



2020

【张宇数学教育系列丛书】

张宇 考研数学 真题大全解

(试卷分册·数学一) 下册

张宇 主编



 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学真题大全解. 试卷分册. 数学一. 下册/ 张宇主编. —北京:北京理工大学出版社,2019. 6

ISBN 978 - 7 - 5682 - 6909 - 4

I. ①张… II. ①张… III. ①高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 习题集 IV. ①O13 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 066778 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)

(010)82562903(教材售后服务热线)

(010)68948351(其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 天津市蓟县宏图印务有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 2.5

字 数 / 62 千字

版 次 / 2019 年 6 月第 1 版 2019 年 6 月第 1 次印刷

定 价 / 32.80 元(共 2 册)

责任编辑 / 多海鹏

文案编辑 / 多海鹏

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 李志强

2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

姓名 _____ 分数 _____

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x =$ _____ P3,1 题

(A) 1. (B) e. (C) e^{a-b} . (D) e^{b-a} .

(2) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)=0$ 确定,其中 F 为可微函数,且 $F'_2 \neq 0$,则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____ P27,1 题

(A) x . (B) z . (C) $-x$. (D) $-z$.

(3) 设 m, n 均是正整数,则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt{\ln^2(1-x)}}{\sqrt{x}} dx$ 的敛散性 _____ P18,1 题

(A) 仅与 m 的取值有关. (B) 仅与 n 的取值有关.

(C) 与 m, n 的取值都有关.(D) 与 m, n 的取值都无关.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} =$ _____ P35,1 题

(A) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$.

(B) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$.

(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$.

(D) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$.

(5) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, E 为 m 阶单位矩阵. 若 $AB=E$, 则 _____ P66,1 题

(A) $r(A)=m, r(B)=m$.

(B) $r(A)=m, r(B)=n$.

(C) $r(A)=n, r(B)=m$.

(D) $r(A)=n, r(B)=n$.

(6) 设 A 为 4 阶实对称矩阵, 且 $A^2+A=O$. 若 A 的秩为 3, 则 A 相似于 _____ P79,1 题

(A) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 的分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 1, \end{cases}$$

则 $P\{X=1\} =$ _____

(A) 0.

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) $\frac{1}{2} - e^{-1}$.

(D) $1 - e^{-1}$.

(8) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度, 若

$$f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 0, \\ bf_2(x), & x > 0 \end{cases} \quad (a > 0, b > 0)$$

为概率密度, 则 a, b 应满足

(A) $2a+3b=4$.

(B) $3a+2b=4$.

(C) $a+b=1$.

(D) $a+b=2$.

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) 设 $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = \int_0^t \ln(1+u^2) du, \end{cases}$ 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} =$ _____ P9,1 题

(10) $\int_0^\pi \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx =$ _____ P18,2 题

(11) 已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x| (x \in [-1, 1])$, 起点是 $(-1, 0)$, 终点为 $(1, 0)$, 则曲线积分 $\int_L xy dx + x^2 dy =$ _____ P36,2 题

(12) 设 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$, 则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z} =$ _____ P36,3 题

(13) 设 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0, 2)^T, \alpha_3 = (2, 1, 1, a)^T$. 若由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 生成的向量空间的维数为 2, 则 $a =$ _____ P68,1 题

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\} = \frac{C}{k!}, k=0, 1, 2, \dots$, 则 $E(X^2) =$ _____ P107,1 题

三、解答题:15~23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$ 的通解.

P55,1 题

(16) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值.

P9,2 题

(17) (本题满分 10 分)

(I) 比较

$$\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \text{ 与 } \int_0^1 t^n |\ln t| dt \quad (n=1, 2, \dots)$$

的大小,说明理由;

(II) 记

$$u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \quad (n=1, 2, \dots),$$

求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

P3,2 题

(18) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

P49,1 题

(19)(本题满分10分)

设 P 为椭球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 上的动点, 若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直, 求点 P 的轨迹 C . 并

计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}} dS$, 其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

P36, 4 题

(20)(本题满分11分)

设 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. 已知线性方程组 $Ax = b$ 存在两个不同的解.

(I) 求 λ, a ;

(II) 求方程组 $Ax = b$ 的通解.

P72, 1 题

(21)(本题满分11分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 且 Q 的第3列为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

(I) 求矩阵 A ;

(II) 证明 $A+E$ 为正定矩阵, 其中 E 为3阶单位矩阵.

P86, 1 题

(22)(本题满分11分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = Ae^{-2x^2+2xy-y^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

P101, 1 题

(23)(本题满分11分)

设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中参数 $\theta \in (0, 1)$ 未知. 以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本 (样本容量为 n) 中等于 i 的个数 ($i=1, 2, 3$). 试

求常数 a_1, a_2, a_3 , 使 $T = \sum_{i=1}^3 a_i N_i$ 为 θ 的无偏估计量, 并求 T 的方差.

P114, 1 题

答案速查

一、选择题

(1)(C). (2)(B). (3)(D). (4)(D). (5)(A). (6)(D). (7)(C). (8)(A).

二、填空题

(9)0. (10) -4π . (11)0. (12) $\frac{2}{3}$. (13)6. (14)2.

三、解答题

(15) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - x(x+2)e^x$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

(16) $f(x)$ 的单调增加区间为 $(-1, 0)$ 和 $(1, +\infty)$; 单调减少区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(0, 1)$. $f(x)$ 的极小值为

$f(\pm 1) = 0$; 极大值为 $f(0) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{e})$.

(17)(I) $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \leq \int_0^1 t^n |\ln t| dt$. 理由略. (II) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

(18)收敛域为 $[-1, 1]$; 和函数为 $x \arctan x (-1 \leq x \leq 1)$.

