

时代云图
SHI DAI YUN TU

【张宇数学教育系列丛书】

2020

张宇 考研数学 真题大全解

（解析分册·数学一） 上册

张宇 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

张宇 考研数学 真题大全解

(解析分册·数学一) 上册

张宇 主编

高昆轮 副主编

张宇数学教育系列丛书编委 (按姓氏拼音排序)

蔡燧林 陈静静 崔晨阳 崔巧莲 高昆轮 胡金德 贾建厂 雷会娟
史明洁 王成富 王冲 王慧珍 王燕星 徐兵 严守权 亦一 (笔名) 于吉霞
曾凡 (笔名) 曾熊 张聪聪 张青云 张婷婷 张宇 郑利娜 朱杰 朱坤颇

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学真题大全解. 解析分册. 数学一. 上册/ 张宇主编. —北京: 北京理工大学出版社, 2019. 6

ISBN 978-7-5682-6908-7

I. ①张… II. ①张… III. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 066770 号

张宇 学楼册考 辑全大题真

—张宇 (册代书号)—

编主 宇张

编主图 张宇高

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)

(010)82562903(教材售后服务热线)

(010)68948351(其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 天津市蓟县宏图印务有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 15.25

字 数 / 381 千字

版 次 / 2019 年 6 月第 1 版 2019 年 6 月第 1 次印刷

定 价 / 59.80 元(共 2 册)

责任编辑 / 多海鹏

文案编辑 / 多海鹏

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 李志强

图书出现印装质量问题, 请拨打售后服务热线, 本社负责调换

本书汇编并详解了从1987到2019年共33年的真题,称真题大全解。在这次的版本中,把1987到2009年的真题汇编为上册;2010到2019年的真题汇编为下册。我建议读者按照下面的方法来用这本珍贵的资料。

对于上册,建议作为练手之用。在复习的过程中,考生既可以按自己的复习顺序配套着做题;也可以不按顺序随时挑选其中的某些考点进行测试巩固。

对于下册,建议作为模考之用。首先,要学完全部的考试内容,有了完整的知识结构以后,再来做这卷子,这是前提。

接下来,按照套卷的形式,一套一套地完成试卷,每做完2~3套卷子,给自己评一下分数,算一个平均值出来,做到心中有数,再去做下一个2~3套卷子,以期有更好的成绩,直至完成所有试卷。

第二遍,按照章节顺序去做题,有了上面第一遍做套卷的经验和教训,这一遍,重在薄弱环节的把握,局部加力,查漏补缺,对症下药。

这样,能最好地发挥真题的作用。其他要紧的事情,请看上一版前言。

张宇

2019年6月于北京

一、真题的重要性不言而喻

前言

Preface

2019版

中国大百科全书出版社

先给读者讲个故事。1637年,法国律师费马到图书馆看书,在书上读到一句话:“方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 有正整数解。”现在说来,小学生都知道 $3^2 + 4^2 = 5^2$,上述命题显然成立。然而,费马没有就此罢休,他违反图书馆规定,在书上“乱写乱画”:“你们不要以为这个事情很简单,方程 $x^3 + y^3 = z^3$ 一定没有正整数解,方程 $x^4 + y^4 = z^4$ 一定没有正整数解,……,也就是说,对于方程 $x^n + y^n = z^n$,只要 $n \geq 3$ 为正整数,这样的方程就一定没有正整数解了。”这等于是提出了一个前所未有的定理,是公然向数学界提出挑战。不仅如此,费马还在这个定理后写了更让人惊讶的一句话:“我已经给上述定理做了完整美妙的证明,只是这个位置太小了,所以我就不写了。”——这哪里是挑战?简直就是挑衅!

