymbol{F}$

体力是指分布在物体内部各个质点上的外力(量纲为[力][长度]$^{-3}$,如图 1.2所示),如重力,电磁力等。它可定义为

$$\lim_{\Delta V\to 0}\Delta \boldsymbol{Q}/\Delta V=\boldsymbol{F} \tag{1.1}$$

面力是指分布在物体表面上的外力(量纲为[力][长度]$^{-2}$,如图 1.2 所示),如物体之间的接触力、流体的压力等。它可定义为

$$\lim_{\Delta S\to 0}\Delta \boldsymbol{Q}/\Delta S=\boldsymbol{T} \tag{1.2}$$

很显然,上述滑板中的 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 和 $\boldsymbol{F}_3$ 为面力,$\boldsymbol{F}_4$ 为体力。注意:体力和面力均为矢量。

二、应力

物体(如滑板)在外界作用下,其内部各个部分之间产生相互作用,这种相互作用力称为内力。为了讨论其作用强度,Cauchy 引入应力矢量概念。简单地描述是:过要考虑的位置 $\boldsymbol{r}$ 取一个微小的区域(内域),该区域与它周围环境(外域)相互作用,设内外区域作用面的法向矢量为 $\boldsymbol{v}$(由内及外),如图 1.3 所示,则定义单位面积的内力,即内力集度为**柯西应力矢量**(Cauchy stress vector,简称应力矢量,量纲为[力][长度]$^{-2}$),表示如下:

$$\boldsymbol{\sigma}_{(r,v)}=\lim_{\Delta A\to 0}\Delta \boldsymbol{F}/\Delta A \tag{1.3}$$

应力矢量不仅随点的位置 $\boldsymbol{r}$ 变化而改变,即使在同一点,也会随截面法线方向 $\boldsymbol{v}$ 改变而改变。注意:应力是作用在物体内截面上的未知内力,而面力是作用在物体外表面上的已知外力,尽管它们的量纲相同。

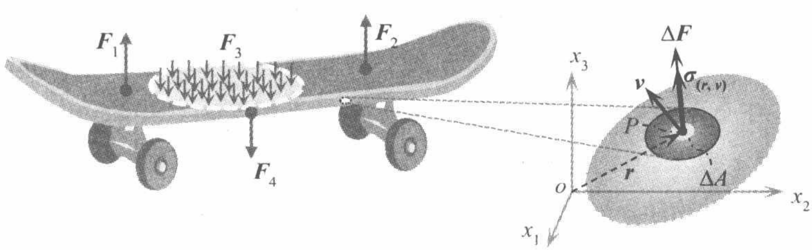


图 1.3 物体内部相互作用产生的应力矢量 $\boldsymbol{\sigma}_{(r,v)}$

三、应力分量

Cauchy 应力矢量的大小和方向与"点的位置"和"过该点的面元法线方向 $\boldsymbol{v}$"有关。要确定一点的应力状态,就需要考虑过该点所有取向截面上的 Cauchy 应力矢量(图 1.4a),这显然是不可能的!为了准确、简明地描述一点

的应力状态，必须使用合理的应力参数。以直角坐标系为例，我们可以先确定过该点的“坐标轴平面上的应力矢量”。由于该点“其他任意截面上的应力矢量”均与“坐标轴平面上的应力矢量”存在一定的数学关系，我们便可得到所有“其他任意截面上的应力矢量”。因此，根据过任意一点的三个坐标轴平面上的应力矢量，就可以全面地描述该点的应力状态（图1.4b），它们用矩阵表示如下：

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad 或 \quad (\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{x} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{y} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{z} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

