

LeXue QiZhong

GaoZhong ShuXue XuanXiu



学在七中 乐在其中

乐学七中

高中数学

选修2-1 (二)
选修2-3
选修4-5
· 活页试卷 ·

策划 许 勇 曹杨可 魏 华
主编 张世永 陈中根 何毅章



电子科技大学出版社



第一章 圆锥曲线与方程

1.1 曲线与方程

§ 1.1.1 曲线和方程(一)

一、选择题

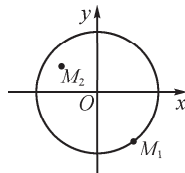
- 方程 $y=ax^2+bx+c$, 则 c 的值是 ()
A. 0 B. 1 C. 2 D. 不确定
- 过原点的曲线 C 的方程是 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ($r>0$), 则 a, b, r 应满足 ()
A. $a^2+b^2 < r^2$ B. $a^2+b^2 = r^2$
C. $a^2+b^2 > r^2$ D. 无确定关系
- 已知点 $P(x, y)$ 到点 $A(3, 0), B(-3, 0)$ 的距离的平方差绝对值为 6, 则点 P 的轨迹方程是 ()
A. $x+y=0$ B. $x=\frac{1}{2}$
C. $x=-\frac{1}{2}$ D. $x=\pm\frac{1}{2}$
- 点 M 到 x 轴的距离与到 y 轴的距离相等, 则 M 的轨迹方程是 ()
A. $x=y$ B. $y=-x$
C. $y=|x|$ D. $|x|=|y|$
- $\text{Rt}\triangle ABC$ 顶点 $A(0, 0), B(0, 4), C(-2, 0)$, 则 $\triangle ABC$ 内角 $\angle A$ 的平分线方程是 ()
A. $y=-x$ B. $y=-\frac{1}{2}x$ ($-\frac{6}{5} \leq x \leq 0$)
C. $y=-x$ ($-\frac{4}{5} \leq x \leq 0$) D. $y=-\frac{1}{2}x$
- “曲线 C 上的点的坐标都是方程 $f(x, y)=0$ 的解”是“曲线 C 的方程是 $f(x, y)=0$ ”的 _____ 条件 ()
A. 充分 B. 必要
C. 充要 D. 既不充分也不必要

二、填空题

- 若方程 $ax^2+by^2=2$ 的曲线经过点 $A(0, \frac{5}{3})$ 和点 $B(1, 1)$, 则 $a=$ _____, $b=$ _____.
- 已知点 $A(1, -2), B(2, -3), C(3, 10)$, 则这三点中在方程 $x^2-xy+2y+1=0$ 表示的曲线上的是 _____.
- 与两直线 $y=x$ 和 $y=-x$ 的距离的积是 2 的点的轨迹方程是 _____.

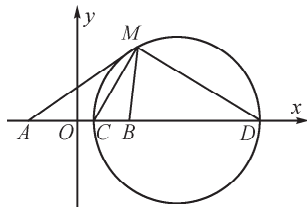
三、解答题

- 证明: 以坐标原点为圆心, 半径等于 5 的圆的方程是 $x^2+y^2=25$, 并判断 $M_1(3, -4), M_2(-2\sqrt{5}, 2)$ 是否在这个圆上.



- 已知 $A(-1, 0), B(2, 4), \triangle ABC$ 的面积为 10, 求动点 C 的轨迹方程.

- (阿氏(Apollonius)圆) 动点 M 与两定点 $A(-a, 0), B(a, 0)$ 的距离之比为常数 $m(m \neq 1)$, 求点 M 的轨迹.