数学界应战吗?那是当然,数学界绝不缺乏天才,怎么会被一个“外行”难倒?于是,读者所熟悉的大数学家高斯、罗尔、莱布尼茨等均开始研究费马的这个定理,可是历史就是这么奇妙,他们都没有证明出来。一百年过去了,两百年过去了,三百年过去了,直到1993年,也就是在费马提出这个定理的356年之后,才被美籍华裔数学家威尔斯证明出来,单单证明就写了1000多页。威尔斯的证明举世震惊,因此他也获得了至今唯一最高数学奖——菲尔兹奖(因为菲尔兹奖只授予40岁以前的数学家,但是当时的威尔斯已经45岁了,由于他的贡献太大,所以破例授予他这个数学上的最高奖)。

费马的这个定理,被数学界称为“会下金蛋的鸡”,因为在证明这个定理的数百年中,产生了很多独立的数学分支,使得数学得到了蓬勃发展,这正是:提出一个好的问题,往往比解决它更有价值。因此,费马的这个定理被正式命名为:费马大定理。你见过有几个定理叫“大定理”?很少很少。一个“大”字,足以体现这个定理的分量。

故事讲完了,这里讲了什么道理呢?读者自己体会吧——其实,我什么道理都没讲——我只想借用“费马大定理”的“大”字,把我的这本书命名为:真题“大”全解。因为,这本书,我以为,相对于其他真题书来讲,是更有分量的。

一、真题的重要性不言而喻

从1987年开始,考研数学实行了全国统一考试的形式,考研数学的命题也由此走上了正轨——其科学性、严肃性、稳定性逐渐达到了国家标准。直到今天,几十年下来,考研数学的命题可以说极其成熟了,也逐渐出现了以下两大特点:

第一,考研数学命题的风格稳定:重视基础,淡化技巧,计算量大。考研数学试题是命题组集体智慧的结晶,在确定了上述命题的风格和原则后,考题受到命题组各位成员自身“喜好”的影响很小。所以,做好历年真题,是熟悉考研数学风格的好路子。

第二,考研数学命题的形势特殊:命题时间短,任务重,参考以往考题成为必须。为了确保考研

数学命题的安全性,不出现泄漏考题的情况,现在的考研命题时间很短,已经不再像多年前那样宽松(以前命题都是提前半年出好题,有足够的时间来校对和检验试题的正确性和科学性)——在考前集中命题,几乎没有时间去校对和检验了。所以,为了保证试题不出错且难度适中,命题人盯上了从1987年到今天积累下来的命制过的试题(这里还包括从未考过的备考卷上的试题),以此为基础,“参考”“改编”甚至“照搬”这些题。故,读者应该懂得,做好历年真题,是预测考研数学考题的好路子。

二、做好真题解析的两大原则

考研数学的历年真题解析需要贯彻两个原则。

第一,考研数学试题收录的全面性。收录从全国统考以来所有的考研数学试题,而不是部分试题,给读者提供一份完整的历史资料。从而,力图给读者提供原汁原味的历年的实考题,是本书坚持的第一个原则。

第二,考研数学试题解析的权威性。凡是有当年命题人自己写的答案,忠实其答案;凡是有当年考试中心组织专家写的答案,参考其答案。总之,本书对真题的答案解析,是最权威、最深刻的,这是本书坚持的第二个原则。

这两个原则,事实上,就是本书分量最重的地方——每一道题的收录,都有根有据;每一道题的解析,都有源有头。

三、本书使用说明

本书分为两种形式——试卷形式和解析形式。试卷形式中,我们将1987年至2018年的真题试卷完整地展现给读者,供读者检测、演练之用;解析形式中,我们提供给读者全面、深刻、由命题人把关的试题解析。其中,为了不影响考生有针对性地备考,有些较早年份的超纲题目,我做了必要的删除。那么在试卷形式被删除题目的套卷中,余下试题的分值稍作调整以使其总分仍为满分。当然,考虑到读者在做题之余需查阅答案及解析,我在解析形式中给出了权威的解答,依据考试年份与题号可作相应查找。值得注意的是,本书仅为数学一的真题大全解,需考数学一的考生若做完了这本书的题目,想再多做演练,亦可参考数学二与数学三的真题大全解。

