

GAODENG SHUXUE LILUN
JI YINGYONG TANJIU

高等数学理论 及应用探究

吴谦 王丽丽 刘敏 著

吉林科学技术出版社

责任编辑：李思言

封面设计：崔 蕾

高等数学理论 及应用探究

ISBN 978-7-5578-6467-5



9 787557 864675 >

定价：80.00元

高等数学理论 及应用探究

吴 谦 王丽丽 刘 敏 著

 吉林科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学理论及应用探究 / 吴谦, 王丽丽, 刘敏著.
—长春: 吉林科学技术出版社, 2019.12
ISBN 978-7-5578-6467-5

I. ①高… II. ①吴… ②王… ③刘… III. ①高等数
学—研究 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 284448 号

GAODENG SHUXUE LILUN JI YINGYONG TANJIU

高等数学理论及应用探究

著 吴 谦 王丽丽 刘 敏

出 版 人 李 梁

责任编辑 李思言

封面设计 崔 蕾

制 版 北京亚吉飞数码科技有限公司

开 本 710mm×1000mm 1/16

字 数 354 千字

印 张 19.75

印 数 1—5 000 册

版 次 2020 年 3 月第 1 版

印 次 2020 年 3 月第 1 次印刷

出 版 吉林科学技术出版社

发 行 吉林科学技术出版社

地 址 长春市人民大街 4646 号

邮 编 130021

发行部传真/电话 0431—85635176 85651759 85635177

85651628 85652585

储运部电话 0431—86059116

编辑部电话 0431—85635186

网 址 www.jlsycbs.net

印 刷 三河市铭浩彩色印装有限公司

书 号 ISBN 978-7-5578-6467-5

定 价 80.00 元

如有印装质量问题 可寄出版社调换

版权所有 翻印必究 举报电话:0431—85635186

前 言

欧拉曾这样描述数学：“数学是人类知识活动留下来最具威力的知识工具，是一些现象的根源。数学是客观存在的，上帝必以数学法则建造宇宙。”数学是人类认识和理解客观自然规律的基本工具之一，在科学技术高速发展的今天，数学在科学研究与实际应用中的作用越来越突出。高等数学是由微积分学，较深入的代数学、几何学，以及它们之间的交叉内容所形成的一门基础学科。作为理科最主要的基础学科之一，高等数学有其固有的特点，这就是高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性。相对于初等数学而言，高等数学的对象及方法较为复杂。深刻理解和把握高等数学的基本理论，能够熟练应用高等数学的思想与方法处理各类问题，这是研究高等数学的核心意义所在。

数学科学作为一种知识系统，由一个个分支相互联系、不断交叉，促进着数学体系的发展与壮大。高等代数与数学分析是数学中的两个重要分支，在理论研究和工程实践中有广泛的应用。研究每个分支的特殊的理论及思想方法演变规律对于了解数学的发现与创新具有重要的引导作用。另外，计算机技术与软件的高速发展带动了科学技术的定量化分析方法迅速发展，使得各门学科之间加速相互渗透，因此数学必须以新的理论、新的内容、新的方法来适应新的形势。本书在直观、形象地解析高等数学基本理论的基础上，注重数学理论与实际问题相结合，列举并分析了大量的应用实例，突出应用特色。既可以帮助读者清楚把握高等数学的核心理论，又可以使读者学以致用、开拓创新，强化处理实际问题的能力。全书逻辑清晰、结构完整、图文并茂，将高等数学及其应用完美地呈现于读者眼前。

从内容上看，本书共 10 章，内容包括函数与极限、导数及其应用、定积分及其应用、不定积分、常微分方程与差分方程、相量与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等。本书以通俗易懂的语言，深入浅出地讲解高等数学理论及实验知识，使得数学从科学研究的幕后大步跨上技术应用的前台，成为打开众多机会大门的钥匙。从整体框架而言，虽然本书保持了高等数学的基本内容和结构，但是作者在内容编排和知识点的深度和广度上进行了思考和探索。