§ 1.1.2 曲线和方程(二)

一、选择题

1. 已知
- $A(2,5), B(3,-1)$
- , 则线段
- AB
- 的方程是 ()

A. $6x+y-17=0$
 B. $6x+y-17=0(x \geq 3)$
 C. $6x+y-17=0(x \leq 3)$
 D. $6x+y-17=0(2 \leq x \leq 3)$

2. 已知动点
- M
- 到定点
- $(8,0)$
- 的距离等于
- M
- 到点
- $(2,0)$
- 的距离的两倍, 那么点
- M
- 的轨迹方程是 ()

A. $x^2+y^2=32$ B. $x^2+y^2=16$
 C. $(x-1)^2+y^2=16$ D. $x^2+(y-1)^2=16$

3. 等腰三角形底边的两个点是
- $B(2,1), C(0,-3)$
- , 则顶点
- A
- 的轨迹方程是 ()

A. $x-2y+1=0(x \neq 0)$ B. $y=2x-1$
 C. $x+2y+1=0(y \neq 1)$ D. $x+2y+1=0(x \neq 1)$

4. 到两坐标轴距离相等且横纵坐标之积不小于零的点的轨迹方程是 ()

A. $y=x(x>0)$ B. $y=x$
 C. $|y|=|x|$ D. $|y|=x$

5. 若
- $\triangle ABC$
- 的两个顶点
- B, C
- 的坐标是
- $(-1,0)$
- 和
- $(2,0)$
- , 而顶点
- A
- 在直线
- $y=x$
- 上移动, 则
- $\triangle ABC$
- 的重心
- G
- 的轨迹方程是 ()

A. $y=x+\frac{1}{3}$ B. $y=\frac{x}{3}+1$
 C. $y=\frac{x}{3}-1$ D. $y=x-\frac{1}{3}$

6. 直线
- $l_1: y=x+1$
- 与直线
- l_2
- 关于直线
- $y=2x$
- 对称, 则直线
- l_2
- 的方程是 ()

A. $y=x-1$ B. $7x-5y+3=0$
 C. $7x-y-5=0$ D. $2x-4y+5=0$

二、填空题

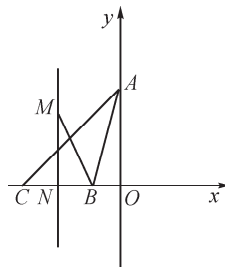
7. 与点
- $O(0,0), A(c,0)(c \neq 0)$
- 距离的平方差为常数
- c
- 的点的轨迹是_____.

- 8.
- $\triangle ABC$
- 的顶点
- $B(0,0), C(5,0)$
- ,
- AB
- 边上的中线
- CD
- 的长为 3, 则顶点
- A
- 的轨迹方程是_____.

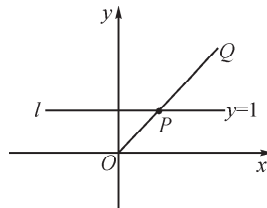
9. 已知点
- $A(2,0), B, C$
- 在
- y
- 轴上, 且
- $|BC|=4$
- ,
- $\triangle ABC$
- 外心的轨迹
- S
- 的方程为_____.

三、解答题

10. 已知
- $\triangle ABC$
- 的顶点
- A
- 是定点, 边
- BC
- 在定直线
- l
- 上滑动.
- $|BC|=4$
- ,
- BC
- 边上的高为 3, 求
- $\triangle ABC$
- 的外心
- M
- 的轨迹方程.



11. 设
- P
- 是直线
- l
- 上的一点, 点
- O
- 是到
- l
- 距离为 1 的定点, 在射线
- OP
- 上取一点
- Q
- , 使
- $|OP| \cdot |OQ|=4$
- , 求点
- Q
- 的轨迹.



12. 过原点的直线与圆
- $x^2+y^2-6x+5=0$
- 相交于
- A, B
- 两点, 求弦
- AB
- 的中点
- M
- 的轨迹方程.



§ 1.1.3 曲线和方程(三)

