S-系理论的公开问题

乔虎生　刘仲奎　著

科学出版社

S-系理论的公开问题

乔虎生　刘仲奎　著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书介绍了半群的S-系理论的若干公开问题. 这些公开问题, 从提出到全部解决或者部分解决的过程, 经历的时间跨度大, 从研究方法到理论创新, 都有值得借鉴和给人启发的地方. 除本书的第 1 章和第 15 章外, 其余每一章都包括三方面的内容: 问题的历史渊源、问题的研究进展、总结与启发. 内容的安排, 基本按照每一个问题从提出到后续研究的时间顺序展开, 力求每一个公开问题, 从内容以及文献自成体系, 方便了解其中每一个公开问题的来龙去脉.

本书力求条理清楚, 便于阅读学习, 可供数学专业研究生和数学研究工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

S-系理论的公开问题/乔虎生, 刘仲奎著. —北京: 科学出版社, 2020.1
ISBN 978-7-03-063276-0

Ⅰ. ①*S*… Ⅱ. ①乔… ②刘… Ⅲ. ①半群-理论研究 Ⅳ. ①O152.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 250199 号

责任编辑: 李 欣 李香叶 / 责任校对: 彭珍珍
责任印制: 吴兆东 / 封面设计: 无极书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京虎彩文化传播有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2020 年 1 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2020 年 1 月第一次印刷 印张: 12 1/2
字数: 252 000

定价: 98.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

对科学研究而言, 解决问题, 总是其重要目的之一. 问题驱动, 对一个研究方向的发展, 具有重要促进作用. 就整个数学学科而言亦是如此. 例如, 希尔伯特的 23 个问题, 就对当代数学的发展具有重大推动作用.

记 S 为幺半群. 如果从幺半群 S 到某个非空集合的全体变换构成的幺半群存在幺半群同态, 就定义了一个 S-系. 半群的 S-系理论, 已经形成了一整套完整的理论体系和研究方法, 具有一定的研究特色. 该理论在一定程度上可以看成半群理论的同调方法, 它和半群理论的关系, 类似于同调代数和环论的关系.

近二十年来, S-系理论发展迅速, 取得了重要的研究进展. S-系理论研究的主要问题之一, 就是考虑其同调分类问题, 即主要研究满足不同性质的 S-系具有某种蕴涵关系的半群的特征, 或者任意 (循环、Rees 商) S-系具有某种性质的半群的特征. 这是 S-系理论刻画半群特征的重要手段, 往往可以得到半群的内部刻画方法所无法获得的结果.

作者自 20 世纪 90 年代至今, 在半群的 S-系理论的研究中做了一些工作, 体会到围绕解决 S-系理论的公开问题去开展研究, 对新思想和新方法的产生, 具有强有力的推动作用. 研究公开问题采用的思想, 往往可以由此及彼, 触类旁通, 给人以启迪. 希尔伯特曾经这样评价费马猜想: “是一只能下金蛋的母鸡.” 阿蒂亚 (Atiyah) 说: “费马猜想扮演了类似珠穆朗玛峰对登山者 (在成功之前) 所起的作用, 它是一个挑战, 试图登顶峰的企图刺激了新的技巧和技术的发展与完善.” S-系理论的公开问题的研究, 对该方向的促进作用, 道理与之相同. 每一个问题的研究取得进展, 总有一些方法或者思路有独到的地方, 这些往往成为问题解决的关键因素.

本书主要选取了作者以及同行研究过的, 或者完全解决了的重要的公开问题, 力图对这些问题做一个较为全面的回顾和阐述, 除第 1 章和第 15 章外, 其余各章都是围绕一个公开问题展开, 重点论述该问题产生的历史渊源、解决过程、目前存在的问题等, 尽量做到自成体系. 读者既可以通读本书, 也可以只关注自己感兴趣的某一章的内容, 基本上可以完全掌握该章所讨论的问题发展的来龙去脉.

本书参考文献的编排按照该文献所在章节出现的顺序. 这样便于读者就某一个感兴趣的公开问题进行查阅或者思考, 每章内容从阐述问题到最后的文献, 都是一个相对独立的小单元. 特别约定, 每一章提到的文献, 都是专指本章最后的参考文献.

