MATLAB®
examples
MathWorks
图|书|计|划

薛定宇教授大讲堂（卷Ⅳ）

MATLAB 最优化计算

薛定宇◎著
Xue Dingyu

Professor Xue Dingyu's Lecture Hall （Volume Ⅳ）
MATLAB Solutions of Optimization Problems

30年的MATLAB科研与教学积淀

30年的MATLAB推广与普及经历

爱课程与中国大学MOOC（慕课）网站
数万读者学习的视频课程

英文版全球同步发行

视频公开课程
现代科学运算

清华大学出版社

薛定宇教授大讲堂（卷Ⅳ）

MATLAB 最优化计算

薛定宇◎著
Xue Dingyu

Professor Xue Dingyu's Lecture Hall（Volume Ⅳ）

MATLAB Solutions of Optimization Problems

清華大學出版社
北京

内容简介

最优化技术是科学与工程领域中的重要数学工具。本书首先介绍非线性方程组的解析与数值解法，然后介绍各个分支的最优化问题建模与求解方法，包括无约束最优化问题、线性规划与二次型规划、非线性规划、混合整数规划、多目标规划与动态规划等，最后简要介绍智能优化方法，并与常规方法进行对比研究。

与传统的最优化技术方面的教材不同，本书侧重于利用 MATLAB 语言直接描述与求解最优化问题。本书可作为一般读者学习和掌握最优化技术的教材或教辅读物，还可以作为高等学校理工科各类专业的本科生和研究生学习计算机数学语言的教材，并适合作为相关工程技术人员查询最优化计算方法的工具书。

图书在版编目(CIP)数据

薛定宇教授大讲堂. 卷Ⅳ，MATLAB 最优化计算/薛定宇著. —北京：清华大学出版社，2020.1
ISBN 978-7-302-53055-8

Ⅰ. ①薛… Ⅱ. ①薛… Ⅲ. ①Matlab 软件－程序设计－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①TP317

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 098429 号

责任编辑：盛东亮 钟志芳
封面设计：李召霞
责任校对：梁 毅
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 **邮 编**：100084
社 总 机：010-62770175 **邮 购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课件下载：http://www.tup.com.cn，010-83470236
印 装 者：三河市吉祥印务有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：186mm×240mm **印 张**：17.75 **字 数**：350 千字
版 次：2020 年 1 月第 1 版 **印 次**：2020 年 1 月第1 次印刷
定 价：79.00 元

产品编号：083477-01

前 言

PREFACE

科学运算问题是每个理工科学生和科技工作者在课程学习、科学研究与工程实践中常常会遇到的问题，不容回避。对于非纯数学专业的学生和研究者而言，从底层全面学习相关数学问题的求解方法并非一件简单的事情，也不易得出复杂问题的解。所以，利用当前最先进的计算机工具，高效、准确、创造性地求解科学运算问题是一种行之有效的方法，尤其能够满足理工科人士的需求。

作者曾试图在同一部著作中叙述各个数学分支典型问题的直接求解方法，通过清华大学出版社出版了《高等应用数学问题的MATLAB求解》。该书从2004年出版之后多次重印再版，并于2018年出版了第4版，还配套发布了全新的MOOC课程[①]，一直受到广泛的关注与欢迎。首次MOOC开课的选课人数接近14000人，教材内容也被数万篇期刊文章和学位论文引用。

从作者首次使用MATLAB语言算起，已经有30余年的时间了，通过相关领域的研究、思考与一线教学实践，积累了大量的实践经验资料。这些不可能在一部著作中全部介绍，所以与清华大学出版社策划与编写了这套"薛定宇教授大讲堂"丛书，系统深入地介绍基于MATLAB语言与工具的科学运算问题的求解方法。

本丛书不是原来版本的简单改版，而是作者通过十余年的经验和资料积累，全面贯穿"再认识"的思想写作此书，深度融合科学运算数学知识与基于MATLAB的直接求解方法与技巧，力图更好地诠释计算机工具在每个数学分支的作用，帮助读者以不同的思维与视角了解工程数学问题的求解方法，创造性地得出问题的解。

本丛书卷I可以作为学习MATLAB入门知识的教材与参考书，也为读者深入学习与熟练掌握MATLAB语言编程技巧，深度理解科学运算领域MATLAB的应用奠定一个坚实的基础。后续每一卷试图对应于一个数学专题或一门数学课程进行展开。全丛书的写作贯穿"计算思维"的思想，深度探讨该数学专题的问题求解方法。本丛书既适合于学完相应的数学课程之后，深入学习利用计算机工具的科学