(19)点 P 的轨迹 C 的方程为 $\begin{cases} 2z-y=0, \\ x^2+\frac{3}{4}y^2=1; \end{cases} I=2\pi$.

(20)(I) $\lambda = -1, a = -2$. (II) $x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 其中 k 为任意常数.

(21)(I) $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (II) 证明略.

(22) $A = \frac{1}{\pi}$; $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-y)^2}$, $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$.

(23) $a_1 = 0, a_2 = a_3 = \frac{1}{n}$; $DT = \frac{(1-\theta)\theta}{n}$.

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

姓名 _____ 分数 _____

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是

P10,3 题

- (A) (1,0). (B) (2,0). (C) (3,0). (D) (4,0).

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n=1,2,\dots$) 无界,则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域为

P50,2 题

- (A)
- $(-1,1]$
- . (B)
- $[-1,1)$
- . (C)
- $[0,2)$
- . (D)
- $(0,2]$
- .

(3) 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数,且 $f(x) > 0$, $f'(0) = 0$,则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是

P28,2 题

- (A)
- $f(0) > 1, f''(0) > 0$
- . (B)
- $f(0) > 1, f''(0) < 0$
- .
-
- (C)
- $f(0) < 1, f''(0) > 0$
- . (D)
- $f(0) < 1, f''(0) < 0$
- .

(4) 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x) dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cot x) dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx$,则 I, J, K 的大小关系为

P19,3 题

- (A)
- $I < J < K$
- . (B)
- $I < K < J$
- .
-
- (C)
- $J < I < K$
- . (D)
- $K < J < I$
- .

(5) 设 A 为 3 阶矩阵,将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B ,再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵.记 $P_1 =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{则 } A =$$

P66,2 题

- (A)
- $P_1 P_2$
- . (B)
- $P_1^{-1} P_2$
- .
-
- (C)
- $P_2 P_1$
- . (D)
- $P_2 P_1^{-1}$
- .

(6) 设 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵.若 $(1,0,1,0)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系,则 $A^*x=0$ 的基础解系可为

P73,2 题

- (A)
- α_1, α_3
- . (B)
- α_1, α_2
- . (C)
- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
- . (D)
- $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$
- .

(7) 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数,其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数,则必为概率密度的是

P98,3 题

- (A)
- $f_1(x)f_2(x)$
- . (B)
- $2f_2(x)f_1(x)$
- .
-
- (C)
- $f_1(x)F_2(x)$
- . (D)
- $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$
- .

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 EX 与 EY 存在,记 $U=\max\{X,Y\}$, $V=\min\{X,Y\}$,则 $E(UV)=$

P107,2 题

- (A)
- $EU \cdot EV$
- . (B)
- $EX \cdot EY$
- .
-
- (C)
- $EU \cdot EY$
- . (D)
- $EX \cdot EV$
- .

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) 曲线 $y=\int_0^x \tan t dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 的弧长 $s=$ _____.

P19,4 题

(10) 微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$ _____.

P55,2 题

(11) 设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$,则 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{x=0, y=2} =$ _____.

P28,3 题

(12) 设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线,从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向,则曲线积分

$$\oint_L xz dx + x dy + \frac{y^2}{2} dz =$$

P37,5 题

(13) 若二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$ 经正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$,则 $a=$ _____.

P87,2 题

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$,则 $E(XY^2)=$ _____.

P107,3 题

三、解答题:15~23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{1}{e-1}}.$$

P4,3 题

(16) (本题满分 9 分)

设函数 $z=f[xy, yg(x)]$,其中函数 f 具有二阶连续偏导数,函数 $g(x)$ 可导,且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$.

$$\text{求 } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{x=1, y=1}.$$

P28,4 题

(17) (本题满分 10 分)

求方程 $k \arctan x - x = 0$ 不同实根的个数,其中 k 为参数.

P10,4 题

(18) (本题满分 10 分)

(I) 证明对任意的正整数 n ,都有 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ 成立;

(II) 设

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \quad (n=1,2,\dots),$$

证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

P4,4 题

(19) (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,且

$$f(1,y)=0, f(x,1)=0, \iint_D f(x,y) dx dy = a,$$

其中

$$D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

计算二重积分

$$I = \iint_D xy f''_{xy}(x,y) dx dy.$$

P38,6 题

(20) (本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T, \alpha_2=(0,1,1)^T, \alpha_3=(1,3,5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T, \beta_2=(1,2,3)^T, \beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表示.(I) 求 a 的值;(II) 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

P68,2 题

(21)(本题满分 11 分)

设 A 为 3 阶实对称矩阵, A 的秩为 2, 且

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) 求 A 的所有特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 A .

P79, 2 题

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2=Y^2\}=1$.

(I) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(II) 求 $Z=XY$ 的概率分布;

(III) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

P101, 2 题

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 μ_0 已知, $\sigma^2 > 0$ 未知, $\bar{X}$ 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.

(I) 求参数 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$;

(II) 计算 $E(\hat{\sigma}^2)$ 和 $D(\hat{\sigma}^2)$.

P114, 2 题

答案速查

一、选择题

(1)(C). (2)(C). (3)(A). (4)(B). (5)(D). (6)(D). (7)(D). (8)(B).

二、填空题

(9) $\ln(1+\sqrt{2})$. (10) $e^{-x} \sin x$. (11) 4. (12) π . (13) 1. (14) $\mu(\sigma^2 + \mu^2)$.

三、解答题

(15) $e^{-\frac{1}{2}}$. (16) $f'_1(1, 1) + f''_{11}(1, 1) + f''_{12}(1, 1)$.

(17) 当 $k \leq 1$ 时, 方程只有一个实根; 当 $k > 1$ 时, 方程有且仅有 3 个不同的实根.