本书的出版和所论课题的研究工作得到以下基金和经费的支持: 甘肃省数学

优势学科建设经费; 国家自然科学基金 (11901129, 11461060); 教育部高等学校博士学科点专项科研基金项目 (20096203120001); 甘肃省基本科研业务费; 甘肃省陇原青年创新人才扶持计划项目.

对于半群的 S-系理论, 尽管国内外同行付出了很多努力, 迄今仍然有一些公开问题遗留着, 作为一位数学工作者, 愿与同行共勉, 争取早日解决这些问题.

书中疏漏与不足在所难免, 请同行批评指正, 不胜感谢.

作　者

2019 年 7 月

目　录

第 1 章　半群的 S-系理论基础

1.1　S-系定义和基本性质

本章的内容, 属于本书其余各章的基础, 主要选自文献 [1, 2].

设 S 是幺半群, 1 是其单位元, A 是非空集合. 记所有从 A 到 A 的映射构成的集合为 T, 显然, 按照映射合成, T 可以构成幺半群. 令 f: $S \to T$ 是幺半群同态, 即对任意的 $s, t \in S$, 有 $f(st) = f(s)f(t)$ 且 $f(1_S) = 1_T$, 其中 1_S 和 1_T 分别为 S 和 T 的单位元. 而等式 $f(st) = f(s)f(t)$ 和 $f(1_S) = 1_T$ 成立, 意味着对任意的 $a \in A$, $f(st)(a) = f(s)(f(t)(a))$ 且 $f(1_S)(a) = 1_T(a) = a$. 若简记 $f(s)(a) = sa$, 则 $f(st)(a) = f(s)(f(t)(a))$ 和 $f(1_S)(a) = 1_T(a) = a$ 简记为 $(st)a = s(ta), 1a = a$.

所以, S-系从本质上, 就是从幺半群 S 到另一个幺半群 (某个非空集合 A 到自身的全体映射构成) 之间存在幺半群同态. 群对集合的作用和环的模理论、群表示以及代数表示的基本思想也都是一样的, 即存在从要研究的对象 (群、环、代数) 到另一个对象 (对称群、Abel 群的自同态环、某一类代数) 的群同态 (环同态、代数同态). 半群的 S-系理论, 也可以看成半群的某种 "外部" 表示理论, 有些思想方法, 常常可以借鉴同调代数的研究方法等. 按照这样的思想, 不难理解左 S-系的如下经典的定义.

设 S 是幺半群, 1 是其单位元, A 是非空集合. 若有 $S \times A$ 到 A 的映射 f : $S \times A \to A$ 满足: 对任意的 $a \in A, s, t \in S$, 有

$$f(s, f(t, a)) = f(st, a),$$
$$f(1, a) = a.$$

则称 (A, f) 是左 S-系, 或称 S 左作用于 A 上. 为了方便, 记 $f(s, a) = sa$, 于是上式变为: 对任意的 $a \in A, s, t \in S$, 有

$$s(ta) = (st)a,$$
$$1a = a.$$

此时, 左 S-系 (A, f) 简记为 ${}_SA$ 或 A. 显然, 从更广的意义上理解 S-系, 如果 S 是半群, 不一定有幺元, 那么左 S-系的定义中, 只有一个等式, 即满足: 对任意的 $a \in A, s, t \in S$, 有

$$s(ta) = (st)a.$$

称 A 是单式左 S-系, 如果 $SA = A$. 例如, 在文献 [3, 4] 中, 研究了一般半群 (未必为幺半群) 的 Morita 等价, 就用到了这里给出的单式的定义. 显然, 当 S 是幺半群时, 按照上述方式定义的左 S-系就是单式 S-系, 因为 $1a = a$ 是成立的.

本书中, 除特殊声明以外, S 均为幺半群, 故所有 S-系均指单式左 (右) S-系. 为问题叙述的方便, 有时用左 S-系, 有时用右 S-系, 根据具体需要加以选择.

设 A 是左 S-系, B 是 A 的非空子集合. 若对任意 $b \in B$, 任意 $s \in S$, 都有 $sb \in B$, 则称 B 是 A 的子系, 记为 $B \leqslant A$.

显然 $A \leqslant A$. 若 S 中含有零元 0, 则对于任意 $a \in A, 0a \leqslant A$.