其中，应力分量的符号规定为：正面上与坐标轴同向为正，负面上与坐标轴反向为正，反之为负。

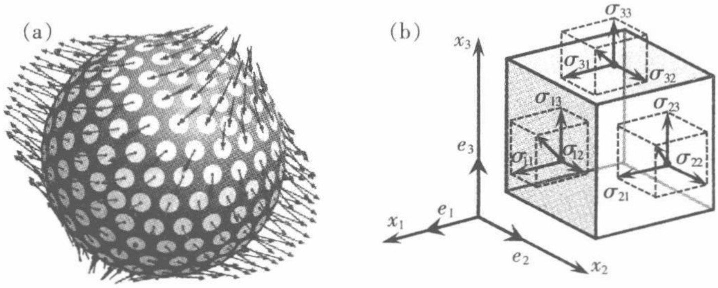


图 1.4　任一点(a)所有取向截面上和(b)三个坐标轴平面上的应力矢量

讨论过一点不同截面上的应力变化趋势称为应力状态分析。为了探讨这种变化趋势，通常将应力矢量进行分解，即将应力矢量 $\boldsymbol{\sigma}_{(\nu)}$ 沿微分面 ΔA 的法线和切线方向进行分解。沿 ΔA 法线方向 $\boldsymbol{\nu}$ 的分量称为**正应力**(Normal stress)，用 $\boldsymbol{\sigma}_n$ 表示；在 ΔA 面内的投影分量称为**切应力**或**剪应力**(Shear stress)，它作用于截面内，用 $\boldsymbol{\tau}$ 表示。固体材料的强度与正应力和切应力密切相关，因此，在工程应用中常使用应力分解形式。

附：张量理论初步知识

零阶张量即标量，如时间 t、质量 m 等。

矢量作为一阶张量，可以记为

$$\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{e}_1+u_2\boldsymbol{e}_2+u_3\boldsymbol{e}_3=u_i\boldsymbol{e}_i \text{或} (u_i)=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$$

二阶张量记为

$$\boldsymbol{A}=A_{11}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+A_{12}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2+A_{13}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3+A_{21}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1+A_{22}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+A_{23}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3+A_{31}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1+A_{32}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2+A_{33}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3=A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

上述 9 个应力分量矩阵形式，即式(1.4)可记为

$$\boldsymbol{\sigma}=\sigma_{11}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+\sigma_{12}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2+\sigma_{13}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3+\sigma_{21}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1+\sigma_{22}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+\sigma_{23}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3+\sigma_{31}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1+\sigma_{32}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2+\sigma_{33}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3=\sigma_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

1. Einstein 求和约定

在张量表达式某项中，若某指标重复出现两次（三次及以上不算），则表示要把该项在指标的取值范围内遍历求和。重复指标称为哑标，如：$\boldsymbol{u}=u_ie_i$；$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_ib_i$；上面二阶张量中最后一个表达式也采用了该种表示形式。

2. 符号 δ_{ij} 和 e_{rst}

(1) δ_{ij} 和 e_{rst} 都是一种函数表示式，它们相当于 $\delta(i,j)$ 和 $e(r,s,t)$，其中，$i,j,r,s,t=1,2,3$。

(2) δ_{ij} 分量集合对应于单位矩阵。

(3) δ_{ij} 和 e_{rst} 有如下性质：

$$e_{ijk}e_{rst}=\begin{vmatrix}\delta_{ir} & \delta_{is} & \delta_{it}\\ \delta_{jr} & \delta_{js} & \delta_{jt}\\ \delta_{kr} & \delta_{ks} & \delta_{kt}\end{vmatrix}$$

$$\delta_{ia}\delta_{ib}=\delta_{ab}$$

根据定义，将 i、j 分别代入 a、b，即可证：$\delta_{ii}\delta_{ij}=\delta_{ij}$，进一步可得 $\delta_{ii}=3$ 和$\delta_{ij}\delta_{ji}=3$。

3. 坐标系与坐标变换

(1) 坐标系的定义

当一个矢径的坐标变化为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i=\mathrm{d}x_i\,\boldsymbol{g}_i \tag{1.5}$$

即可定义矢径对坐标的偏导为基矢量：$\boldsymbol{g}_i=\partial\boldsymbol{r}/\partial x_i (i=1,2,3)$，它们组成一个参考架（坐标架）。

笛卡尔坐标系的基矢 $\boldsymbol{e}_i$ 是 3 个互相正交的单位基矢量(正交标准化基),其满足:$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$。

(2) 坐标变换的转换规律

任何物理量包括标量(零阶张量)、矢量(一阶张量)和张量(高阶张量)都不会因人为选择参考坐标系而改变其固有性质,但是它们的分量会因选取的坐标不同而产生差异。这些分量需要满足坐标间的转换规律,其推导如下:

设笛卡尔坐标系新、老两个坐标系的基矢分别为 $\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{e}'_j$,它们内部相互垂直,即

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_j = \delta_{ij} \\ \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \end{cases}$$