(18) 证明略. (19) a .

(20)(I) $a=5$. (II) $\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$; $\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$; $\beta_3=5\alpha_1+10\alpha_2-2\alpha_3$.

(21)(I) -1 是 A 的一个特征值, 其对应的全部特征向量为 $k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, k_1 为任意非零常数; 1 是 A 的一个特征

值, 其对应的全部特征向量为 $k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, k_2 为任意非零常数; 0 也是 A 的一个特征值, 其对应的全部特征向量为

$k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, k_3 为任意非零常数. (II) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(22)(I)

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(II)

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(III) $\rho_{XY}=0$.

(23)(I) $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$. (II) $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$, $D(\hat{\sigma}^2) = \frac{2\sigma^4}{n}$.

2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

姓名_____ 分数_____

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 曲线 $y = \frac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为 P10,5 题

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

(2) 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, P11,6 题

其中 n 为正整数,则 $f'(0) =$

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$. (B) $(-1)^n(n-1)!$.
(C) $(-1)^{n-1}n!$. (D) $(-1)^nn!$.

(3) 如果函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续,那么下列命题正确的是 P29,5 题

(A) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在,则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微.

(B) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在,则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微.

(C) 若 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微,则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在.

(D) 若 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微,则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在. P19,5 题

(4) 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx (k=1, 2, 3)$, 则有 P19,5 题

(A) $I_1 < I_2 < I_3$. (B) $I_3 < I_2 < I_1$.

(C) $I_2 < I_3 < I_1$. (D) $I_2 < I_1 < I_3$.

(5) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$, 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数,则下列向量组线性相关的为 P69,3 题

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$. (C) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$. (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

(6) 设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵,且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 若 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $Q^{-1}AQ =$ P80,3 题

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布,则 $P\{X < Y\} =$ P102,3 题

(A) $\frac{1}{5}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{2}{3}$. (D) $\frac{4}{5}$.

(8) 将长度为 1 m 的木棒随机地截成两段,则两段长度的相关系数为 P107,4 题

(A)1. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) -1.

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f''(x) + f(x) = 2e^x$, 则 $f(x) =$ P56,3 题

(10) $\int_0^2 x \sqrt{2x-x^2} dx =$ P19,6 题

(11) $\text{grad} \left(xy + \frac{z}{y} \right) \Big|_{(2,1,1)} =$ P29,6 题

(12) 设 $\Sigma = \{(x, y, z) | x+y+z=1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则 $\iint_{\Sigma} y^2 dS =$ P38,7 题

(13) 设 α 为 3 维单位列向量, E 为 3 阶单位矩阵, 则矩阵 $E - \alpha\alpha^T$ 的秩为 P66,3 题

(14) 设 A, B, C 是随机事件, A 与 C 互不相容, $P(AB) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{3}$, 则 $P(AB|\bar{C}) =$ P95,1 题

三、解答题:15~23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2} (-1 < x < 1)$. P11,7 题

(16) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = xe^{-\frac{x+y}{2}}$ 的极值. P29,7 题

(17) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数. P50,3 题

(18) (本题满分 10 分)

已知曲线 $L: \begin{cases} x=f(t), \\ y=\cos t \end{cases} (0 \leq t < \frac{\pi}{2})$, 其中函数 $f(t)$ 具有连续导数, 且 $f(0)=0, f'(t) > 0 (0 < t < \frac{\pi}{2})$. 若曲线

L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1, 求函数 $f(t)$ 的表达式, 并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积. P56,4 题

(19) (本题满分 10 分)

已知 L 是第一象限中从点 $(0, 0)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到点 $(2, 0)$, 再沿圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 到点 $(0, 2)$ 的曲线段, 计

算曲线积分 $I = \int_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy$. P38,8 题

(20) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(I) 计算行列式 $|A|$;

(II) 当实数 a 为何值时, 方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解, 并求其通解. P73,3 题

(21)(本题满分 11 分)

已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T(A^T A)x$ 的秩为 2.

(I) 求实数 a 的值;

(II) 求正交变换 $x = Qy$ 将 f 化为标准形.

(22)(本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量 (X, Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(I) 求 $P\{X=2Y\}$;

(II) 求 $\text{Cov}(X-Y, Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且分别服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 与 $N(\mu, 2\sigma^2)$, 其中 σ 是未知参数且 $\sigma > 0$. 记 $Z = X - Y$.

(I) 求 Z 的概率密度 $f(z; \sigma^2)$;

(II) 设 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本, 求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$;

(III) 证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

P87, 3 题

P103, 4 题

P115, 3 题

答案速查

一、选择题

(1)(C). (2)(A). (3)(B). (4)(D). (5)(C). (6)(B). (7)(A). (8)(D).

二、填空题

(9) e^x . (10) $\frac{\pi}{2}$. (11) $i+j+k$. (12) $\frac{\sqrt{3}}{12}$. (13)2. (14) $\frac{3}{4}$.

三、解答题

(15)证明略.

(16) $f(1,0) = \frac{1}{\sqrt{e}}$ 为 $f(x,y)$ 的极大值; $f(-1,0) = -\frac{1}{\sqrt{e}}$ 为 $f(x,y)$ 的极小值.

(17)收敛域为 $(-1,1)$; 和函数 $S(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}, & 0 < |x| < 1, \\ 3, & x=0. \end{cases}$

(18) $f(t) = \ln(\sec t + \tan t) - \sin t$; 所求区域的面积为 $\frac{\pi}{4}$.

(19) $\frac{\pi}{2} - 4$.

(20)(I) $1-a^4$. (II) 当 $a=-1$ 时有无穷多解, 其通解为 $x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 k 为任意常数.

(21)(I) $a=-1$. (II) 正交变换为 $x = Qy = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} y$.