对于真题大全解的使用,与习题集的使用有类似之处。把题目的演算过程写到草稿纸上去,把做题后看着答案详解做的标注写到笔记本上去。总之,不要在题目上做任何标记——这样做的目的很明确——如果此题你第一次做的时候不会做或者做错了,当你下次再做这个题目时,在没有任何提示的情况下,你能保证自己一定会做吗?“干干净净”的真题集,事实上是对读者提出了高标准、严要求,希望读者把真题全部做完一遍后,第二遍就能够查漏补缺、扫清死角。

感谢从命题组中退下来的老专家们,在数学原题的收集、确认与解析中,他们作出了重要贡献。感谢北京理工大学出版社的各位领导和编辑,感谢高等教育出版社的刘佳同志,他们给作者提供了很多便利和帮助。

张宇

2018年4月于北京

目录

Contents

第一部分 高等数学

第1章 函数、极限、连续	3
1.1 函数及其性质	3
1.2 极限的定义及性质	4
1.3 求函数的极限	5
1.4 求数列的极限	9
1.5 无穷小的比阶	11
1.6 连续与间断点	14
第2章 一元函数微分学	15
2.1 导数与微分的定义及应用	15
2.2 求各类函数的导数与微分	19
2.3 导数的几何应用——曲线的切线与法线、变化率	21
2.4 函数(曲线)的性态	23
2.5 不等式的证明	27
2.6 方程的根(零点问题)	30
2.7 有关微分中值定理的证明题	32
2.8 综合题	35
第3章 一元函数积分学	37
3.1 定积分的概念与性质	37
3.2 不定积分的计算	39
3.3 定积分的计算	40
3.4 反常积分的计算	42
3.5 变限积分函数的性质及应用	42
3.6 定积分的应用	45

第4章 向量代数和空间解析几何	49
4.1 向量运算	49
4.2 平面及直线的方程	49
4.3 平面及直线的位置关系讨论、夹角问题	50
4.4 距离问题	51
4.5 投影曲线与旋转曲面	51
第5章 多元函数微分学	53
5.1 基本概念	53
5.2 求偏导与全微分	54
5.3 变量代换下方程的化简	59
5.4 求极值与最值	60
5.5 多元函数微分学的几何应用	64
第6章 多元函数积分学	69
6.1 重积分的概念与性质	69
6.2 二重积分	70
6.3 三重积分	75
6.4 曲线积分(边界方程代入被积函数化简)	77
6.5 曲面积分(边界方程代入被积函数化简)	88
6.6 散度	97
6.7 多元函数积分学的应用	98
6.8 综合题	102
第7章 无穷级数	103
7.1 常数项级数判敛	103
7.2 幂级数的收敛半径及收敛域	106
7.3 幂级数求和(常规求和、非常规求和)	108
7.4 幂级数展开	113
7.5 证明题	115
7.6 傅里叶级数	117
第8章 常微分方程	120
8.1 一阶常微分方程	120
8.2 二阶可降阶微分方程	122
8.3 高阶常系数线性微分方程	123
8.4 欧拉方程	125
8.5 积分方程	126
8.6 应用题	127

第二部分 线性代数

第 1 章 行列式	135
1.1 数字型行列式的计算	135
1.2 抽象型行列式的计算	136
1.3 克拉默法则	137
1.4 $ A $ 是否为 0	139
第 2 章 矩阵	141
2.1 矩阵运算	141
2.2 伴随矩阵	142
2.3 逆矩阵	143
2.4 初等变换	146
2.5 矩阵方程	147
2.6 矩阵的秩	149
第 3 章 向量	152
3.1 线性相关与线性无关	152
3.2 线性表出	156
3.3 秩、极大线性无关组	158
3.4 向量空间	159
第 4 章 线性方程组	161
4.1 方程组有解无解的判别	161
4.2 解具体方程组(含参数)	162
4.3 解抽象方程组	167
4.4 基础解系	169
4.5 公共解与同解	170
第 5 章 矩阵的特征值和特征向量	173
5.1 特征值与特征向量	173
5.2 相似对角化的判定及求可逆矩阵 P	177
5.3 相似对角化的应用	180
5.4 实对称矩阵的特征值与特征向量	181
第 6 章 二次型	184
6.1 化二次型为标准形	184
6.2 正定问题	189
6.3 合同问题	190