新、老基矢间的分解关系,即新基在老基中的坐标表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_i = \beta_{i'1}\boldsymbol{e}_1 + \beta_{i'2}\boldsymbol{e}_2 + \beta_{i'3}\boldsymbol{e}_3 = \beta_{i'j}\boldsymbol{e}_j \\ \boldsymbol{e}_i = \beta_{i1'}\boldsymbol{e}'_1 + \beta_{i2'}\boldsymbol{e}'_2 + \beta_{i3'}\boldsymbol{e}'_3 = \beta_{ij'}\boldsymbol{e}'_j \end{cases} \tag{1.6}$$

其中,$\beta_{i'j} = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}'_i = \cos(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}'_j) = \beta_{ji'}$,$\beta_{ij'} = \cos(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}'_j) = \beta_{j'i}$ 是新、老坐标轴的夹角余弦,称为转换系数。

注:若新、老坐标系不共一个原点,可以按如下导出转换系数:

空间任一点的新、老坐标系中的矢径满足:$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r}_0$。由(1.6)式,根据其微分线元关系 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}'$ 可得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x_i\boldsymbol{e}_i = \mathrm{d}x_i\beta_{ij'}\boldsymbol{e}'_j = \mathrm{d}\boldsymbol{r}' = \mathrm{d}x'_j\boldsymbol{e}'_j$$

$$\beta_{ij'} = \frac{\mathrm{d}x'_j}{\mathrm{d}x_i},\text{同理可证:}\beta_{i'j} = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}x'_j}$$

根据(1.6)式,可以导出 n 维空间的物理量(n 维 K 阶张量,有 n^K 个分量)在新、老坐标之间的转换规律

$$\boldsymbol{T} = T'_{ijk\cdots}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j\boldsymbol{e}'_k\cdots = T_{mnl\cdots}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_l\cdots \tag{1.7}$$

两边左点积 $\boldsymbol{e}_m$

$$T'_{ijk\cdots}\boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j\boldsymbol{e}'_k\cdots = T_{mnl\cdots}\boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_l\cdots$$

$$T'_{ijk\cdots}\beta_{i'm}\boldsymbol{e}'_j\boldsymbol{e}'_k\cdots = T_{mnl\cdots}\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_l\cdots$$

两边再依次左点积 $\boldsymbol{e}_n$、$\boldsymbol{e}_l$ 等得

$$T'_{ijk\cdots}\beta_{i'm}\beta_{j'n}\beta_{k'l}\cdots = T_{mnl\cdots}$$

这就是新、老坐标之间的转换规律。它可以作为**张量判据**,即:一个数集能否构造一个张量的基本准则,就看其是否满足坐标间的转换规律。

4. 张量代数(表 1.1)

表 1.1 常见张量代数类型

名称	张量形式	分量关系
相等	$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$	同维同阶：$A_{ijk\cdots}=B_{ijk\cdots}$
和、差	$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$	同维同阶：$T_{ijk\cdots}=A_{ijk\cdots}+B_{ijk\cdots}$
数乘	$\boldsymbol{T}=k\boldsymbol{A}$	$T_{ijk\cdots}=kA_{ijk\cdots}$
并积	$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$	$T_{ijkmn}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n=(A_{ijk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k)(B_{mn}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n)$
并矢量	$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c}$	$T_{ijk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k=(a_i\boldsymbol{e}_i)(b_j\boldsymbol{e}_j)(b_k\boldsymbol{e}_k)$
缩并		$S=T_{ijk}\boldsymbol{e}_i\underbrace{\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k}=T_{ijk}\delta_{jk}\boldsymbol{e}_i=T_{ijj}\boldsymbol{e}_i=S_i\boldsymbol{e}_i$(注明缩并对象)
内积	并积＋缩并	$(A_{ijk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k)(B_{mn}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n)=T_{ijkmn}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\underbrace{\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_m}\boldsymbol{e}_n=T_{ijkkn}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_n=S_{ijn}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_n$
点积	$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$	$(A_{ijk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k)\cdot(B_{mn}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n)=A_{ijk}B_{kn}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_n=T_{ijn}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_n$
并双点积	$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B}$	前后顺序：$(A_{ijk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k):(B_{mn}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n)=A_{ijk}B_{jk}\boldsymbol{e}_i=T_i\boldsymbol{e}_i$
串双点积	$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{A}\cdot\cdot\boldsymbol{B}$	就近顺序：$(A_{ijk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k)\cdot\cdot(B_{mn}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n)=A_{ijk}B_{kj}\boldsymbol{e}_i=S_i\boldsymbol{e}_i$