(22)(I) $\frac{1}{4}$. (II) $-\frac{2}{3}$.

(23)(I) $f(z; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{6\pi\sigma^2}} e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}, -\infty < z < +\infty$. (II) $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n Z_i^2$. (III) 证明略.

2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

姓名_____ 分数_____

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = c$, 其中 k, c 为常数,且 $c \neq 0$, 则

P5,5 题

(A) $k=2, c=-\frac{1}{2}$.

(B) $k=2, c=\frac{1}{2}$.

(C) $k=3, c=-\frac{1}{3}$.

(D) $k=3, c=\frac{1}{3}$.

(2) 曲面 $x^2 + \cos xy + yz + x = 0$ 在点 $(0, 1, -1)$ 处的切平面方程为

P30,8 题

(A) $x - y + z = -2$.

(B) $x + y + z = 0$.

(C) $x - 2y + z = -3$.

(D) $x - y - z = 0$.

(3) 设 $f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|$, $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx (n=1, 2, \dots)$. 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, 则 $S(-\frac{9}{4}) =$

P51,4 题

(A) $\frac{3}{4}$.

(B) $\frac{1}{4}$.

(C) $-\frac{1}{4}$.

(D) $-\frac{3}{4}$.

(4) 设 $L_1: x^2 + y^2 = 1, L_2: x^2 + y^2 = 2, L_3: x^2 + 2y^2 = 2, L_4: 2x^2 + y^2 = 2$ 为四条逆时针方向的平面曲线. 记

$$I_i = \oint_{L_i} \left(y + \frac{y^3}{6} \right) dx + \left(2x - \frac{x^3}{3} \right) dy (i=1, 2, 3, 4),$$

则 $\max\{I_1, I_2, I_3, I_4\} =$

P39,9 题

(A) I_1 .

(B) I_2 .

(C) I_3 .

(D) I_4 .

(5) 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB=C$, 且 B 可逆, 则

P69,4 题

(A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价.

(B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价.

(C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价.

(D) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价.

(6) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为

P81,4 题

(A) $a=0, b=2$.

(B) $a=0, b$ 为任意常数.

(C) $a=2, b=0$.

(D) $a=2, b$ 为任意常数.

(7) 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量, 且

$$X_1 \sim N(0, 1), X_2 \sim N(0, 2^2), X_3 \sim N(5, 3^2),$$

$$p_i = P\{-2 \leq X_i \leq 2\} (i=1, 2, 3),$$

则

P98,4 题

(A) $p_1 > p_2 > p_3$.

(B) $p_2 > p_1 > p_3$.

(C) $p_3 > p_1 > p_2$.

(D) $p_1 > p_3 > p_2$.

(8) 设随机变量 $X \sim t(n), Y \sim F(1, n)$, 给定 $0 < \alpha < 0.5$, 常数 c 满足 $P\{X > c\} = \alpha$, 则 $P\{Y > c^2\} =$

P112,1 题

(A) α .

(B) $1-\alpha$.

(C) 2α .

(D) $1-2\alpha$.

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right] =$

P11,8 题

(10) 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}, y_2=e^x-xe^{2x}, y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解, 则该方程的通解为 $y=$

P57,5 题

(11) 设 $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=t \sin t + \cos t \end{cases}$ (t 为参数), 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} =$

P12,9 题

(12) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx =$

P20,7 题

(13) 设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|A|$ 为 A 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij}+A_{ij}=0 (i, j=1, 2, 3)$, 则 $|A| =$

P63,1 题

(14) 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布, a 为常数且大于零, 则 $P\{Y \leq a+1 | Y > a\} =$

P98,5 题

三、解答题:15~23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$, 其中 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt$.

P20,8 题

(16) (本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足条件:

$$a_0=3, a_1=1, a_{n-2}-n(n-1)a_n=0 (n \geq 2),$$

$S(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数.

(I) 证明 $S''(x) - S(x) = 0$;

(II) 求 $S(x)$ 的表达式.

P51,5 题

(17) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = \left(y + \frac{x^3}{3}\right) e^{x+y}$ 的极值.

P30,9 题

(18) (本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1)=1$. 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi)=1$;

(II) 存在 $\eta \in (-1, 1)$, 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

P12,10 题

(19) (本题满分 10 分)

设直线 L 过 $A(1, 0, 0), B(0, 1, 1)$ 两点, 将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ , Σ 与平面 $z=0, z=2$ 所围成的立体为 Ω .

(I) 求曲面 Σ 的方程;

(II) 求 Ω 的形心坐标.

P39,10 题

(20) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$, 并求所有矩阵 C .

P74,4 题

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$;

(II) 若 α, β 正交且均为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

P88, 4 题

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & 0 < x < 3, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

令随机变量 $Y = \begin{cases} 2, & X \leq 1, \\ X, & 1 < X < 2, \\ 1, & X \geq 2. \end{cases}$

(I) 求 Y 的分布函数;

(II) 求概率 $P\{X \leq Y\}$.

P98, 6 题

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数且大于零, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 θ 的矩估计量;

(II) 求 θ 的最大似然估计量.

P115, 4 题

答案速查

一、选择题

(1)(D). (2)(A). (3)(C). (4)(D). (5)(B). (6)(B). (7)(A). (8)(C).

二、填空题

(9)1. (10) $C_1e^x + C_2e^{3x} - xe^{2x}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数. (11) $\sqrt{2}$. (12) $\ln 2$. (13)-1. (14) $1 - \frac{1}{e}$.

三、解答题

(15) $8 - 2\pi - 4\ln 2$. (16)(I) 证明略. (II) $S(x) = 2e^x + e^{-x}$.