全书由浅入深、循序渐进、结构严谨、逻辑清晰、抓住关键、突出重点。

在确保理论完整、推理严密的同时,力求呈现高等代数与数学分析精深而严谨的思想魅力与灵活多变而又有章可循的方法技巧。本书的写作特点可总结如下:

1. 分析讨论了基本内容、基本理论和基本知识,并列举例题加以解释说明,注重知识应用。

2. 理论部分的安排符合人类认识事物的规律,即从具体到抽象再到具体(思维中的具体)。

3. 对重要概念、定理、推论给出了详细的证明过程。有些题一题多解,开拓思路,通过解题可加深对基本概念和基本理论的理解和联系。另外,通过对某些例题的注释,帮助读者更好地把握住典型例题的典型处理方法和可能的各种延伸,达到举一反三、触类旁通的效果。

4. 借鉴和引进一些新成果、新方法和新题目,力求推陈出新。

在本书的写作过程中,参考了大量的学术文献,得到了很多专家学者的指导和帮助,在此表示衷心的感谢。由于时间仓促,作者水平有限,本书难免存在错误、疏漏之处,恳请广大读者批评指正,不吝赐教。

作者

2019年6月

目 录

第 1 章 函数与极限	1
1.1 实数	1
1.2 映射与函数	1
1.3 数列的极限	3
1.4 函数的极限	5
1.5 极限的运算法则与存在准则	9
1.6 两个重要极限与无穷小量、无穷大量	13
1.7 函数的连续性与间断点	14
1.8 连续函数的运算与初等函数的连续性	20
1.9 闭区间上连续函数的性质	22
1.10 极限应用举例	24
第 2 章 导数及其应用	31
2.1 导数概念及其几何意义	31
2.2 函数的求导法则	32
2.3 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数相关变化率	36
2.4 函数的微分及其在近似计算中的应用	38
2.5 高阶导数与高阶微分	41
2.6 微分中值定理及其应用	43
2.7 洛必达法则	48
2.8 泰勒公式	51
2.9 导数在经济学中的应用	56
第 3 章 定积分及其应用	61
3.1 定积分的概念与性质	61
3.2 微积分基本公式	66
3.3 定积分的换元法和分部积分法	69
3.4 定积分在几何学上的应用	72
3.5 定积分在物理学上的应用	76

3.6	无穷区间上的广义积分	77
3.7	反常积分	78
第4章	不定积分	86
4.1	不定积分的概念与性质	86
4.2	不定积分的换元积分法	91
4.3	不定积分的分部积分法	96
4.4	有理函数的积分	100
第5章	常微分方程与差分方程	102
5.1	微分方程的基本概念	102
5.2	可分离变量的微分方程及齐次方程	104
5.3	一阶微分方程的求解方法及几何意义	107
5.4	可降阶的高阶微分方程	111
5.5	高阶线性微分方程	115
5.6	常系数齐次线性微分方程	118
5.7	常系数非齐次线性微分方程	121
5.8	微分方程在经济分析中的应用	126
5.9	函数的差分及差分方程	129
5.10	一阶常系数线性差分方程	132
5.11	差分方程在经济分析中的应用举例	136
第6章	向量与空间解析几何	141
6.1	向量及其线性运算	141
6.2	空间直角坐标系与向量的坐标表示	149
6.3	向量的数量积与向量积	154
6.4	空间平面及其方程	156
6.5	空间直线及其方程	162
6.6	空间曲面及其方程	167
6.7	空间曲线及其方程	176
第7章	多元函数微分法及其应用	179
7.1	多元函数的基本概念	179
7.2	偏导数及其几何意义	188
7.3	全微分及其应用	190