一、选择题

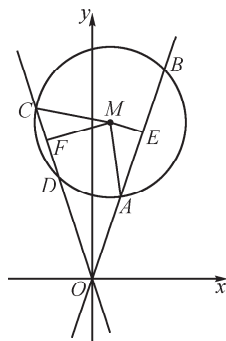
- 若直线 $y = \sqrt{3}x + m$ 与圆 $x^2 + y^2 = 16$ 相交, 则 m 的取值范围是 ()
 A. $(-4, 4)$ B. $(-6, 6)$
 C. $(-8, 8)$ D. $(-10, 10)$
- 直线 $x - 2y - 2k = 0$ 与 $y = x + k$ 的交点在曲线 $x^2 + y^2 = 25$ 上, 则 $k =$ ()
 A. 1 或 5 B. -1 或 -5
 C. 1 或 -1 D. 5
- 定义一个法则 $f: (m, n) \rightarrow (m, \sqrt{n}) (n \geq 0)$, 在法则 f 的作用下, 点 $P(m, n)$ 对应点 $P'(m, \sqrt{n})$. 现有 $A(-1, 2)$, $B(1, 0)$ 两点, 当点 P 在线段 AB 上运动时, 其对应点 P' 的轨迹为 G , 则轨迹 G 与线段 AB 公共点的个数为 ()
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- 直线 $y = x + m$ 与曲线 $x = \sqrt{1 - y^2}$ 恰有一个公共点, 则 m 的取值范围是 ()
 A. $-1 < m < 1$ B. $-1 < m \leq 1$
 C. $-1 < m < 0$ D. $-1 < m \leq 1$ 或 $m = \sqrt{2}$
- 直线 $y = x + \frac{3}{2}$ 被曲线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 所截得的线段中点到原点的距离是 ()
 A. $\frac{\sqrt{29}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{29}}{4}$
 C. $\sqrt{29}$ D. 29
- 曲线 $9x^2 + 4y^2 = 36$ 与曲线 $y = x^2 - m$ 有四个交点, $m =$ ()
 A. $3 < m < \frac{73}{16}$ B. $3 \leq m < \frac{73}{16}$
 C. $3 < m \leq \frac{73}{16}$ D. $m \geq \frac{73}{16}$

二、填空题

- 若曲线 $y = x^2 - x + 2$ 和 $y = x + m$ 有两个交点, 则实数 m 的取值范围是_____.
- 设曲线 $y^2 = 4x$ 截直线 $y = 2x + m$ 所得的弦长 AB 长为 $3\sqrt{5}$, 则 $m =$ _____.
- 已知直线 $l_1: m_1x + n_1y - 1 = 0$ 和直线 $l_2: m_2x + n_2y - 1 = 0$ 的交点为 $p(3, -2)$, 则经过两点 $(m_1, n_1), (m_2, n_2)$ 的直线为_____.

三、解答题

- 已知曲线 $C: y = -x^2 + x + 2$ 与曲线 C' 关于点 $P(a, 2a)$ 中心对称, 并且 C 与 C' 相交于 A, B , 记直线 AB 的斜率为 k , 求 a 的范围.
- 一动圆截直线 $3x - y = 0$ 和 $3x + y = 0$ 所得弦长分别为 8, 4, 求动圆圆心 M 的轨迹方程.



- 已知半圆 $x^2 + y^2 = 4 (y \geq 0)$, 动圆与此半圆相切且与 x 轴相切.
 (1) 求动圆圆心的轨迹.
 (2) 是否存在斜率为 $\frac{1}{3}$ 的直线 l , 使得它与 (1) 中所得轨迹的曲线由左到右依次交于 A, B, C, D 四点, 且满足 $|AD| = 2|BC|$. 若存在, 求出 l 的方程; 若不存在, 说明理由.



1.2 椭圆

§ 1.2.1 椭圆及其标准方程(一)

一、选择题

- 椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上一点 P 到一个焦点的距离为 5, 则 P 到另一个焦点的距离为 ()
A. 5 B. 6 C. 4 D. 10
- 椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$ 的焦点坐标是 ()
A. $(\pm 5, 0)$ B. $(0, \pm 5)$
C. $(0, \pm 12)$ D. $(\pm 12, 0)$
- 设 F_1, F_2 为定点, $|F_1F_2| = 6$, 动点 M 满足 $|MF_1| + |MF_2| = 6$, 则动点 M 的轨迹是 ()
A. 椭圆 B. 直线 C. 圆 D. 线段
- 若椭圆 $2kx^2 + ky^2 = 1$ 的一个焦点坐标是 $(0, 4)$, 则实数 k 的值为 ()
A. $\frac{1}{8}$ B. $-\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{32}$ D. $-\frac{1}{32}$
- 方程 $\sqrt{(x-2)+y^2} + \sqrt{(x+2)^2+y^2} = 10$. 化简的结果是 ()
A. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ B. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$
C. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ D. $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{21} = 1$
- “ $m > n > 0$ ”是“方程 $mx^2 + ny^2 = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆”的 ()
A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