(17) 极小值为 $f(1, -\frac{4}{3}) = -e^{-\frac{1}{3}}$. (18) 证明略.

(19)(I) $x^2 + y^2 - 2z^2 + 2z = 1$. (II) $(0, 0, \frac{7}{5})$.

(20) 当且仅当 $a = -1$ 且 $b = 0$ 时, 存在满足条件的矩阵 C , 且 $C = \begin{pmatrix} 1+k_1+k_2 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$, 其中 k_1, k_2 为任意常数.

(21) 证明略.

(22)(I) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ \frac{y^3 + 18}{27}, & 1 \leq y < 2, \\ 1, & y \geq 2. \end{cases}$ (II) $\frac{8}{27}$.

(23)(I) θ 的矩估计量为 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. (II) θ 的最大似然估计量为 $\frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}$.

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

姓名_____ 分数_____

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1)下列曲线中有渐近线的是

P13,11 题

(A) $y=x+\sin x$.

(B) $y=x^2+\sin x$.

(C) $y=x+\sin \frac{1}{x}$.

(D) $y=x^2+\sin \frac{1}{x}$.

(2)设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, $g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$,则在区间 $[0,1]$ 上

P13,12 题

(A) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$.

(B) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$.

(C) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$.

(D) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$.

(3)设 $f(x,y)$ 是连续函数,则 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y) dx =$

P40,11 题

(A) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy$.

(B) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y) dy$.

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$.

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$.

(4)若 $\int_{-\pi}^{\pi} (x-a_1 \cos x - b_1 \sin x)^2 dx = \min_{a,b \in \mathbb{R}} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} (x-a \cos x - b \sin x)^2 dx \right\}$,则 $a_1 \cos x + b_1 \sin x =$

P52,6 题

(A) $2 \sin x$.

(B) $2 \cos x$.

(C) $2\pi \sin x$.

(D) $2\pi \cos x$.

(5)行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$

P63,2 题

(A) $(ad-bc)^2$.

(B) $-(ad-bc)^2$.

(C) $a^2 d^2 - b^2 c^2$.

(D) $b^2 c^2 - a^2 d^2$.

(6)设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维向量,则对任意常数 k, l ,向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的

P70,5 题

(A) 必要非充分条件.

(B) 充分非必要条件.

(C) 充分必要条件.

(D) 既非充分也非必要条件.

(7)设随机事件 A 与 B 相互独立,且 $P(B)=0.5, P(A-B)=0.3$,则 $P(B-A)=$

P95,2 题

(A) 0.1.

(B) 0.2.

(C) 0.3.

(D) 0.4.

(8)设连续型随机变量 X_1 与 X_2 相互独立且方差均存在, X_1 与 X_2 的概率密度分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$,随机变量

Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y) = \frac{1}{2}[f_1(y) + f_2(y)]$,随机变量 $Y_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$,则

P108,5 题

(A) $EY_1 > EY_2, DY_1 > DY_2$.

(B) $EY_1 = EY_2, DY_1 = DY_2$.

(C) $EY_1 = EY_2, DY_1 < DY_2$.

(D) $EY_1 = EY_2, DY_1 > DY_2$.

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9)曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点 $(1,0,1)$ 处的切平面方程为_____.

P30,10 题

(10)设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数,且 $f'(x)=2(x-1), x \in [0,2]$,则 $f(7)=$ _____.

P20,9 题

(11)微分方程 $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$ 满足条件 $y(1)=e^3$ 的解为 $y=$ _____.

P57,6 题

(12)设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线,从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向,则曲线积分

$\oint_L z dx + y dz =$ _____.

P41,12 题

(13)设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1,则 a 的取值范围是_____.

P90,5 题

(14)设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.若 $c \sum_{i=1}^n X_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计,则 $c=$ _____.

P116,5 题

三、解答题:15~23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}$.

P5,6 题

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y=f(x)$ 由方程

$$y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$$

确定,求 $f(x)$ 的极值.

P13,13 题

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, $z=f(e^x \cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y) e^{2x}.$$

若 $f(0)=0, f'(0)=0$,求 $f(u)$ 的表达式.

P31,11 题

(18)(本题满分 10 分)

设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2 (z \leq 1)$ 的上侧,计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x-1)^3 dy dz + (y-1)^3 dz dx + (z-1) dx dy.$$

P41,13 题

(19)(本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $0 < a_n < \frac{\pi}{2}, 0 < b_n < \frac{\pi}{2}, \cos a_n - a_n = \cos b_n$,且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

(I) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

(II) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

P52,7 题

(20)(本题满分 11 分)

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系;

(II) 求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B .

P75, 5 题

(21)(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$ 相似.

P81, 5 题

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$. 在给定 $X=i$ 的条件下, 随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0, i) (i=1, 2)$.

(I) 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(II) 求 EY .

P104, 5 题

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的分布函数为

$$F(x; \theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数且大于零, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 EX 与 $E(X^2)$;

(II) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_n$;

(III) 是否存在实数 a , 使得对任何 $\varepsilon > 0$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}_n - a| \geq \varepsilon\} = 0$?

P116, 6 题

答案速查

一、选择题

(1)(C). (2)(D). (3)(D). (4)(A). (5)(B). (6)(A). (7)(B). (8)(D).

二、填空题

(9) $2x - y - z - 1 = 0$. (10) 1. (11) xe^{2x+1} . (12) π . (13) $-2 \leq a \leq 2$. (14) $\frac{2}{5n}$.

三、解答题

(15) $\frac{1}{2}$. (16) 极小值为 $f(1) = -2$. (17) $f(u) = \frac{1}{16}(e^{2u} - e^{-2u} - 4u)$. (18) -4π . (19) 证明略.

(20)(I) 方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系为 $\alpha = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(II) $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (k_1\alpha, k_2\alpha, k_3\alpha)$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.