---

① MOOC网址：https://www.icourse163.org/learn/NEU-1002660001

运算问题求解方法与技巧，也可作为相应数学课程同步学习的伴侣，在学习相应课程理论知识的同时，侧重于学习基于计算机的数学问题求解方法，从另一个角度观察、审视数学课程所学的内容，扩大知识面，更好地学习相应的数学课程。

本书是丛书的卷Ⅳ。本书系统地介绍两大主题——非线性代数方程求解与最优化技术，主要解决这两个领域的数值计算问题。本书首先介绍各种非线性代数方程的解析解方法与数值解方法，并介绍多解方程的求解问题。后续各章将介绍无约束最优化、线性规划与二次型规划、非线性规划、混合整数规划、多目标规划与动态规划的基本概念与求解方法，侧重于求取最优化问题全局最优解的探讨与实践。本书还将介绍一些常用的智能优化方法，并通过一些具体的例子，对智能优化方法的效果作了必要的对比研究，得出有益的结论。

值此丛书付梓之际，衷心感谢相濡以沫的妻子杨军教授，她数十年如一日的无私关怀是我坚持研究、教学与写作工作的巨大动力。

薛定宇

2019年9月

目　录

CONTENTS

第1章

薛定宇教授大讲堂 MATLAB 最优化计算

方程求解与最优化技术

最优化技术是科学与工程领域重要的数学工具，也是解决科学与工程问题的有效手段。毫不夸张地说，学会了最优化问题的理念与求解方法，可以将科研的水平提高一个档次，因为原来解决问题得到一个解就满足了，学会了最优化的思想后，很自然地将追求问题最好的解。

最优化问题与方程求解是密不可分的，所以这里首先回顾方程求解问题的发展简史，再回顾最优化与数学规划问题领域的发展过程，最后将简要地介绍本书各章的主要内容。

1.1 方程与方程求解

方程（equation）是无处不在的数学模型，是在工程、科学与人们的日常生活中随时都能看到的数学模型。

定义1-1 方程是含有一个或多个变量的等式。这些变量又称为未知变量，而这些满足等式的未知变量的值又称为方程的解。

定义1-2 如果同时给出若干个方程，这些方程含有多个不同的变量，并要求这些方程同时成立，则这些方程称为联立方程（simultaneous equations）。

现代数学是用表达式和等号描述方程的，等号的左边有一个表达式，右侧有一个表达式，用等号连接这两个表达式。威尔士物理学家、数学家Robert Recorde（约1512–1558，图1-1（a））在1557年发明了等号，并用数学符号描述了方程。

方程分为代数方程与微分方程，代数方程中变量与变量之间的关系是静态的，也就是说，方程的根是常数；而微分方程中，变量之间的关系是动态的。微分方程将在卷V专门介绍，本书暂不涉及。代数方程分为线性方程、多项式方程和非线性方程。除此之外，还有参数方程、隐式方程等。线性代数方程在卷Ⅲ中已经给出了全面介绍，本书将介绍其他方程的求解方法。

其实早在Recorde使用等号描述方程之前，对诸多类型方程的研究就已经开始了。古巴比伦人在大约公元前2000年就开始研究一元二次方程，公元628年，古印度数学家Brahmagupta（约598– 约668）用语言而不是用数学公式描述了一元二次方程的求根方法。中国古代数学家刘徽（约225–295）、王孝通（580–640）研究了一元三次方程。1554年，意大利数学家Gerolamo Cardano(1501–1576，图1-1(b))出版了一部数学著作，给出了意大利数学家Scipione del Ferro(1465–1526)的一元三次方程的求根公式和意大利数学家Lodovico de Ferrari(1522–1565)的一元四次方程的求根公式，Cardano还是第一个使用负数的数学家。挪威数学家Niels Henrik Abel(1802–1829，图1-1(c))在1824年证明了五次或五次以上的多项式方程是没有一般代数解法的。

(a) Robert Recorde　(b) Gerolamo Cardano　(c) Niels Henrik Abel

图 1-1 Recorde、Cardano和Abel画像

注：图像均来源于维基百科

还有一类特殊的方程，对所有的未知数都成立，这类方程称为恒等式(identity)，例如

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y),\quad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \tag{1-1-1}$$

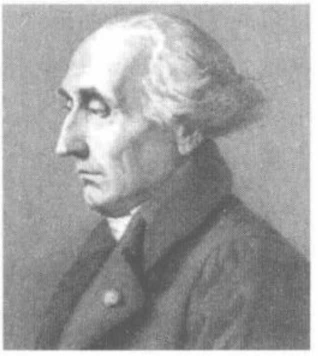
这类方程一般都可以直接通过符号运算方式证明，所以本书不再探讨恒等式问题。

1.2 最优化问题的起源与发展

最优化的理念起源于微积分研究的初期，法国数学家Pierre de Fermat(1607–1665，图1-2(a))与法国数学家Joseph-Louis Lagrange(1736–1813，图1-2(b))分别提出了基于微积分的公式求解最优值的方法。除了简单的函数最优化问题之外，一般又统称最优化问题为数学规划(mathematical programming)问题。相关的历史回顾可以参见文献[1]。