下面的命题 1.1.1 是不证自明的.

命题 1.1.1　S-系 A 的任意多个子系的交若非空, 则仍为子系.

需要注意的是, 这里要加上交非空的条件, 在环的模理论中, 任意多个子模的交自然是非空的, 因为交里面至少包含了其零子模. 从这个结论开始, 可以逐步看到半群的 S-系理论和同调代数的联系与区别.

设 λ 是左 S-系 A 上的等价关系, 若 λ 满足: 对任意的 $s \in S, a, b \in A$, 有

$$(a, b) \in \lambda \Rightarrow (sa, sb) \in \lambda,$$

则称 λ 为 A 上的同余. 在 A 关于同余 λ 的商集 A/λ 上定义左 S-作用: 对任意的 $s \in S$, $a \in A$, 有

$$s(a\lambda) = (sa)\lambda,$$

则容易验证 A/λ 关于上述左 S-作用构成一个左 S-系, 称为 A 关于 λ 的商系. 这里需要注意的是, 左 S-系的同余和半群的同余具有明显的区别, 它只有 “单边” 的相容性.

设 $B \leqslant A$, 定义 A 上的关系如下:

$$a\lambda_B b \Longleftrightarrow a = b \text{ 或 } a, b \in B.$$

容易验证 λ_B 是 A 上的同余, 称其为由 B 决定的 Rees 同余, 简称为 Rees 同余. 称商系 A/λ_B 为 Rees 商.

在 S-系理论研究中, 有一类 Rees 商很重要, 就是把 S 自然地看成左 S-系, S 的左理想 I 自然地看成 S 的子系, 由 I 决定的 Rees 商, 在刻画幺半群的特征时很常用.

类似于子系的生成集概念, 也可以考虑同余的生成集. 下面的命题 1.1.2 是明显的.

命题 1.1.2　S-系 A 上的任意多个同余的交仍为同余.

设 H 为 $A\times A$ 的非空子集合, 则 A 上的包含 H 的最小同余是所有包含 H 的同余之交, 称为由 H 生成的同余, 记为 $\lambda(H)$. H 称为同余 $\lambda(H)$ 的生成集. 显然生成集是不唯一的.

命题 1.1.3 设 H 为 $A\times A$ 的非空子集合, $a,b\in A$. 则 $a\lambda(H)b$ 当且仅当 $a=b$ 或者存在 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in S$, 使得

$$\begin{aligned} &a=t_1c_1 \quad t_2d_2=t_3c_3 \qquad\quad \cdots\ t_nd_n=b\\ &\qquad t_1d_1=t_2c_2 \quad t_3d_3=t_4c_4\ \cdots, \end{aligned}$$

其中 $(c_i,d_i)\in H$ 或 $(d_i,c_i)\in H, i=1,2,\cdots,n$.

证明 在 A 上定义如下关系 σ: $a\sigma b \Longleftrightarrow a=b$ 或者存在 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in S$, 使得

$$\begin{aligned} &a=t_1c_1 \quad t_2d_2=t_3c_3 \qquad\quad \cdots\ t_nd_n=b\\ &\qquad t_1d_1=t_2c_2 \quad t_3d_3=t_4c_4\ \cdots, \end{aligned}$$

其中 $(c_i,d_i)\in H$ 或 $(d_i,c_i)\in H, i=1,2,\cdots,n$.

容易验证 σ 是 A 上的同余关系, 且 $H\subseteq\sigma$. 设 λ 是 A 上的同余且 $H\subseteq\lambda$, 则对于任意 $(a,b)\in\sigma$, 有 $a=b$, 或者

$$\begin{aligned} &a=t_1c_1 \quad t_2d_2=t_3c_3 \qquad\quad \cdots\ t_nd_n=b\\ &\qquad t_1d_1=t_2c_2 \quad t_3d_3=t_4c_4\ \cdots. \end{aligned}$$

显然有 $a=t_1c_1\lambda t_1d_1=t_2c_2\lambda t_2d_2=t_3c_3=\cdots=t_nc_n\lambda t_nd_n=b$, 所以 $\sigma\subseteq\lambda$, 即 σ 是 A 上包含 H 的最小同余.