(21) 证明略.

(22)(I) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{3y}{4}, & 0 \leq y < 1, \\ \frac{1}{2} + \frac{y}{4}, & 1 \leq y < 2, \\ 1, & y \geq 2. \end{cases} \quad (II) \frac{3}{4}.$

(23)(I) $EX = \frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}$; $E(X^2) = \theta$. (II) $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$. (III) 存在, $a = \theta$. 理由略.

2015 年全国硕士研究生招生考试数学一试题

姓名 _____ 分数 _____

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其二阶导函数 $f''(x)$ 的图形如右图所示, 则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为

P13, 14 题

- (A) 0. (B) 1.
(C) 2. (D) 3.

(2) 设 $y = \frac{1}{2}e^{2x} + (x - \frac{1}{3})e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解, 则

P57, 7 题

- (A) $a = -3, b = 2, c = -1$. (B) $a = 3, b = 2, c = -1$.
(C) $a = -3, b = 2, c = 1$. (D) $a = 3, b = 2, c = 1$.

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $x = \sqrt{3}$ 与 $x = 3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 的

P53, 8 题

- (A) 收敛点, 收敛点. (B) 收敛点, 发散点.
(C) 发散点, 收敛点. (D) 发散点, 发散点.

(4) 设 D 是第一象限中由曲线 $2xy=1, 4xy=1$ 与直线 $y=x, y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy =$

P42, 14 题

- (A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos \theta, r\sin \theta) r dr$. (B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2}\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos \theta, r\sin \theta) r dr$.
(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos \theta, r\sin \theta) dr$. (D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2}\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos \theta, r\sin \theta) dr$.

(5) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$. 若集合 $\Omega = \{1, 2\}$, 则线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解的充分必要条件为

P76, 6 题

- (A) $a \notin \Omega, d \notin \Omega$. (B) $a \notin \Omega, d \in \Omega$.
(C) $a \in \Omega, d \notin \Omega$. (D) $a \in \Omega, d \in \Omega$.

(6) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Py$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中 $P = (e_1, e_2, e_3)$. 若 $Q = (e_1, -e_3, e_2)$, 则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为

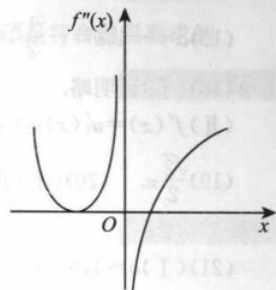
P90, 6 题

- (A) $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$. (B) $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.
(C) $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. (D) $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

(7) 若 A, B 为任意两个随机事件, 则

P95, 3 题

- (A) $P(AB) \leq P(A)P(B)$. (B) $P(AB) \geq P(A)P(B)$.
(C) $P(AB) \leq \frac{P(A)+P(B)}{2}$. (D) $P(AB) \geq \frac{P(A)+P(B)}{2}$.



(8) 设随机变量 X, Y 不相关, 且 $EX=2, EY=1, DX=3$, 则 $E[X(X+Y-2)] =$

P108, 6 题

- (A) -3. (B) 3. (C) -5. (D) 5.

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} =$

P5, 7 题

(10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1+\cos x} + |x| \right) dx =$

P21, 10 题

(11) 若函数 $z=z(x, y)$ 由方程 $e^z + xyz + x + \cos x = 2$ 确定, 则 $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{(0,1)} =$

P31, 12 题

(12) 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域, 则 $\iiint_{\Omega} (x+2y+3z) dx dy dz =$

P42, 15 题

(13) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} =$

P64, 3 题

(14) 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(1, 0; 1, 1; 0)$, 则 $P\{XY - Y < 0\} =$

P104, 6 题

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x, g(x) = kx^3$. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是等价无穷小, 求 a, b, k 的值.

P6, 8 题

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零. 若对任意的 $x_0 \in I$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4, 且 $f(0)=2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

P57, 8 题

(17) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x, y) = x + y + xy$, 曲线 $C: x^2 + y^2 + xy = 3$, 求 $f(x, y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

P32, 13 题

(18) (本题满分 10 分)

(I) 设函数 $u(x), v(x)$ 可导, 利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;

(II) 设函数 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ 可导, $f(x) = u_1(x)u_2(x) \cdots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式.

P14, 15 题

(19) (本题满分 10 分)

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} z = \sqrt{2-x^2-y^2} \\ z = x, \end{cases}$ 起点为 $A(0, \sqrt{2}, 0)$, 终点为 $B(0, -\sqrt{2}, 0)$, 计算曲线积分

$$I = \int_L (y+z)dx + (z^2 - x^2 + y)dy + x^2 y^2 dz.$$

P43, 16 题

(20) (本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3, \beta_2 = 2\alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$.

(I) 证明向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基;

(II) 当 k 为何值时, 存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标相同, 并求所有的 ξ .

P70, 6 题

(21)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} \ln 2, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测, 直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止, 记 Y 为观测次数.

(I) 求 Y 的概率分布;

(II) 求 EY .

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数. $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(I) 求 θ 的矩估计量;

(II) 求 θ 的最大似然估计量.

P82, 6 题

P108, 7 题

P117, 7 题

答案速查

一、选择题

(1)(C). (2)(A). (3)(B). (4)(B). (5)(D). (6)(A). (7)(C). (8)(D).

二、填空题

(9) $-\frac{1}{2}$. (10) $\frac{\pi^2}{4}$. (11) $-dx$. (12) $\frac{1}{4}$. (13) $2^{n+1}-2$. (14) $\frac{1}{2}$.

三、解答题

(15) $a=-1, b=-\frac{1}{2}, k=-\frac{1}{3}$. (16) $f(x) = \frac{8}{4-x}, x \in I$. (17) 3.