7.4	多元复合函数的导数	193
7.5	隐函数的求导公式	199
7.6	多元函数微分学的几何应用	204
7.7	方向导数与梯度	209
7.8	多元函数的极值及其求法	214
第 8 章	重积分	221
8.1	二重积分的概念与性质	221
8.2	二重积分的计算法	223
8.3	三重积分的计算	227
8.4	重积分的应用	232
第 9 章	曲线积分与曲面积分	238
9.1	对弧长的曲线积分	238
9.2	对坐标的曲线积分	241
9.3	格林公式及其应用	244
9.4	对面积的曲面积分	249
9.5	对坐标的曲面积分	253
9.6	高斯公式与斯托克斯公式	259
9.7	场论初步	267
第 10 章	无穷级数	272
10.1	常数项级数的概念和性质	272
10.2	常数项级数的审敛法	277
10.3	幂级数及其运算	284
10.4	函数展开成幂级数	288
10.5	傅里叶级数	293
10.6	一般周期函数的傅里叶级数	299
参考文献		302

第1章 函数与极限

1.1 实数

数学分析研究的基本对象是定义在实数集上的函数. 已经知道, 有理数和无理数统称为实数, 实数的全体称为实数集或实数域, 记为 $\mathbf{R}$, 即

$$\mathbf{R} = \{x \mid x \text{ 为实数}\}$$

实数集 $\mathbf{R}$ 中的任意一个实数与数轴上的点是一一对应的, 因此对于实数和数轴上的点今后不加区别.

实数集具有以下性质:

(1) 实数集对加、减、乘、除(除数不为零)四则运算是封闭的, 即任意两个实数的加、减、乘、除(除数不为零)仍然为实数.

(2) 实数集是有序集, 即任意两个实数 a 和 b 必满足下列3个关系之一:

$$a < b, a = b, a > b$$

(3) 实数的大小关系具有传递性, 即若 $a > b, b > c$, 则有 $a > c$.

(4) 实数集具有稠密性, 即任何两个不相等的实数之间必有有理数, 也必有无理数, 从而进一步推得任何两个不相等的实数之间, 必有无穷多个有理数, 也必有无穷多个无理数.

(5) 实数具有阿基米德性, 即对任何两个正实数 a 和 b , 若 $b > a > 0$, 则存在正整数 n , 使得 $na > b$.

例 1.1.1 设 $a, b \in \mathbf{R}$. 证明: 若对任意正数 ϵ , 有 $a > b - \epsilon$, 则 $a \geq b$.

证明: 反证法. 假设 $a < b$. 取正数 $\epsilon_0 = b - a > 0$, 由已知条件, 得

$$a > b - \epsilon_0 = b - (b - a) = a$$

这显然是矛盾的.

1.2 映射与函数

1.2.1 映射

定义 1.2.1 设 A, B 是两个非空集合, 如果存在一个确定的规则 f , 对

于集合 A 中每一个元素,按规则 f 在集合 B 中都有唯一的元素与它对应,则称 f 是由集合 A 到集合 B 的映射. 记作 $f:A \rightarrow B$.

如果 A 中的元素 a ,对应的是 B 中的元素 b ,记作 $b = f(a)$,并称 b 为 a 的像, a 为 b 的原像. 集合 A 中所有元素的像的集合成为映射 f 的值域,记作 $f(A)$.

(1) 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 4, 9, 16\}$,集合 A 中的元素 x 按照对应关系“平方”和集合 B 中的元素对应,这个对应是集合 A 到集合 B 的映射.

(2) 设 $A = \mathbb{N}$, $B = \{0, 1\}$,集合 A 中的元素按照对应关系“ x 除以 2 得的余数”和集合 B 中的元素对应,这个对应是集合 A 到集合 B 的映射.

映射的不同分类是根据映射的结果进行的,有如下三种:

(1) 如果 B 中任一元素都是 A 中某元素的像,则称 f 为 A 到 B 的满射.

(2) 如果 A 中任意两个不同元素的像也不同,则称 f 为 A 到 B 的单射.

(3) 如果 f 既是满射又是单射,则称 f 为 A 到 B 的一一映射(双射). 一一映射(双射)是映射中特殊的一种,即两集合元素间的唯一对应,通俗来讲就是一个对一个.

1.2.2 函数

在自然现象的某个研究过程中,往往存在几个变量在同时变化着,这几个变量的变化并不是孤立的,而是相互联系着的,并且遵循着一定的变化规律. 在此,我们先讨论两个变量的情形.