根据定义即有 $\sigma=\lambda(H)$. 结论得证. ■

其中, 称等式组

$$\begin{aligned} &a=t_1c_1 \quad t_2d_2=t_3c_3 \qquad\quad \cdots\ t_nd_n=b\\ &\qquad t_1d_1=t_2c_2 \quad t_3d_3=t_4c_4\ \cdots \end{aligned}$$

构成了一个 $\lambda(H)$-序列, 正整数 n 称为连接 a 与 b 的 $\lambda(H)$-序列的长度.

设 $s,t\in S$, 若命题 1.1.3 中的 $H=\{(s,t)\}$, 此时 H 生成的左同余常常记为 $\lambda(s,t)$, 由命题 1.1.3 可得, $x\lambda(s,t)y$ 当且仅当 $x=y$ 或者存在 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in S$, 使得

$$\begin{aligned} &x=t_1c_1 \quad t_2d_2=t_3c_3 \qquad\quad \cdots\ t_nd_n=y\\ &\qquad t_1d_1=t_2c_2 \quad t_3d_3=t_4c_4\ \cdots, \end{aligned}$$

其中 $\{d_i,c_i\}=\{s,t\}, i=1,2,\cdots,n$.

S-系 $S/\lambda(s,t)$ 称为单循环的 S-系, 在有些问题的解决中, 这种特殊的循环系具有重要作用.

设 A, B 都是左 S-系. 称映射 $f: A \to B$ 为从 A 到 B 的 S-同态, 如果对任意的 $s \in S, a \in A$, 有

$$f(sa) = sf(a).$$

需要注意的是, S-系同态和半群同态不一样, S-系同态只是把幺半群中元素从括号里 "提" 出来, 很像向量空间中线性变换的线性性质.

设 λ 是 A 上的同余, 令 $B = A/\lambda$. 则自然的映射:

$$\begin{aligned} \lambda^\sharp: A &\to B, \\ a &\mapsto a\lambda, \end{aligned}$$

即从 A 到 B 的 S-同态.

从 A 到 B 的所有 S-同态的集合记为 $\mathrm{Hom}_S(A,B)$ 或简记为 $\mathrm{Hom}(A,B)$. 有的时候, 也将该集合记成 $\mathrm{Act}_S(A,B)$, 如文献 [4] 中就采用这样的记号, 以免与同调代数中模之间的同态集合混淆. 若 S-同态 $f: A \to B$ 还是单且满的映射, 则称 f 为同构. 这时也说 S-系 A 和 B 同构, 记为 $A \simeq B$.

设 $f: A \to B$ 是 S-同态. 称集合

$$\{(a,a') \in A \times A | f(a) = f(a')\}$$

为 f 的核, 记为 $\mathrm{Ker}f$, 显然任意 S-同态 $f: A \to B$ 的核 $\mathrm{Ker}f$ 是 A 上的同余. 若 $\mathrm{Ker}f$=1_A, 即 A 上的恒等同余, 就称为单位同余, 那么显然有如下命题.

命题 1.1.4　S-满同态 f 为同构当且仅当 $\mathrm{Ker}f$ 是 A 上的单位同余.

定理 1.1.5 (同态基本定理)　设 $f: A \to B$ 是 S-同态, λ 是 A 上的同余且 $\lambda \subseteq \mathrm{Ker}f$. 则存在唯一同态 $g: A/\lambda \to B$, 使得下图可换:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda^\sharp"'] & B \\ A/\lambda \arrow[ur, dotted, "g"'] & \end{tikzcd}$$

若 λ =$\mathrm{Ker}f$, 则 g 是单同态. 若 f 还是满同态, 则 g 也是满同态. 特别地当 f 是满同态时有 $A/\mathrm{Ker}f \simeq B$.

证明　若 $(a,a') \in \lambda$, 则 $(a,a') \in$$\mathrm{Ker}f$, 因此有 $f(a) = f(a')$. 所以可以如下定义映射 $g: A/\lambda \to B$. 对任意的 $a \in A$, 令

$$g(a\lambda) = f(a),$$

容易证明 g 还是 S-同态, 且使得上图可换.

设 $g' : A/\lambda \to B$ 也满足 $g'\lambda^\sharp = f$, 则对任意 $a\lambda \in A/\lambda$, $g'(a\lambda) = g'\lambda^\sharp(a) = f(a) = g\lambda^\sharp(a) = g(a\lambda)$, 所以 $g' = g$.