二、填空题

- 椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的焦距是_____, 焦点坐标为_____, 若 CD 为过左焦点 F_1 的弦, 则 F_2CD 的周长为_____.
- 若方程 $4x^2 + ky^2 = 1$ 的曲线是焦点在 y 轴上的椭圆, 则 k 的取值范围是_____.
- 已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 若方程 $x^2 \sin \alpha + y^2 \cos \alpha = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆, 则 α 的取值范围是_____.

三、解答题

- 已知点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上的一点, 且以点 P 及焦点 F_1, F_2 为顶点的三角形的面积等于 1, 求点 P 的坐标.
- 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上一点 $P(3, 4)$, 若 $PF_1 \perp PF_2$, 试求椭圆方程.
- 点 $M(x, y)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上任意一点, O 为坐标原点, F 为椭圆的右焦点.
(1) 求 $|MO|$ 的最大值和最小值;
(2) 求 $|MF|$ 的最大值和最小值.



§ 1.2.1 椭圆及其标准方程(二)

一、选择题

1. 已知椭圆方程为 $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{11} = 1$, 那么它的焦距是 ()
A. 6 B. 3 C. $3\sqrt{31}$ D. $\sqrt{31}$
2. 椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ 的左右焦点为 F_1, F_2 , 一直线过 F_1 交椭圆于 A, B 两点, 则 $\triangle ABF_2$ 的周长为 ()
A. 32 B. 16 C. 8 D. 4
3. 已知 $M(-2, 0), N(2, 0)$, 若 $|PM| + |PN| = 6$, 则 P 点的轨迹方程为 ()
A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ B. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
C. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$ D. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$
4. 已知 $\triangle ABC$ 中, A, B 的坐标分别为 $(2, 0)$ 和 $(-2, 0)$, 若三角形的周长为 10, 则顶点 C 的轨迹方程是 ()
A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 (y \neq 0)$ B. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1 (x \neq 0)$
C. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1 (y \neq 0)$ D. $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{36} = 1 (x \neq 0)$
5. 设 P 是椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{5} = 1$ 上一点, F_1, F_2 是椭圆的两个焦点, 若 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$ 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积是 ()
A. 5 B. 10 C. 8 D. 9
6. 设 $m \in \mathbf{R}$, 已知向量 $\mathbf{a} = (mx, y+1)$, 向量 $\mathbf{b} = (x, y-1)$, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 动点 $M(x, y)$ 的轨迹为 E . 若轨迹 E 的方程表示的是椭圆, 则 m 的范围是 ()
A. $m > 0$ 且 $m \neq 1$ B. $m \neq 1$
C. $m = 1$ D. $m < 0$

二、填空题

7. 已知 $\triangle ABC$ 的周长为 18, 且 $B(-4, 0), C(4, 0)$, 则 A 点的轨迹方程为_____.
8. 已知 F_1, F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点, M 为椭圆上动点, 则 $|MF_1| \cdot |MF_2|$ 的最大值为_____.
9. 已知 x 轴上的一定点 $A(1, 0)$, Q 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上的动点, 则 AQ 中点 M 的轨迹方程是_____.

三、解答题

10. 点 M 与定点 $F(2, 0)$ 的距离和它到定直线 $x=8$ 的距离的比是 $1:2$, 求点 M 的轨迹方程, 并说明轨迹是什么图形.
11. 已知椭圆的两焦点为 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$, P 为椭圆上一点, 且 $2|F_1F_2| = |PF_1| + |PF_2|$.
(1) 求此椭圆方程;
(2) 若点 P 在第二象限, $\angle F_2F_1P = 120^\circ$, 求 $\triangle PF_1F_2$ 的面积.
12. 动圆与圆 $x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0$ 外切, 同时与圆 $x^2 + y^2 - 6x - 91 = 0$ 内切, 求动圆圆心的轨迹方程, 并说明它是什么曲线.