例 1.2.1 边长为 x 的正方形的面积为

$$A = x^2$$

这就是两个变量 A 和 x 之间的关系,当边长 x 在区间 $(0, +\infty)$ 内任取一个值时,由上式可以确定正方形的面积 A 的相应值.

例 1.2.2 在自由落体运动中,设物体下落的时间为 t ,下落的距离为 s ,开始下落的时刻 $t = 0$,那么 s 和 t 之间的关系为

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

其中, g 为重力加速度. 如果物体到达地面的时刻为 $t = T$,则 t 在区间 $[0, T]$ 上任取一个值时,由上式就可以确定出 s 的相应值.

在以上两个例子中都给出了一对变量之间的相依关系,这种相依关系确定了一种对应法则,根据这一法则,当其中一个变量在其变化范围内任取一个值时,另一个变量依照对应法则,有唯一确定的值与之对应. 两个变量之间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 1.2.2 设 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的一个非空子集, 若对 D 中的每一个 x , 按照对应法则 f , 实数集 $\mathbf{R}$ 中有唯一的数 y 与之相对应, 我们称 f 为从 D 到 $\mathbf{R}$ 的一个函数, 记作

$$f: D \rightarrow \mathbf{R}$$

上述 y 与 x 之间的对应关系记作 $y = f(x)$, 并称 y 为 x 的函数值, D 称为函数的定义域, 数集 $f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域. 若把 x , y 看成变量, 则 x 称为自变量, y 称为因变量.

那么, 定义域 D 就是自变量 x 的取值范围, 而值域 $f(D)$ 是因变量 y 的取值范围. 特别, 当值域 $f(D)$ 是仅由一个实数 C 组成的集合时, $f(x)$ 称为常值函数. 这时, $f(x) = C$, 也就是说, 我们把常量看成特殊的因变量.

对于定义, 我们作如下几点说明:

(1) 为了使用方便, 我们将符号 “ $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ ” 记为 “ $y = f(x)$ ”, 并称 “ $f(x)$ 是 x 的函数(值)”. 当强调定义域时, 也常记作

$$y = f(x), x \in D$$

(2) 函数 $y = f(x)$ 中表示对应关系的符号 f 也可改用其他字母, 例如 “ φ ” “ F ” 等. 这时函数就记为 $y = \varphi(x)$, $y = F(x)$ 等.

(3) 用 $y = f(x)$ 表示一个函数时, f 所代表的对应法则已完全确定, 对应于点 $x = x_0$ 的函数值记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

例如, 设 $y = f(x) = \sqrt{4-x^2}$, 它在点 $x = 0, x = -2$ 的函数值分别为

$$y|_{x=x_0} = f(0) = \sqrt{4-0^2} = 2$$

$$y|_{x=-2} = f(-2) = \sqrt{4-(-2)^2} = 0$$

(4) 从函数的定义知, 定义域和对应法则是函数的两个基本要素, 两个函数相同, 当且仅当它们的定义域和对应法则都相同.

(5) 在实际问题中, 函数的定义域可根据变量的实际意义来确定. 但在解题中, 对于用表达式表示的函数, 其省略未表出的定义域通常指的是: 使该表达式有意义的自变量取值范围.

1.3 数列的极限

所谓数列, 是指按顺序排列的一列数. 从映射的观点出发, 数列可以准确定义为从正整数集到实数集上的映射, 即

$$f: \mathbf{N}^+ \rightarrow \mathbf{R}$$

简记为 x_n , 即 $x_n = f(n) (n \in \mathbf{N}^+)$. 在具体应用中, 数列也常常被写成 x_1 ,

$x_2, \dots, x_n, \dots$, 记作 $\{x_n\}$. 其中, 数 x_n 称为数列的第 n 项, 而 x_n 的表达式 $f(n)$ ($n \in \mathbf{N}^+$) 则称为数列的通项(一般项).