(18)(I) 证明略.

(II) $f'(x) = u_1'(x)u_2(x) \cdots u_n(x) + u_1(x)u_2'(x) \cdots u_n(x) + \cdots + u_1(x)u_2(x) \cdots u_n'(x)$.

(19) $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$. (20)(I) 证明略. (II) 当 $k=0$ 时, $\xi=c(\alpha_1-\alpha_3)$, c 为任意非零常数.

(21)(I) $a=4, b=5$. (II) $P = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(22)(I) $P\{Y=k\} = (k-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}\left(\frac{1}{8}\right)^2, k=2, 3, \dots$. (II) 16.

(23)(I) θ 的矩估计量 $\hat{\theta} = 2\bar{X}-1$. (II) θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

2016 年全国硕士研究生招生考试数学一试题

姓名_____ 分数_____

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1)若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx$ 收敛,则

P21,11 题

- (A) $a < 1$ 且 $b > 1$. (B) $a > 1$ 且 $b > 1$.
(C) $a < 1$ 且 $a + b > 1$. (D) $a > 1$ 且 $a + b > 1$.

(2)已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是

P21,12 题

- (A) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1. \end{cases}$ (B) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geq 1. \end{cases}$
(C) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$ (D) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$

(3)若 $y = (1+x^2)^2 - \sqrt{1+x^2}$, $y = (1+x^2)^2 + \sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个解,则 $q(x) =$

P57,9 题

- (A) $3x(1+x^2)$. (B) $-3x(1+x^2)$.
(C) $\frac{x}{1+x^2}$. (D) $-\frac{x}{1+x^2}$.

(4)已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, n=1,2,\dots, \end{cases}$ 则

P14,16 题

- (A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点. (B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.
(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导. (D) $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(5)设 A, B 是可逆矩阵,且 A 与 B 相似,则下列结论错误的是

P83,7 题

- (A) A^T 与 B^T 相似. (B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似.
(C) $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似. (D) $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似.

(6)设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, 则 $f(x_1, x_2, x_3) = 2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为

P90,7 题

- (A) 单叶双曲面. (B) 双叶双曲面.
(C) 椭球面. (D) 柱面.

(7)设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$, 记 $p = P\{X \leq \mu + \sigma^2\}$, 则

P99,7 题

- (A) p 随着 μ 的增加而增加. (B) p 随着 σ 的增加而增加.
(C) p 随着 μ 的增加而减少. (D) p 随着 σ 的增加而减少.

(8)随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1, A_2, A_3 , 且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$. 将试验 E 独立重复做 2 次,

X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数, Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数, 则 X 与 Y 的相关系数为

P109,8 题

- (A) $-\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{1}{2}$.

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(1+t \sin t) dt}{1 - \cos x^2} =$

P6,9 题

(10)向量场 $A(x, y, z) = (x+y+z)i + xyj + zk$ 的旋度 $\text{rot } A =$

P44,17 题

(11)设函数 $f(u, v)$ 可微, $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 确定, 则 $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{(0,1)} =$

P32,14 题

(12)设函数 $f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+ax^2}$, 且 $f'''(0) = 1$, 则 $a =$

P15,17 题

(13)行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$

P64,4 题

(14)设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 样本均值 $\bar{x} = 9.5$, 参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8, 则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为

P118,8 题

三、解答题:15~23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

已知平面区域 $D = \{(r, \theta) \mid 2 \leq r \leq 2(1 + \cos \theta), -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$, 计算二重积分 $\iint_D x dx dy$.

P44,18 题

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 满足方程 $y'' + 2y' + ky = 0$, 其中 $0 < k < 1$.

(I) 证明反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$ 收敛;

(II) 若 $y(0) = 1, y'(0) = 1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$ 的值.

P58,10 题

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (2x+1)e^{2x-y}$, 且 $f(0, y) = y+1$, L_t 是从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, t)$ 的光滑曲线. 计算

曲线积分 $I(t) = \int_{L_t} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$, 并求 $I(t)$ 的最小值.

P44,19 题

(18)(本题满分 10 分)

设有界区域 Ω 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成, Σ 为 Ω 整个表面的外侧, 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2+1) dy dz - 2y dz dx + 3z dx dy.$$

P44,20 题

(19)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(0) = 1, 0 < f'(x) < \frac{1}{2}$. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = f(x_n) (n=1, 2, \dots)$. 证明:

(I) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛;

(II) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 且 $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} x_n < 2$.

P53,9 题

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix}.$$

当 a 为何值时, 方程 $AX=B$ 无解、有唯一解、有无穷多解? 在有解时, 求解此方程.

P76,7 题

(21)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(I) 求 A^{99} ;

(II) 设 3 阶矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 满足 $B^2 = BA$. 记 $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

P83,8 题

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布, 令

$$U = \begin{cases} 1, & X \leq Y, \\ 0, & X > Y. \end{cases}$$

(I) 写出 (X, Y) 的概率密度;

(II) 问 U 与 X 是否相互独立? 并说明理由;

(III) 求 $Z = U + X$ 的分布函数 $F_Z(z)$.

P104,7 题

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数. X_1, X_2, X_3 为来自总体 X 的简单随机样本, 令

$$T = \max\{X_1, X_2, X_3\}.$$

(I) 求 T 的概率密度;

(II) 确定 a , 使得 aT 为 θ 的无偏估计.

P118,9 题

答案速查

一、选择题

(1)(C), (2)(D), (3)(A), (4)(D), (5)(C), (6)(B), (7)(B), (8)(A).

二、填空题

(9) $\frac{1}{2}$, (10) $j + (y-1)k$, (11) $-dx + 2dy$, (12) $\frac{1}{2}$, (13) $4 + 3\lambda + 2\lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4$, (14) $(8, 2, 10, 8)$.