设 $\lambda = \mathrm{Ker} f$, 则 $g(a\lambda) = g(a'\lambda) \Rightarrow f(a) = f(a') \Rightarrow (a, a') \in \mathrm{Ker} f = \lambda \Rightarrow a\lambda = a'\lambda$, 即 g 是单同态.

若 f 是满同态, 则显然 g 也是满同态. 从已证的结果立即可得 $A/\mathrm{Ker} f \simeq B$.■

设 B 是 S-系 A 的非空子集合, 则 A 的包含 B 的最小子系是所有包含 B 的子系之交, 称为由 B 生成的子系, 记为 $\langle B\rangle$, B 称为子系 $\langle B\rangle$ 的生成集. 显然有

$$\langle B\rangle = \{sb | s \in S, b \in B\}.$$

若记 $Sb = \{sb | s \in S\}$, 则

$$\langle B\rangle = \bigcup_{b\in B} Sb.$$

若 $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ 为有限集合, 则称 $\langle B\rangle = Sb_1 \cup \cdots \cup Sb_n$ 为有限生成子系. 特别地, 由一个元素 a 生成的子系 Sa 称为循环子系. 若 A 由一个 (有限个) 元素生成, 则称 A 是循环 (有限生成) 系. 例如, 对于任意 $s \in S$, S 的主左理想 Ss 即 S-系 S 的循环子系, 特别地, S 为循环 S-系.

设 Sa 是由元素 a 生成的循环左 S-系. 定义从 S 到 Sa 的映射 f 为: 对任意的 $s \in S$, $f(s) = sa$. 那么显然 f 是左 S-系满同态. 由同态基本定理可得, $S/\mathrm{Ker} f \cong Sa$, 其中

$$\{(s, s') \in S \times S | f(s) = f(s')\}.$$

由于 $\mathrm{Ker} f$ 是同余, 这说明任何一个循环 S-系都可以写成 S/ρ 的形式, 其中 ρ 是 S 上的左同余. 反之, 若 ρ 是 S 上的左同余, 则商系 S/ρ 显然是由 $[1]_\rho$ 生成的, 其中 $[1]_\rho$ 代表 S 的幺元所在的同余类. 从而, 在以后的研究中, 为了叙述的方便性, 常常把循环系的两种表达方式不加区别地使用.

推论 1.1.6 设 λ, σ 是 A 上的同余且 $\lambda \subseteq \sigma$. 则有 S-系的同构式

$$A/\lambda \Big/ \sigma/\lambda \simeq A/\sigma,$$

其中 $\sigma/\lambda = \{(a\lambda, b\lambda) \mid (a, b) \in \sigma\}$.

证明 定义 S-同态 $f : A/\lambda \to A/\sigma$ 为 $f(a\lambda) = a\sigma$. 则 $\mathrm{Ker} f = \sigma/\lambda$. 由同态基本定理 1.1.5 即得结论. ■

设 S, T 都是幺半群, 若 A 既是左 S-系, 又是右 T-系, 且对任意 $a \in A$, 任意 $s \in S$, 任意 $t \in T$, 有

$$(sa)t = s(at),$$

则称 A 是左 S-右 T-系, 记为 ${}_SA_T$. 例如 S 是左 S-右 S-系. 若 A 是左 S-系, H 是 A 的自同态幺半群, 则 A 是左 S-右 H-系 (约定 $f \in H$ 作用在 $a \in A$ 上的结果为 $(a)f$).

所有左 S-系以及左 S-系之间的 S-同态构成一个范畴, 称为左 S-系范畴, 记为 S-Act. 同样, 所有右 S-系以及右 S-系之间的 S-同态构成一个范畴, 称为右 S-系范畴, 记为 Act-S. 历史上, 在较长的时间内, 对双系的研究相对较少, 近年来, 与 Morita 等价相关的研究课题, 较多地使用了双系的定义, 参见文献 [3, 4] 等.