§ 1.2.1 椭圆及其标准方程(三)

一、选择题

1. 直线 l 过原点交椭圆 $16x^2 + 25y^2 = 400$ 于 A, B 两点, 则 $|AB|$ 的最大值为 ()

- A. 8 B. 5 C. 4 D. 10

2. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 $F_1(-1, 0)$, 且点 $P(0, 1)$ 在 C 上. 则椭圆 C 的方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ B. $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$
C. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ D. $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$

3. 若 M, N 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上关于原点对称的两个点, P 是椭圆 C 上任意一点, 若直线 PM, PN 斜率存在, 则它们斜率之积为 ()

- A. $\frac{a^2}{b^2}$ B. $-\frac{a^2}{b^2}$ C. $\frac{b^2}{a^2}$ D. $-\frac{b^2}{a^2}$

4. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{1}{2}$, 右焦点 $F(c, 0)$, 方程 $ax^2 + bx - c = 0$ 的两个根分别为 x_1, x_2 , 则点 $P(x_1, x_2)$ 在 ()

- A. 圆 $x^2 + y^2 = 2$ 内
B. 圆 $x^2 + y^2 = 2$ 上
C. 圆 $x^2 + y^2 = 2$ 外
D. 以上三种情况都有可能

5. B_1, B_2 是椭圆短轴的两端点, 过左焦点 F_1 作长轴的垂线交椭圆于 P , 若 $|F_1 B_2|$ 是 $|OF_1|$ 和 $|B_1 B_2|$ 的比例中项, 则 $\frac{|PF_1|}{|OB_2|}$ 的值是 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

6. 点 A 为平面 α 内一点, 点 B 为平面 α 外一点, 直线 AB 与平面 α 成 60° 角, 平面 α 内有一动点 P , 当 $\angle ABP = 45^\circ$ 时, 则动点 P 的轨迹为 ()

- A. 椭圆 B. 圆
C. 双曲线的一支 D. 抛物线

二、填空题

7. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点到点 $P(2, 1)$ 的距离为 $\sqrt{10}$, $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 则椭圆 C 的方程为_____.

8. 若实数 x, y 满足 $\sqrt{x^2 + (y+3)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 10$, 则 $t = \frac{x}{4} + \frac{y}{5}$ 的最大值为_____.

9. M 是椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上任一点, F_1, F_2 为两焦点, I 是 $\triangle MF_1 F_2$ 的内心, 延长 MI 交 $F_1 F_2$ 于 N , 则 $\frac{|MI|}{|IN|}$ _____.

10. 已知 F_1, F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点, M 为椭圆上动点, 若过 F_2 作 $\angle F_1 M F_2$ 的外角平分线的垂线, 垂足为 N , 则点 N 的轨迹方程是_____.

三、解答题

11. 已知直线 $l: y = kx + 3$ 与椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

(1) 判断直线 l 与椭圆的位置关系;

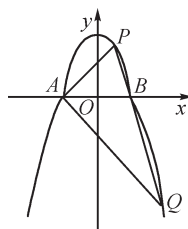
(2) 当 k 为什么值时, 椭圆中心 O 到直线 l 的距离为 1.

12. (2014 · 陕西理) 如图所示, 曲线 C 由上半椭圆 $C_1: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0, y \geq 0)$ 和部分抛物线 $C_2: y = -x^2 + 1 (y \leq 0)$ 连接而成, C_1 与 C_2 的公共点为 A, B .

曲线 C_1 中 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 过点 B 的直线 l 与 C_1, C_2 分别交于点 P, Q (均异于点 A, B), 若 $AP \perp AQ$, 求直线 l 的方程.

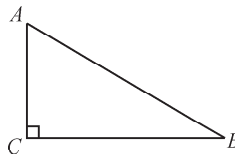


13. 如图所示, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $|BC| = 4$, $|AC| = 3$, 一曲线 E 过点 A , 动点 P 在曲线 E 运动, 且保持 $|PC| + |PB|$ 的值不变.