张量判据之二(商判则)：与任一矢量的内积(含点积)为 $K-1$ 阶张量的量一定是一个 K 阶张量。

§1.2 平衡微分方程和剪应力互等定律

当物体受力变形时，物体内部之间存在相互作用。如果从其内部任取一个单元体，分离出来讨论其受力平衡，这个单元体上既有面力又有体力。分析单元体的静力平衡问题，就可以得到单元体沿坐标轴方向的三个力平衡条件和三个力矩平衡条件，即平衡微分方程和剪应力互等定律。对于不同空间问题的求解，需要在不同空间坐标系中，如直角坐标系(长方体等)、柱面坐标系(圆柱、空心圆柱等)和球面坐标系(球、空心球等)建立平衡微分方程和剪应力互等定律。

一、直角坐标系

在笛卡尔直角坐标系中，任取一微元（无限小正六面体）进行受力分析，标出各个应力分量，可沿坐标轴方向的力和力矩平衡条件分别得到如下平衡微分方程和剪应力互等定律：

1. 平衡微分方程

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+F_x=0$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+F_y=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+F_z=0$$

缩写形式： $\sigma_{ji,j}+f_i=0$ 或 $\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$ (1.8)

这里，$\boldsymbol{F}$ 和 $F_i(i=1,2,3)$ 为体力及其分量。(1.8)式给出了应力分量一阶导数和体力分量之间应满足的关系式。

2. 剪应力互等定律

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji} \tag{1.9}$$

(1.9)式又称应力张量的对称性，它与体力或惯性力的存在无关，在没有体力矩的情况下成立。可见，只需 6 个独立的应力分量就可以描述一点的应力状态。

二、其他坐标系

柱面坐标系和球面坐标系中的应力分量、平衡微分方程及剪应力互等定律的分析和推导与直角坐标系类似。

1. 应力分量

(1)柱面坐标系

$$\begin{pmatrix}\sigma_r & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz}\\ \sigma_{\theta r} & \sigma_\theta & \sigma_{\theta z}\\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_z\end{pmatrix} \tag{1.10a}$$

(2)球面坐标系

$$\begin{pmatrix}\sigma_r & \sigma_{r\theta} & \sigma_{r\varphi}\\ \sigma_{\theta r} & \sigma_\theta & \sigma_{\theta\varphi}\\ \sigma_{\varphi r} & \sigma_{\varphi\theta} & \sigma_\varphi\end{pmatrix} \tag{1.10b}$$

2. 平衡微分方程(略去体力)

(1)柱面坐标系

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_{\theta r}}{\partial\theta}+\dfrac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z}+\dfrac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0\\
\dfrac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\dfrac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial z}+\dfrac{2\sigma_{r\theta}}{r}=0\\
\dfrac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta}+\dfrac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\dfrac{\sigma_{rz}}{r}=0
\end{cases}
\tag{1.11a}
$$

(2)球面坐标系

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi}+\dfrac{1}{r}(2\sigma_r-\sigma_\theta-\sigma_\varphi+\sigma_{r\theta}\cot\theta)=0\\
\dfrac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\sigma_{\theta\varphi}}{\partial\varphi}+\dfrac{1}{r}[(\sigma_\theta-\sigma_\varphi)\cot\theta+3\sigma_{r\theta}]=0\\
\dfrac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_{\varphi\theta}}{\partial\theta}+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi}+\dfrac{1}{r}(3\sigma_{r\varphi}+2\sigma_{\theta\varphi}\cot\theta)=0
\end{cases}
\tag{1.11b}
$$

3. 剪应力互等定律

(1)柱面坐标系

$$
\begin{cases}
\sigma_{r\theta}=\sigma_{\theta r}\\
\sigma_{\theta z}=\sigma_{z\theta}\\
\sigma_{rz}=\sigma_{zr}
\end{cases}
\tag{1.12a}
$$

(2)球面坐标系

$$
\begin{cases}
\sigma_{r\theta}=\sigma_{\theta r}\\
\sigma_{\theta\varphi}=\sigma_{\varphi\theta}\\
\sigma_{\varphi r}=\sigma_{r\varphi}
\end{cases}
\tag{1.12b}
$$

以上的平衡微分方程和剪应力互等定律均由单元体中“沿坐标轴方向的力平衡条件”和“力矩平衡条件”所推导。导出过程中对微元的应力状态分析要非常清楚,尤其是沿坐标轴方向的应力分量不能有遗漏。