设 $\mathbb{C}$ 是范畴, $\{A_i|i \in I\}$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一簇对象. $\mathbb{C}$ 中的对象 A 叫做 $\{A_i|i \in I\}$ 的直积, 如果

(1) 对任意 $i \in I$, 存在态射 $\pi_i : A \to A_i$;

(2) 对任意对象 $W \in \mathbb{C}$, 若存在态射 $\varphi_i : W \to A_i$, $i \in I$, 则存在唯一态射 $\varphi : W \to A$, 使得下图可换:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, dotted, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & A \arrow[d, "\pi_i"] \\
& A_i
\end{tikzcd}$$

对偶地可定义余直积. $\mathbb{C}$ 中的对象 C 叫做 $\{A_i|i \in I\}$ 的余直积, 如果

(1) 对任意 $i \in I$, 存在态射 $\varepsilon_i : A_i \to C$;

(2) 对任意对象 $W \in \mathbb{C}$, 若存在态射 $\psi_i : A_i \to W$, $i \in I$, 则存在唯一态射 $\psi : C \to W$, 使得下图可换:

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[d, "\varepsilon_i"'] \arrow[dr, "\Psi_i"] & \\
C \arrow[r, dotted, "\Psi"] & W
\end{tikzcd}$$

下面给出集合的不交并的概念. 例如集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4, 5\}$, 因为 1 是 A 与 B 中都有的元素, 按照通常的集合求并的运算, A 和 B 的并一共有 5 个元素, 1 不能重复. 而在不交并中, A 和 B 的不交并一共有 6 个元素, 1 被算成两个元素, 至于某个 1 属于哪一个集合是清楚的. 有限个集合的不交并常用记号 $\dot{\cup}$ 表示. 任意多个集合的不交并也用 $\coprod$ 或者 $\oplus$ 表示.

对于给定的一簇对象 $\{A_i|i \in I\}$, 容易证明其直积和余直积若存在, 则在同构的意义下必唯一. 例如, 设 A 和 A' 都是 $\{A_i|i \in I\}$ 的直积, 则存在态射 $\pi_i : A \to A_i$ 和 $\pi_i' : A' \to A_i, i \in I$. 因此存在态射 $\alpha : A \to A'$ 和 $\beta : A' \to A$, 使得下图可换:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[drr, "\pi_i"'] & A' \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\pi_i'"] & A \arrow[d, "\pi_i"] \\
& & A_i
\end{tikzcd}$$

所以对任意 $i \in I, \pi_i\beta\alpha = \pi_i$. 显然 $\pi_i 1_A = \pi_i$. 故由唯一性即知 $\beta\alpha = 1_A$. 同理可知 $\alpha\beta = 1_{A'}$. 所以 $A \simeq A'$. 同样的方法可以证明余直积在同构的意义下也是唯一的.

所以记 $\{A_i|i \in I\}$ 的直积和余直积分别为 $\prod\limits_{i\in I} A_i$ 和 $\coprod\limits_{i\in I} A_i$.

在 S-系范畴 S-Act 中, 直积和余直积具有非常简单的表达: 它们分别是卡氏积和不交并. 不交并表示为 $\dot{\bigcup\limits_{i\in I}} A_i$.

有时候, 余直积称为直和, 记作 $\bigoplus\limits_{i\in I} A_i$.

设 $\{A_i|i \in I\}$ 是一簇 S-系. 作 A_i 的卡氏积 $B = \{(a_i)_{i\in I}|a_i \in A_i\}$. 按分量规定 S 在 B 上的左作用, 即任意 $s \in S$, 任意 $b = (a_i)_{i\in I}$, 规定 $sb = (sa_i)_{i\in I}$. 则 B 是左 S-系. 对任意 $i \in I$, 规定 S-同态 $\pi_i : B \to A_i$ 为

$$\pi_i((a_i)_{i\in I}) = a_i.$$

若 W 是 S-系, 且对任意 $i \in I$, 有 S-同态 $\varphi_i : W \to A_i$, 则可规定映射 $\varphi : W \to B$ 为: 对任意的 $w \in W$,

$$\varphi(w) = (\varphi_i(w))_{i\in I}.$$

显然 φ 是 S-同态, 并且 $\pi_i\varphi(w) = \pi_i((\varphi_i(w))_{i\in I}) = \varphi_i(w)$, 所以 $\pi_i\varphi = \varphi_i$. 若还有 S-同态 $\varphi' : W \to B$ 也满足 $\pi_i\varphi' = \varphi_i$, 则对任意 $i \in I, \pi_i\varphi'(w) = \pi_i\varphi(w)$, 所以 $\varphi'(w) = \varphi(w), \forall\, w \in W$. 则 $\varphi = \varphi'$. 这即证明了 φ 的唯一性. 因此由定义即知 B 为 $\{A_i|i \in I\}$ 的直积. 即有

命题 1.1.7 在 S-系范畴 S-Act 中, 任意一簇 S-系的直积同构于它们的卡氏积.