第三部分 概率论与数理统计

第1章 随机事件和概率	193
1.1 古典概型与几何概型	193
1.2 概率、条件概率的基本性质及公式	194
1.3 事件的独立性及独立重复试验	197
第2章 随机变量及分布	200
2.1 分布函数、概率密度、分布律的概念与性质	200
2.2 求随机变量的概率分布	200
2.3 利用分布求概率及逆问题	202
2.4 求随机变量函数的分布	204
第3章 多维随机变量及其分布	207
3.1 二维离散型随机变量联合分布、边缘分布、条件分布及独立性	207
3.2 二维连续型随机变量联合分布、边缘分布、条件分布及独立性	210
3.3 独立及不相关	211
3.4 二维随机变量函数的分布	212
第4章 随机变量的数字特征	219
4.1 一维随机变量及其函数的数字特征	219
4.2 多维随机变量及其函数的数字特征	221
第5章 大数定律和中心极限定理	224
第6章 数理统计的基本概念	225
6.1 三大分布	225
6.2 统计量的数字特征	226
第7章 参数估计	228
7.1 矩估计与最大似然估计	228
7.2 估计量的评选标准	231
7.3 区间估计	232
第8章 假设检验	234

第1章 函数、极限、连续

1.1 函数及其性质



第一部分 >>>

高等数学



例 [1988-1] 已知 $f(x) = e^x$, $f[\varphi(x)] = 1-x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

解 由 $e^{\varphi(x)} = 1-x$, 得 $\varphi(x) = \ln(1-x)$. 由 $\ln(1-x) \geq 0$ 得 $1-x \geq 1$, 即 $x \leq 0$, 所以

$$\varphi(x) = \ln(1-x), x \leq 0.$$

$$\text{故 } f[f(x)] = \text{_____}$$

第1章 函数、极限、连续

1.1 函数及其性质

考点 点

1. 有界性

(1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

(2) $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = B$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 上有界.

(3) $f'(x)$ 在有限区间 I 上有界, 则 $f(x)$ 在 I 上有界.

2. 奇偶性

(1) $f(x)$ 是可导的奇(偶)函数, 则 $f'(x)$ 是偶(奇)函数.

(2) $f(x)$ 是连续的奇函数, 则其所有原函数都是偶函数;

$f(x)$ 是连续的偶函数, 则其所有原函数中只有一个是奇函数.

(3) 设 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 上有定义, 则 $f(x) + f(-x)$ 是偶函数, $f(x) - f(-x)$ 是奇函数.

3. 周期性

(1) $f(x)$ 是可导的以 T 为周期的周期函数, 则 $f'(x)$ 也以 T 为周期.

(2) $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 则对于定义域内任意点 a ,

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ 以 } T \text{ 为周期} \Leftrightarrow \int_0^T f(t) dt = 0.$$

(3) $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 则

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt - \frac{\int_0^T f(t) dt}{T} x \text{ 以 } T \text{ 为周期}.$$

4. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导,

(1) 任意 $x \in I, f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 在 I 上单调增加;

任意 $x \in I, f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ 在 I 上单调减少.

(2) 任意 $x \in I, f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x)$ 在 I 上单调不减;

任意 $x \in I, f'(x) \leq 0 \Rightarrow f(x)$ 在 I 上单调不增.

在用单调性说明方程的根的问题时只能使用(1)中的单调增加(减少), 而不能使用(2)中的单调不减(不增).

1 [1988-I] 已知 $f(x) = e^x, f[\varphi(x)] = 1 - x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

解 由 $e^{[\varphi(x)]^2} = 1 - x$, 得 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$. 由 $\ln(1-x) \geq 0$ 得 $1-x \geq 1$, 即 $x \leq 0$, 所以

$$\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}, x \leq 0.$$

2 [1990-I] 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}.$

答 应填 1.