(1) 建立适当的坐标系, 求曲线 E 的方程;

(2) 若直线 l 交曲线 E 于 M, N 两点, 曲线 E 与 y 轴正半轴交于 Q 点, 且 $\triangle QMN$ 的重心恰好为 B 点, 求线段 MN 中点的坐标;

(3) 以 $V(-6, 6)$ 为圆心的圆与曲线 E 交于 R, S 两点, 求 RS 中点 T 的轨迹方程.





§ 1.2.2 椭圆的简单几何性质(一)

一、选择题

1. 椭圆 $2x^2 + 3y^2 = 6$ 的焦距是 ()
 A. 2 B. $2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$
 C. $2\sqrt{5}$ D. $2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$
2. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$, $C_2: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$ 则 ()
 A. C_1 与 C_2 顶点相同
 B. C_1 与 C_2 长轴长相同
 C. C_1 与 C_2 短轴长相同
 D. C_1 与 C_2 焦距相等
3. 已知 $k < 4$, 则曲线 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 和 $\frac{x^2}{9-k} + \frac{y^2}{4-k} = 1$ 有 ()
 A. 相同的顶点 B. 相同的焦点
 C. 相同的范围 D. 相同的长轴
4. 点 $A(a, 1)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的内部, 则 a 的取值范围是 ()
 A. $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$
 B. $a < -\sqrt{2}$ 或 $a > \sqrt{2}$
 C. $-2 < a < 2$
 D. $-1 < a < 1$
5. 椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的一个焦点为 F_1 , 点 P 在椭圆上, 如果线段 PF_1 的中点 M 在 y 轴上, 那么点 M 的纵坐标是 ()
 A. $\pm \frac{3}{4}$ B. $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\pm \frac{\sqrt{3}}{4}$
6. 设 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{4x^2}{49} + \frac{y^2}{6} = 1$ 的两个焦点, P 是椭圆上的点, 且 $|PF_1| : |PF_2| = 4 : 3$, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 ()
 A. 4 B. 6 C. $2\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{2}$

二、填空题

7. 已知椭圆中心在原点, 一个焦点为 $F(-2\sqrt{3}, 0)$, 且长轴长是短轴长的 2 倍, 则该椭圆的标准方程是_____.
8. 已知点 $M(4\cos\theta, 3\sin\theta)$ ($\theta \in \mathbf{R}$), 当 θ 变化时, 点 M 运动的轨迹方程是_____.
9. 已知 F_1, F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点, M 为椭圆上动点, 则 $|MF_2|$ 的最大值为_____.
10. 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 , 点 P 在椭圆上, 若 $|PF_1| = 4$, 则 $|PF_2| =$ _____; $\angle F_1PF_2$ 的大小为_____.

三、解答题

11. 已知椭圆过点 $P(0, -2)$, 且长轴长与短轴长的差为 2, 求椭圆的标准方程, 并写出它的焦点坐标.
12. 已知椭圆 C 的中心为直角坐标系 xOy 的原点, 焦点在 x 轴上, 它的一个顶点到两个焦点的距离分别是 7 和 1.
 (1) 求椭圆 C 的方程;
 (2) 若 P 为椭圆 C 的动点, M 为过 P 且垂直于 x 轴的直线上的点, $|OP| = \frac{3}{4}|OM|$, 求点 M 的轨迹方程, 并说明轨迹是什么曲线.
13. (2014 · 全国 I 理) 已知点 $A(0, -2)$, 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, F 是椭圆 E 的右焦点, 直线 AF 的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, O 为坐标原点.
 (1) 求 E 的方程;
 (2) 设过点 A 的动直线 l 与 E 相交于 P, Q 两点, 当 $\triangle OPQ$ 的面积最大时, 求 l 的方程.