下面考虑 S-系 $\{A_i|i \in I\}$ 的余直积. 作不交并 $B = \dot{\bigcup\limits_{i\in I}} A_i$. 下证 B 可作成左 S-系. 设 $s \in S$. 对任意 $b \in B$, 存在唯一的 i, 使得 $b \in A_i$. 所以可按照 S 在 A_i 上的左作用来定义 sb. 因此 B 可作成一个 S-系. 对于任意 $i \in I$, 显然有自然的包含同态 $\varepsilon_i : A_i \to B$. 设 W 是 S-系且存在 S-同态 $\psi_i : A_i \to W$, $i \in I$. 如下定义映射 $\psi : B \to W$:

$$\psi(b) = \psi_i(b), \quad \forall\, b \in B,$$

其中 i 满足 $b \in A_i$(由 B 的构造可知对于给定的 b, 满足 $b \in A_i$ 的 i 是唯一的). 显

然 ψ 是 S-同态. 对任意 $i\in I$, $a_i\in A_i$,

$$\psi\varepsilon_i(a_i)=\psi(a_i)=\psi_i(a_i),$$

所以有 $\psi\varepsilon_i=\psi_i$.

设还有 S-同态 $\psi':B\to W$ 也满足 $\psi'\varepsilon_i=\psi_i$. 则对任意 $i\in I$, 任意 $a_i\in A_i, \psi\varepsilon_i(a_i)=\psi'\varepsilon_i(a_i)$, 所以 $\psi\varepsilon_i=\psi'\varepsilon_i$, 从而 $\psi=\psi'$. 这就证明了 ψ 的唯一性. 由定义即知 B 为 $\{A_i|i\in I\}$ 的余直积. 总结以上结论有如下命题.

命题 1.1.8 在 S-系范畴 S-Act 中, 任意一簇 S-系的余直积同构于它们的不交并.

S-系 A 叫做可分的, 如果存在 A 的非空子系 A_1 和 A_2, 使得 $A=A_1\dot{\cup}A_2$. 否则就称 A 是不可分的.

命题 1.1.9 任意循环 S-系是不可分的.

证明 设 $A=Sx$ 是循环 S-系. 若 $A=A_1\dot{\cup}A_2$, 则 $x\in A_1$ 或 $x\in A_2$, 因此 $A=A_1$ 或 $A=A_2$. 所以 A 是不可分的. ■

命题 1.1.10 设 $\{A_i|i\in I\}$ 是 S-系 A 的一簇不可分子系. 若 $\bigcap\limits_{i\in I}A_i\neq\varnothing$, 则 $\bigcup\limits_{i\in I}A_i$ 仍然是 A 的不可分子系.

证明 设 $\bigcup\limits_{i\in I}A_i=M\dot{\cup}N$. 再设 $x\in\bigcap\limits_{i\in I}A_i$, 则 $x\in M\dot{\cup}N$. 不妨假定 $x\in M$, 则对任意 $i\in I, x\in M\cap A_i$. 显然有

$$A_i=(M\cap A_i)\dot{\cup}(N\cap A_i).$$

所以由 A_i 的不可分性即知 $N\cap A_i=\varnothing$. 由 i 的任意性即知 $N=\varnothing$. ■

由命题 1.1.9 知任意循环系是不可分的. 后面的命题 1.5.3 将说明, 不可分 S-系不一定是循环的.

命题 1.1.11 任意 S-系 A 可唯一地分解成不可分 S-子系的不交并.