现在来考察当自变量 n 无限增大时, 数列 $x_n = f(n)$ 的变化趋势. 试看下面几个例子:

$$(1) x_n = \frac{1}{2^n}, \text{ 即 } \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots;$$

$$(2) x_n = \frac{n + (-1)^{n-1}}{n}, \text{ 即 } 2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n + (-1)^{n-1}}{n}, \dots;$$

$$(3) x_n = 2n, \text{ 即 } 2, 4, 6, \dots, 2n, \dots;$$

$$(4) x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}, \text{ 即 } 0, 1, 0, 1, \dots, \frac{1 + (-1)^n}{2}, \dots.$$

通过仔细观察可以发现, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 这几个数列的变化情况不相同. 数列(1)随着 n 的无限增大, $x_n = \frac{1}{2^n}$ 无限接近常数 0; 数列(2)随着 n 的无限增大, $\frac{n + (-1)^{n-1}}{n}$ 无限接近常数 1; 数列(3)、(4)随着 n 的无限增大, 都不能无限接近于某一个确定的常数, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 数列 $x_n = 2n$ 的值也无限增大, 数列 $x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$ 的值在 0 与 1 两个数上来回跳动. 为清楚起见, 我们把表示(1)、(2)这两个数列的点分别在数轴上描出一些(图 1.3.1, 图 1.3.2).

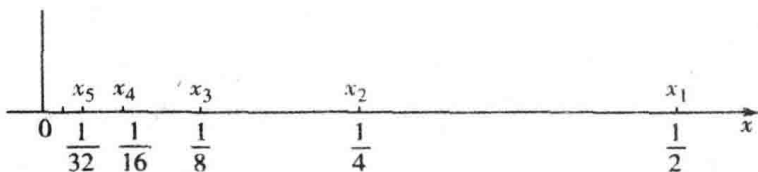


图 1.3.1

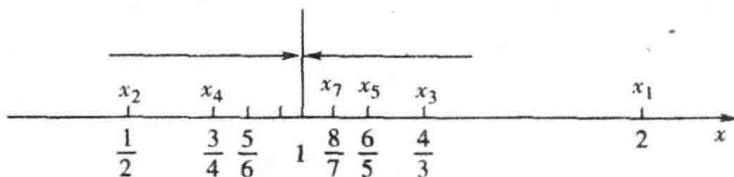


图 1.3.2

综上所述, 可以发现: 当 n 无限增大时, 数列(1)、(2)都趋近于一个常数, 这种数列称为有极限; 当 n 无限增大时, 数列(3)、(4)都不趋近于一个常数, 这种数列称为无极限.

其实早在我国古代就有关于数列的例子. 我国魏晋间杰出的数学家刘

徽用割圆术确定圆的面积. 用 S_1 表示圆的内接正六边形的面积, S_2 表示内接正十二边形的面积, S_3 表示内接正二十四边形的面积, $\dots$, S_n 表示内接正 $3 \cdot 2^n$ 边形的面积(图 1.3.3), $\dots$, 由此可得数列

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$$

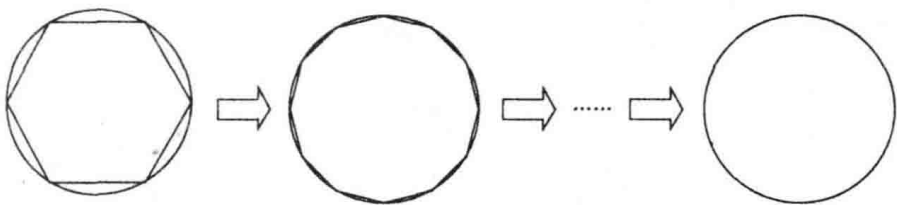


图 1.3.3

这些例子反映了一类数列的某种公共特性, 即对于数列 $\{x_n\}$, 存在某个常数 x , 随着 n 的无限增大(记为 $n \rightarrow \infty$), x_n 能无限地接近于这个常数 x . 我们称这类数列为收敛数列, x 为它的极限. 一般地, 有如下关于数列极限的定义:

定义 1.3.1 如果当 $n \rightarrow \infty$ 时, x_n 无限趋于一个确定的常数 x , 那么称 x 为数列 $\{x_n\}$ 的极限, 或称数列 $\{x_n\}$ 收敛, 且收敛于 x , 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ 或 } x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$$

此时, 也称数列 $\{x_n\}$ 是收敛的; 如果数列 $\{x_n\}$ 没有极限, 就称其为发散的.