解 由 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ 知, 对一切的 x 有 $|f(x)| \leq 1$, 则 $f[f(x)] = 1$.

注 函数的复合是一种重要的运算, 求两个分段函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 的复合函数 $y = f[g(x)]$, 实际上就是将 $u = g(x)$ 代入 $y = f(u)$ 中, 关键是搞清楚 $u = g(x)$ 的函数值落在 $y = f(u)$ 定义域的哪部分.

3 [1999] 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则

- (A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数.
- (B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数.
- (C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数.
- (D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必是单调增函数.

答 应选(A).

解法1 直接法. 据“1.1 考点点睛”中的“2. 奇偶性”可知(A)正确.

解法2 排除法. (B)的反例: $f(x) = \cos x, F(x) = \sin x + 1$ 不是奇函数.

(C)的反例: $f(x) = \cos^2 x, F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$, 不论 C 取什么常数, $F(x)$ 都不是周期函数.

(D)的反例: $f(x) = -\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的, 但 $F(x) = -\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 内是单调减少的.

注 连续函数 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可以表示为 $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$, 考查

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^{-x} f(t)dt + C = \int_0^x f(-u)d(-u) + C \\ &= -\int_0^x f(-u)du + C. \end{aligned}$$

若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(u) = -f(-u)$, 进而对任意的常数 C 都有 $F(x) = F(-x)$;

若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(u) = f(-u)$, 进而当且仅当 $C = 0$ 时有 $F(x) = -F(-x)$.

4 [2005] 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, “ $M \Leftrightarrow N$ ”表示“ M 的充分必要条件是 N ”, 则必有

- (A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.
- (B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.
- (C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.
- (D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.

答 应选(A).

解 本题同上一题, 都是在考查原函数的奇偶性与周期性等性质, 根据对上一题的分析, 便可直接选(A).

1.2 极限的定义及性质

5 [2003] 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有

- (A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立.
- (B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.
- (C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在.
- (D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

答 应选(D).

解 假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n = A$ (存在), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n c_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{A}{1} = A$ (存在), 这与 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ 矛盾, 故

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

注 由极限的局部保号性容易得到极限的局部保序性:

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, 且 $A > B$, 则存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $a_n > b_n$.

对于本题, 选项(A), (B)说对任意的 n 成立, 显然错了;

对于选项(C), $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 是典型的“ $0 \cdot \infty$ ”型未定式,其极限可能存在也可能不存在.

1.3 求函数的极限

考点 (L) 点题

求函数极限首先是化简,其次是判别类型选择方法.

常用的化简方法:①非零常数因子先求出;②有理化;③通分;④倒代换.

常用的方法:①四则运算法则及基本极限;②等价代换;③洛必达法则;④泰勒公式.

1. 常用的等价代换($x \rightarrow 0$)

$$\sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim x;$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, a^x - 1 \sim x \ln a, (1+x)^a - 1 \sim ax;$$

$$x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3, x - \arcsin x \sim -\frac{1}{6}x^3;$$

$$x - \tan x \sim -\frac{1}{3}x^3, x - \arctan x \sim \frac{1}{3}x^3;$$

$$x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2.$$

2. 几个重要函数的泰勒展开式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3);$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o(x^2),$$

其中 $o(x^k)$ 为 $x \rightarrow 0$ 时 x 的高阶无穷小量.

3. 极限值与无穷小的关系

$$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha, \text{ 其中 } \lim \alpha = 0.$$

1.3.1 需要分别求左右极限的情形

求分段函数在分段点处的极限,含绝对值函数、取整函数在相应点处的极限.“ e^- ”型及“ $\arctan \infty$ ”型

($e^{+\infty} = +\infty, e^{-\infty} = 0, \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}, \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$)的极限往往需要分别考查左右极限.

例 6 [1992-I] 当 $x \rightarrow 1$ 时,函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

(A) 等于 2.

(B) 等于 0.

(C) 为 ∞ .

(D) 不存在但不为 ∞ .

答 应选(D).