§1.3 任意斜面上的应力和应力边界条件

一点的应力状态可以由所选取的三个坐标轴平面(法向方向与坐标轴方向平行)上的应力来描述,其他任意斜面(法向方向与坐标轴方向不平行)上的应

力则可以用坐标轴平面上的应力来表示。因此，建立它们之间的联系是必需的。根据§1.2的平衡原理，本节将导出任意斜面上的应力计算公式。

一、任意斜面上的应力表示

给定任意一个斜面，其法向（图1.5）为

$\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2+v_3\boldsymbol{e}_3=v_i\boldsymbol{e}_i$，其中，$v_i=\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_i$ 为方向余弦。

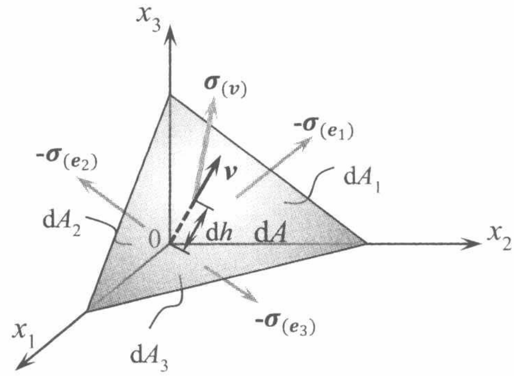


图1.5　任意斜面上的应力

根据面积射影定理，若斜面的面积为 dA，则3个坐标轴平面（负面）的面积 dA_i 表示为

$$\begin{cases} dA_1=v_1 dA=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_1)dA \\ dA_2=v_2 dA=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_2)dA \\ dA_3=v_3 dA=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_3)dA \end{cases} \tag{1.14}$$

四面体的体积为 $dV=\frac{1}{3}dh dA$，dh 为原点到斜面的垂直距离。

根据微四面体的静力平衡条件

$$-\boldsymbol{\sigma}_{(e_1)}dA_1-\boldsymbol{\sigma}_{(e_2)}dA_2-\boldsymbol{\sigma}_{(e_3)}dA_3+\boldsymbol{F}\left(\frac{1}{3}dh dA\right)+\boldsymbol{\sigma}_{(v)}dA=0 \tag{1.15}$$

其中，$\boldsymbol{\sigma}_{(e_i)}$ 为第 i 个坐标轴平面上的应力矢量，$\boldsymbol{\sigma}_{(v)}$ 为斜面 $\boldsymbol{v}$ 上的面力，$\boldsymbol{F}$ 为体力，见图1.5。略去高阶小的体力项 FdV，得

$$dA_1\boldsymbol{\sigma}_{(e_1)}+dA_2\boldsymbol{\sigma}_{(e_2)}+dA_3\boldsymbol{\sigma}_{(e_3)}=\boldsymbol{\sigma}_v dA \quad (dA_i\text{ 是标量，可放前面})$$

将(1.14)式代入，并除去 dA，得

$$\boldsymbol{\sigma}_{(v)}=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{\sigma}_{(e_1)}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{\sigma}_{(e_2)}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{\sigma}_{(e_3)}$$

可以写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{(v)}&=\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{\sigma}_{(e_1)})+\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{\sigma}_{(e_2)})+\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{e}_3\otimes\boldsymbol{\sigma}_{(e_3)})\\&=\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\sigma}_{(e_1)}\otimes\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{\sigma}_{(e_2)}\otimes\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{\sigma}_{(e_3)}\otimes\boldsymbol{e}_3)\end{aligned} \tag{1.16}$$

其中，
$$\begin{cases}\boldsymbol{\sigma}_{(e_1)}\otimes\boldsymbol{e}_1=(\sigma_{11}\boldsymbol{e}_1+\sigma_{12}\boldsymbol{e}_2+\sigma_{13}\boldsymbol{e}_3)\otimes\boldsymbol{e}_1=\sigma_{11}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+\sigma_{12}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2+\sigma_{13}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{\sigma}_{(e_2)}\otimes\boldsymbol{e}_2=\sigma_{21}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1+\sigma_{22}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+\sigma_{23}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{\sigma}_{(e_3)}\otimes\boldsymbol{e}_3=\sigma_{31}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1+\sigma_{32}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2+\sigma_{33}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\end{cases}$$

(1.16)式可以简化为