因此, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n = \frac{1}{2^n}$ 的极限是 0, 可记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$; $x_n = \frac{n + (-1)^{n-1}}{n}$ 的极限是 1, 可记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} = 1$; 而数列 $x_n = 2n$ 和 $x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$ 没有极限. 没有极限的数列, 也可以说数列的极限不存在.

1.4 函数的极限

1.4.1 自变量趋于无穷大时函数的极限

数列 $\{x_n\}$ 又称为整标函数, 因而数列的极限是函数极限的一种特殊形式. 下面讨论一般的函数 $y = f(x)$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限模型.

先来看一个反比例函数的例子. 考虑当 x 无限增大时反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的变化趋势. 这里 x 无限增大记作 $x \rightarrow \infty$, 指的是 x 的绝对值无限增大.

当 x 取正值并无限增大时记为 $x \rightarrow +\infty$, 当 x 取负值且其绝对值无限增大时记为 $x \rightarrow -\infty$. 由函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图形(图 1.4.1) 可以看出: 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $y = \frac{1}{x}$ 的值无限趋于 0; 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 函数 $y = \frac{1}{x}$ 的值也是无限趋于 0. 从而当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $y = \frac{1}{x}$ 的值无限趋于 0.

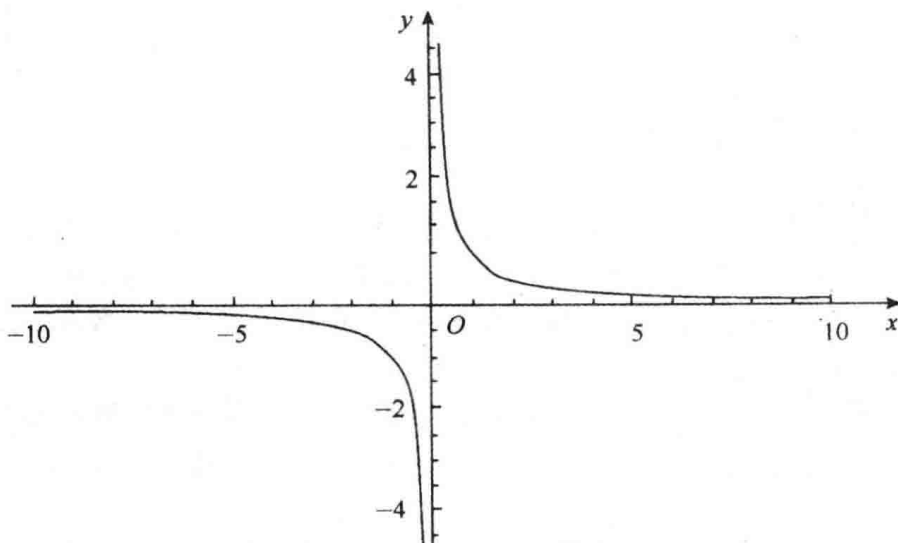


图 1.4.1

一般地, 有如下定义:

定义 1.4.1 设函数 $y = f(x)$ 对于 $|x|$ 大于某正实数时有定义, 当 $|x|$ 无限增大时, 函数值 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A , 我们把 A 称为函数 $f(x)$ 当 x 趋近于无穷大时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty).$$

从几何上看(图 1.4.2), $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 表示: 当绝对值 $|x|$ 无限增大时, 曲线 $y = f(x)$ 上的点与直线 $y = A$ 的距离无限变小.