苏联学者Leonid Vitaliyevich Kantorovich（1912–1986，图1-2（c））在最优


(a) Pierre de Fermat


(b) Joseph-Louis Lagrange

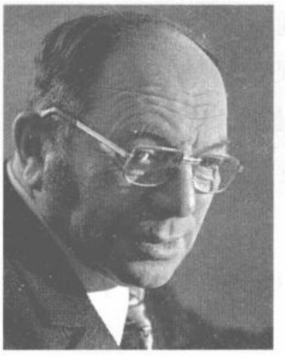
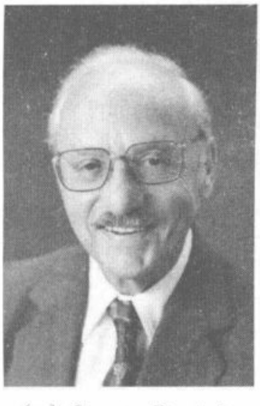

(c) Leonid Kantorovich

图 1-2 Fermat、Lagrange 和 Kantorovich 画像或照片

注:图像均来源于维基百科

化领域尤其是线性规划领域做了大量的奠基工作，美国数学家 George Bernard Dantzig (1914–2005，图 1-3(a)) 提出了著名的单纯形法 (simplex method) [1]，求解线性规划问题。Dantzig 提出单纯形法的背后有一个有趣的故事 [2,3]。1939 年加州大学 Berkeley 分校的博士生 Dantzig 有一次上课迟到，错把老师 Jerzy Neyman (1894–1981) 在黑板上写的两个世界数学难题当成课后作业，给出了问题的解，为线性规划问题提出了一种高效的求解方法。美国数学家、计算机学家 John von Neumann (1903–1957，图 1-3(b)) 提出了对偶理论与计算方法，进一步提高了线性规划问题的求解效率。

美国应用数学家 Richard Ernest Bellman (1920–1984，图 1-3(c)) 开创了一个最优化问题的新领域——动态规划，实现了多级决策的规划问题。


(a) George Dantzig


(b) John von Neumann


(c) Richard Bellman

图 1-3 Dantzig、von Neumann 和 Bellman 的照片

注:图像均来源于维基百科

最优化理念与技术为许多科学与工程领域奠定了数学基础，“最优”一词可以

和任何一个领域联用，为其注入新的活力。例如，在搜索引擎上搜索“最优”可以搜索到很多相关的领域，如最优控制、最优设计、最优系统、资源最优配置、最优停止理论、最优资本结构等，这些领域都是和最优化密切相关的。

1.3 本书框架

最优化问题是与代数方程密切相关的，所以本书在第2章中深入探讨了各类代数静态方程的求解方法，包括多项式方程的解析解法、非线性方程组的图解方法与基于搜索的复杂非线性方程数值求解方法。特别地，还探讨了多解非线性矩阵方程全部数值解与准解析解的方法，理论上可以求解任意复杂的非线性方程组。

第3章介绍了最简单的一类最优化问题——无约束最优化问题的求解方法，包括最优化问题的解析求解规则、简单最优化问题的图解法、基于梯度信息的求解方法等，着重介绍基于MATLAB求解函数的直接求解方法，给出了局部最优解与全局最优解的概念，并编写了试图求解全局最优解的MATLAB通用工具。本章还探讨了最优化技术在线性回归问题、曲线的最小二乘拟合与边值微分方程的打靶求解方面的应用。

一般数学规划问题分为线性规划问题、非线性规划问题、混合整数规划问题、多目标规划问题与动态规划问题等，本书后续内容也按照这样的分类分别介绍各种数学规划问题的求解方法。

第4章侧重于介绍凸优化问题——线性规划与二次型规划问题的求解方法，主要介绍基于MATLAB现成工具的直接求解方法，还介绍了新版MATLAB支持的基于问题的描述与求解方法，使得复杂线性规划与二次型规划问题的描述与求解更直接、更容易。除此之外，还介绍了线性矩阵不等式问题求解方法。

第5章主要介绍了非线性规划问题的求解方法。首先介绍简单问题的图解法，然后介绍基于MATLAB的非线性规划问题求解函数与复杂问题的描述与求解方法，特别地，作者编写了求解非线性非凸优化问题全局最优解的通用工具。本章还探讨了圆内最大面积的多边形、半无限规划问题、热交换网络的优化计算等应用问题的求解方法。