三、解答题

(15) $\frac{32}{3} + 5\pi$, (16)(I) 证明略, (II) $\frac{3}{k}$, (17) $I(t) = e^{2-t} + t$; $I(2) = 3$ 是 $I(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的最小值.

(18) $\frac{1}{2}$, (19) 证明略, (20) 当 $a \neq 1$ 且 $a \neq -2$ 时, $AX=B$ 有唯一解, 且 $X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3a}{a+2} \\ 0 & \frac{a-4}{a+2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; 当 $a=1$ 时,

$AX=B$ 有无穷多解, 且 $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix}$, 其中 k_1, k_2 为任意常数; 当 $a=-2$ 时, $AX=B$ 无解.

(21)(I) $A^{99} = \begin{pmatrix} 2^{99}-2 & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ 2^{100}-2 & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, (II) $\begin{cases} \beta_1 = (2^{99}-2)\alpha_1 + (2^{100}-2)\alpha_2, \\ \beta_2 = (1-2^{99})\alpha_1 + (1-2^{100})\alpha_2, \\ \beta_3 = (2-2^{98})\alpha_1 + (2-2^{99})\alpha_2. \end{cases}$

(22)(I) $f(x, y) = \begin{cases} 3, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ (II) U 与 X 不相互独立; 理由略.

(III) $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{3}{2}z^2 - z^3, & 0 \leq z < 1, \\ \frac{1}{2} + 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2, & 1 \leq z < 2, \\ 1, & z \geq 2. \end{cases}$

(23)(I) $f_T(z) = \begin{cases} \frac{9z^3}{\theta^3}, & 0 < z < \theta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ (II) $a = \frac{10}{9}$ 时, aT 为 θ 的无偏估计.

2017 年全国硕士研究生招生考试数学一试题

姓名_____ 分数_____

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1)若函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0, \\ b, & x\leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则

P6,10 题

(A) $ab=\frac{1}{2}$.

(B) $ab=-\frac{1}{2}$.

(C) $ab=0$.

(D) $ab=2$.

(2)设函数 $f(x)$ 可导,且 $f(x)f'(x)>0$,则

P15,18 题

(A) $f(1)>f(-1)$.

(B) $f(1)<f(-1)$.

(C) $|f(1)|>|f(-1)|$.

(D) $|f(1)|<|f(-1)|$.

(3)函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$ 的方向导数为

P32,15 题

(A) 12.

(B) 6.

(C) 4.

(D) 2.

(4)甲、乙两人赛跑,计时开始时,甲在乙前方 10(单位:m)处.图中,实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$ (单位:m/s),虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$,三块阴影部分面积的数值依次为 10,20,3.计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0 (单位:s),则

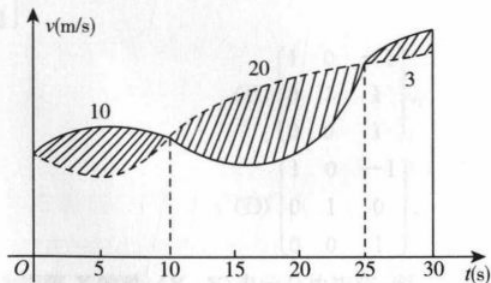
P22,13 题

(A) $t_0=10$.

(B) $15< t_0 < 20$.

(C) $t_0=25$.

(D) $t_0>25$.

(5)设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维单位列向量, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,则

P67,4 题

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$ 不可逆.

(B) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$ 不可逆.

(C) $\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$ 不可逆.

(D) $\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$ 不可逆.

(6)已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 则

P84,9 题

(A) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.

(B) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

(C) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.

(D) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

(7)设 A, B 为随机事件.若 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1$, 则 $P(A|B)>P(A|\bar{B})$ 的充分必要条件是

P95,4 题

(A) $P(B|A)>P(B|\bar{A})$.

(B) $P(B|A)<P(B|\bar{A})$.

(C) $P(\bar{B}|A)>P(\bar{B}|\bar{A})$.

(D) $P(\bar{B}|A)<P(\bar{B}|\bar{A})$.

(8)设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本,记 $\bar{X}=\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则下列结论中不正确的是

P112,2 题

(A) $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布.

(B) $2(X_n - X_1)^2$ 服从 χ^2 分布.

(C) $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布.

(D) $n(\bar{X} - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布.

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9)已知函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, 则 $f^{(3)}(0)=$ _____.

P16,19 题

(10)微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为 $y=$ _____.

P58,11 题

(11)若曲线积分 $\int_L \frac{x dx - y dy}{x^2 + y^2 - 1}$ 在区域 $D=\{(x,y) | x^2 + y^2 < 1\}$ 内与路径无关,则 $a=$ _____.

P45,21 题

(12)幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的和函数 $S(x)=$ _____.

P53,10 题

(13)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量组,则向量组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为_____.

P70,7 题

(14)设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi(\frac{x-4}{2})$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数,则 $EX=$ _____.

P109,9 题

三、解答题:15~23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $y=f(e^x, \cos x)$, 求 $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0}, \frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{x=0}$.

P32,16 题

(16)(本题满分 10 分)

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln(1 + \frac{k}{n})$.

P6,11 题

(17)(本题满分 10 分)

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$ 确定,求 $y(x)$ 的极值.

P16,20 题

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上具有二阶导数,且 $f(1)>0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$. 证明:(I) 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在一个实根;(II) 方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在两个不同实根.

P16,21 题

(19)(本题满分 10 分)

设薄片型物体 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下的有限部分,其上任一点的密度为 $\mu(x, y, z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 记圆锥面与柱面的交线为 C .(I) 求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程;