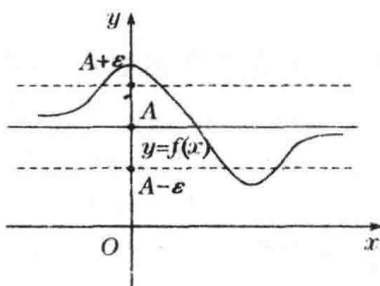


图 1.4.2

定义 1.4.2 设函数 $y = f(x)$ 对于 x 大于某正实数(小于某负实数)时有定义. 当 x 无限增大(当 $-x$ 无限增大)时, 函数值 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A , 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) 时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$$

由图 1.4.3 容易看出, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$.

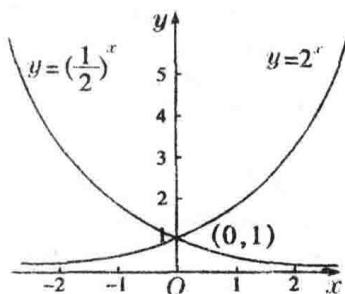


图 1.4.3

由图 1.4.4 可知: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$, 但 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 并不存在, 这是因为当 $x \rightarrow +\infty$ 和 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) = \arctan x$ 不是无限趋近于同一个确定常数.

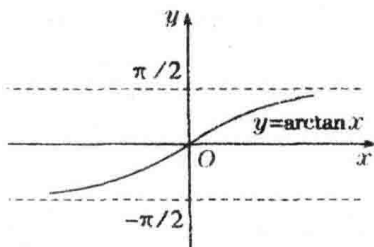


图 1.4.4

根据定义 1.4.1 和定义 1.4.2 有以下结论:

定理 1.4.1 函数 $y = f(x)$ 对于 $|x|$ 大于某正实数时有定义, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

1.4.2 自变量趋于有限值时函数的极限

下面我们观察当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的变化趋势:

如图 1.4.5 所示,当 x 无限趋近于 1 时,函数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ 的值无限趋近于 2. 即当 $x \rightarrow 1$ 时,函数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ 的极限是 2.

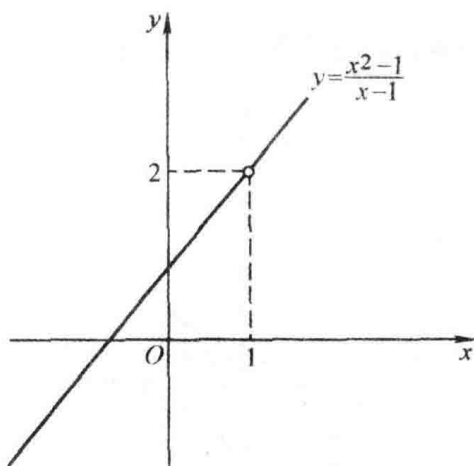


图 1.4.5

对于这种变化趋势有定义:

定义 1.4.3 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的左、右近旁有定义[在点 x_0 处,函数 $f(x)$ 可以没有定义],如果当 x 无限趋近于 x_0 时,对应的函数 $y = f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A ,则称 A 为函数 $y = f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限,记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (\text{当 } x \rightarrow x_0 \text{ 时})$$

由定义 1.4.3,我们有

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 \text{ 或 } \frac{x^2-1}{x-1} \rightarrow 2 (\text{当 } x \rightarrow 1 \text{ 时})$$

极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 刻画了函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 过程中的变化趋势,与 $f(x)$ 在点 x_0 是否有定义无关.

例 1.4.1 讨论函数 $f(x) = x^2 (x \geq 0)$ 在 $x \rightarrow 2$ 时的极限.

解: 如图 1.4.6 所示,当 $x \rightarrow 2$ 时,函数 $f(x) = x^2$ 无限接近于 4,所以 $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

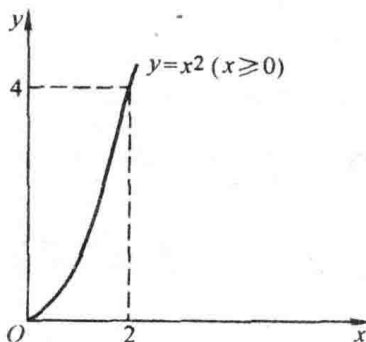


图 1.4.6