第6章介绍了混合整数规划问题的求解。探讨了小规模整数规划问题的穷举方法，还介绍了线性混合整数规划问题、非线性混合整数规划问题及混合0−1规划问题的求解方法，并探讨了最优用料问题、指派问题、背包问题等应用问题的求解方法，还介绍了基于整数0−1规划的旅行商问题、数独问题的建模与求解方法。

第7章侧重于多目标规划问题的求解方法，给出了多目标规划的数学模型并

探讨多目标规划问题的图解方法，另外，侧重于介绍如何将多目标规划问题转换成普通最优化问题直接求解的方法。本章还给出了 Pareto 解集的概念，并介绍了极小极大问题的求解方法。

第 8 章简单探讨了动态规划问题的建模与求解方法，侧重介绍有向图最短路径问题的求解方法，还探讨了无向图的路径最优问题求解方法。

传统的最优化求解方法主要是基于搜索的方法，有时可能得出问题的局部最优解。第 9 章将简要地介绍基于 MATLAB 的智能优化方法，如遗传算法、粒子群优化算法、模式搜索算法与模拟退火方法等，并通过算例对比研究智能优化方法与传统优化方法，得出有意义的结论。

本章习题

1.1 看看能否利用 MATLAB 求解下面的方程。

（1）$\begin{cases} x_1 + x_2 = 35 \\ 2x_1 + 4x_2 = 94 \end{cases}$

（2）$\begin{cases} x^2 \mathrm{e}^{-xy^2/2} + \mathrm{e}^{-x/2} \sin(xy) = 0 \\ y^2 \cos(x + y^2) + x^2 \mathrm{e}^{x+y} = 0 \end{cases}$

1.2 试在 $-2 \leqslant x \leqslant 11$ 区间内找出下面函数的最小值 [4]。

$$f(x) = x^6 - \frac{52}{25}x^5 + \frac{39}{80}x^4 + \frac{71}{10}x^3 - \frac{79}{20}x^2 - x + \frac{1}{10}$$

1.3 绘制下面函数的曲面，试旋转观察曲面，找出 x 和 y 取何值时曲面能达到谷底。

（1）$f(x,y) = -(y+47)\sin\sqrt{\left|\dfrac{x}{2} + (y+47)\right|} - x\sin\sqrt{\left|x - (y+47)\right|}$

（2）$f(x,y) = 20 + \left(\dfrac{x}{30} - 1\right)^2 + \left(\dfrac{y}{20} - 1\right)^2 - 10\left[\cos\left(\dfrac{x}{30} - 1\right)\pi + \cos\left(\dfrac{y}{20} - 1\right)\pi\right]$

第 2 章

薛定宇教授大讲堂 MATLAB 最优化计算

代数方程的求解

方程在人们日常生活、科学研究与工程实践中都是经常遇到的数学模型，所谓方程就是含有未知数的等式。方程是用来描述变量与变量之间数学关系的。方程分为代数方程、微分方程等，本章主要探讨代数方程的求解方法，兼顾代数方程的解析解方法与数值解方法，并试图得出多解方程全部的解。

本书卷Ⅲ侧重于探讨多元一次线性方程的求解方法，不但能求解 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 类简单线性代数方程的唯一解、无穷解与最小二乘解，还可以求解 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ 及其多项型线性代数方程的解，此外还给出了一般Sylvester方程及多项Sylvester方程的求解方法。上述方程均可以利用MATLAB的强大功能求取出数值解与解析解。有关线性方程的求解方法可以参见卷Ⅲ的相关内容。

本章侧重于介绍多项式方程与一般非线性方程的求解方法。2.1 节主要探讨低阶多项式方程的求解公式，并给出底层的MATLAB实现程序，从数值运算角度看，该程序尤其适合于含有重根的低阶多项式方程的求解。2.2 节介绍一般一元与二元方程的图解方法，并介绍方程的实际求解方法。2.3 节介绍一般非线性方程组的数值求解方法。首先介绍经典的Newton–Raphson迭代方法及MATLAB实现，然后介绍MATLAB提供的非线性代数方程与矩阵方程的求解方法。2.4 节介绍基于符号运算的低次代数方程解析解方法，然后介绍高次代数方程与非线性矩阵方程的准解析解方法。2.5 节介绍多解矩阵方程的求解方法、伪多项式方程的求解方法，并介绍高精度求解方法与实现。2.6 节还将探讨欠定方程的求解方法。

2.1 多项式方程的求解

多项式方程是实际应用中经常遇到的方程，本节先介绍多项式方程的数学形式，再介绍多项式方程的求解方法。

定义 2-1 多项式方程的一般形式为

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \tag{2-1-1}$$