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) e^{\frac{1}{x-1}} = 0,$$

而

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty,$$

则 $x \rightarrow 1$ 时,函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限不存在,但不是 ∞ .

7 [2000] 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$.

解 因

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2e^{-\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{1}{x}} + 1} + \frac{\sin x}{x} \right) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} - \frac{\sin x}{x} \right) = 2 - 1 = 1,$$

故原式=1.

1.3.2 七种未定式的极限

未定式的基本类型是“ $\frac{0}{0}$ ”和“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型,其余的五种未定式“ $0 \cdot \infty$ ”“ $\infty - \infty$ ”“ ∞^0 ”“ 0^0 ”“ 1^∞ ”都可以转化为“ $\frac{0}{0}$ ”和“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型,对“ ∞^0 ”“ 0^0 ”“ 1^∞ ”型未定式的极限 $\lim u^v$ 往往都是先改写为 $e^{\lim \ln u}$ 的形式再去计算,特别地对“ 1^∞ ”型极限作如下处理: $\lim u^v = e^{\lim \ln u} = e^{\lim (u-1)}$.

8 [1990-I] 设 a 是非零常数,则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x =$ _____.

答 应填 e^{2a} .

解 这是“ 1^∞ ”型,直接有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} - 1 \right)}$, 而 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{x+a}{x-a} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2ax}{x-a} = 2a$, 故

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = e^{2a}.$$

9 [1991-I] 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

解 这是“ 1^∞ ”型,直接有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{x} (\cos \sqrt{x} - 1)}$, 而

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{x} (\cos \sqrt{x} - 1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{x} \left(-\frac{1}{2}x \right) = -\frac{1}{2}\pi,$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}} = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

10 [1992-I] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{1 - \sqrt{1-x^2}}$.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{\frac{1}{2}x^2} \xrightarrow{\text{洛比达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x} \xrightarrow{\text{洛比达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + \sin x) = 1$.

11 [1993-I] 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$.

解 这是“ 1^∞ ”型,直接有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right)}$, 而

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right) \xrightarrow{t = \frac{1}{x}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t + \cos t - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{t} = 2 + 0 = 2,$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = e^2.$$

注 在 $x \rightarrow \infty$ (或 $+\infty, -\infty$) 且极限式中含有“ $\frac{1}{x}$ ”时,考虑作倒代换 $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ (或 $0^+, 0^-$) 往往很方便.

12 [1994-I] $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) =$ _____.

答 应填 $\frac{1}{6}$.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x (x - \sin x)}{x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3} = \frac{1}{6}.$

13 [1995-I] $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{\sin x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

答 应填 e^6 .

解 这是“ 1^∞ ”型, 直接有 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sin x} \cdot 3x} = e^6.$

14 [1997] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

答 应填 $\frac{3}{2}.$

解法 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{\ln(1+x)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{x}$
 $= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x}{x} + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = \frac{3}{2}.$

解法 2 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$, 故 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2 \cos \frac{1}{x}$ 是比 $\sin x$ 高阶的无穷小, 故加减中可直接略去, 于是便有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x}{(1+\cos x)\ln(1+x)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x}{x} = \frac{3}{2}.$$

注 本题解法 1 第一步利用“非零常数因子先求出”这一化简方法, 对处理后后续极限带来很大的方便, 另外本题不能使用洛必达法则, 因为求导后的极限不存在, 且非无穷大, 洛必达法则失效. 但这里充分利用极限的四则运算法则, 将其拆分成两个单独的极限就很方便.

15 [1998] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

答 应填 $-\frac{1}{4}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) + 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) - 2}{x^2} = -\frac{1}{4}.$

16 [1999] $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

答 应填 $\frac{1}{3}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3} = \frac{1}{3}.$

17 [2003] $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

答 应填 $\frac{1}{\sqrt{e}}$ 或 $e^{-\frac{1}{2}}.$

解 这是“ 1^∞ ”型, 直接有 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\ln(1+x^2)} \right\} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} \right\} = e^{-\frac{1}{2}}.$

18 [2006] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1-\cos x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

答 应填 2.