证明 任取 $x\in A$, 则 Sx 是不可分的. 令

$$\mathscr{D}_x=\{B\mid B\text{ 是 }A\text{ 的不可分子系且 }x\in B\}.$$

因为 $Sx\in\mathscr{D}_x$, 所以 $\mathscr{D}_x\neq\varnothing$. 显然 $\bigcap\limits_{B\in\mathscr{D}_x}B\neq\varnothing$. 所以由命题 1.1.10 知 $A_x=\bigcup\limits_{B\in\mathscr{D}_x}B$ 是不可分的. 显然 A_x 是包含 x 的最大的不可分子系. 设 $x,y\in A$. 如果 $A_x\cap A_y\neq\varnothing$, 则由命题 1.1.10 知 $A_x\cup A_y$ 也是不可分的. 又 $x,y\in A_x\cup A_y$, 所以由 A_x,A_y 的最大性即知 $A_x=A_x\cup A_y=A_y$. 如下定义 A 上的关系 $\sim$:

$$x\sim y\Leftrightarrow A_x=A_y,$$

则 $\sim$ 是 A 上的等价关系. 在每个等价类中取代表元 x, 则 $\dot{\bigcup\limits_{x\in A'}}A_x$, 这里 A' 是如上所取的代表元的集合.

下证唯一性. 设 A 有两种不交并分解: $A=\dot{\bigcup}_{i\in I}B_i=\dot{\bigcup}_{j\in J}C_j$, 这里 B_i 和 C_j 都是不可分的. 对任意 $i\in I$, 考虑 B_i 中的元素. 取定 $b\in B_i$, 则存在 $j\in J$, 使得 $b\in C_j$. 所以 $Sb\subseteq C_j$. 令

$$B_i'=\{x\in B_i|x\in C_j\},$$
$$B_i''=\{y\in B_i|\text{ 存在 } k\in J, \text{使得 } y\in C_k \text{ 但 } k\neq j\}.$$

显然 $B_i=B_i'\cup B_i''$ 且 B_i' 和 B_i'' 若不空的话都是 S-系. 由 B_i 的不可分性即得 $B_i''=\varnothing$. 所以对任意 $i\in I$, 存在 $j\in J$, 使得 $B_i\subseteq C_j$. 对于上述 j, 同样的方法可知存在 $i'\in I$, 使得 $C_j\subseteq B_{i'}$. 所以 $B_i\subseteq C_j\subseteq B_{i'}$. 易知 $i=i'$. 因此 $B_i=C_j$. 同样的方法可知对任意 $j\in J$, 存在 $i\in I$, 使得 $C_j=B_i$. 这即证明了唯一性. ■

设 A 是 S-系, 若 $A=\dot{\bigcup}_{i\in I}B_i$ 是 A 的不可分分解, 则称每个 B_i 为 A 的不可分分量.

命题 1.1.12 设 A 是 S-系, $a,b\in A$. 则 a,b 在 A 的同一个不可分分量中当且仅当存在 $s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S$, $a_1,\cdots,a_{n-1}\in A$, 使得

$$\begin{aligned} s_1a&=t_1a_1,\\ s_2a_1&=t_2a_2,\\ s_3a_2&=t_3a_3,\\ &\cdots\cdots\\ s_na_{n-1}&=t_nb. \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

证明 充分性. 设存在 $s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S,a_1,\cdots,a_{n-1}\in A$ 满足题设条件. 容易看出 a 和 b 在同一个不可分分量中. 因为如果 a,b 在不同不可分分量中, 那么通过给等式组 (1.1.1) 中等式两边左乘以适当的元素, 最后存在 $u,v\in S$, 使得 $ua=vb$, 矛盾.

必要性. 在 A 上定义关系 $\sim$:

$$a\sim b\Leftrightarrow \text{存在 } s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S,a_1,\cdots,a_{n-1}\in A,$$

使得等式组 (1.1.1) 成立.

可以证明 $\sim$ 是 A 上的等价关系. 将 A 按照等价关系 $\sim$ 分类, 则 A 可以写成这些子类的不交并. 设 A_i 是任意子类, $x\in A_i$. 对任意 $s\in S$, 显然 $x\sim sx$, 即 sx 和 x 在同一个子类中, 所以 $sx\in A_i$. 这说明 A_i 是 S-系. 容易证明 A_i 还是不可分的. 所以 A 写成了不可分子系的不交并, 且对任意 $a,b\in A$, 若 a,b 在同一个不可分分量中, 则 $a\sim b$, 故结论成立. ■