§ 1.2.2 椭圆的简单几何性质(二)

一、选择题

1. 椭圆的一个顶点与两个焦点构成等边三角形,则此椭圆的离心率是 ()

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

2. 已知椭圆的短轴长为 6,焦点 F 到长轴的一个端点的距离等于 9,则椭圆离心率等于 ()

A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{5}{13}$ D. $\frac{12}{13}$

3. 已知椭圆的对称轴是坐标轴,离心率为 $\frac{1}{3}$,长轴长为 12,则椭圆方程为 ()

A. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{128} = 1$ 或 $\frac{x^2}{128} + \frac{y^2}{144} = 1$

B. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1$

C. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$ 或 $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{36} = 1$

D. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} = 1$ 或 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1$

4. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, A 是左顶点, F 是右焦点, B 是短轴的一个端点,则 $\angle ABF$ 等于 ()

A. 30° B. 45° C. 90° D. 120°

5. 从一块短轴长为 $2b$ 的椭圆形玻璃镜中划出一块面积最大的矩形,其面积的取值范围是 $[3b^2, 4b^2]$,则这一椭圆离心率 e 的取值范围是 ()

A. $[\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ B. $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$

C. $[\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ D. $[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$

6. (2010·四川理改编)椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点 F , 直线 $x = \frac{a^2}{c}$ (c 为椭圆半焦距) 与 x 轴的交点为 A ,

在椭圆上存在点 P 满足线段 AP 的垂直平分线过点 F , 则椭圆离心率的取值范围是 ()

A. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ B. $(0, \frac{1}{2}]$

C. $[\sqrt{2}-1, 1)$ D. $[\frac{1}{2}, 1)$

二、填空题

7. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别是 F_1, F_2 ,

线段 F_1F_2 被点 $(\frac{b}{2}, 0)$ 分成 $5:3$ 的两段,则椭圆的离心率是_____.

8. 已知以椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点 F 为圆心, a

为半径的圆与直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 交于不同的两点,则该椭圆的离心率的取值范围是_____.

9. 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点 $F(c, 0)$ 作 x 轴的垂线,与椭圆交于点 A, B ,若 $\triangle AOB$ 为锐角三角形,则该椭圆的离心率范围是_____.

三、解答题

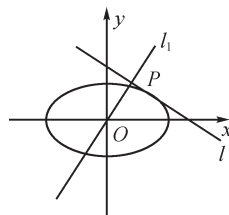
10. (2010·全国卷1文)已知 F 是椭圆 C 的一个焦点, B 是短轴的一个端点,线段 BF 的延长线交 C 于点 D ,且 $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{FD}$,求椭圆 C 的离心率.



11. 已知椭圆的中心为坐标原点 O , 焦点在 x 轴上, 斜率为 1 且过椭圆右焦点 F 的直线交椭圆于 A, B 两点, $\vec{OA} + \vec{OB}$ 与 $\mathbf{a} = (3, -1)$ 共线, 求椭圆的离心率.

12. (2014 · 浙江理) 如图所示, 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 动直线 l 与椭圆 C 只有一个公共点 P , 且点 P 在第一象限.

- (1) 已知直线 l 的斜率为 k , 用 a, b, k 表示点 P 的坐标;
 (2) 若过原点 O 的直线 l_1 与 l 垂直, 证明: 点 P 到直线 l_1 的距离的最大值为 $a - b$.





§ 1.2.2 椭圆的简单几何性质(三)

一、选择题

1. 设 a, b 是方程 $x^2 + x \cdot \cot\theta - \cos\theta = 0$ 的两个不等的实数根, 那么过点 $A(a, a^2)$ 和 $B(b, b^2)$ 的直线与椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 的位置关系是 ()

- A. 相离 B. 相切
C. 相交 D. 随的变化而变化

2. 椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦点为 F_1 和 F_2 , 点 P 在椭圆上. 如果线段 PF_1 的中点在 y 轴上, 那么 $|PF_1|$ 是 $|PF_2|$ 的 ()

- A. 7 倍 B. 5 倍 C. 4 倍 D. 3 倍

3. 下列结论正确的是 ()

- A. 曲线 $\begin{cases} x=5\cos\theta \\ y=5\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数) 为椭圆;
B. 曲线 $\begin{cases} x=5\cos\theta \\ y=4\cos\theta \end{cases}$ (θ 为参数) 为椭圆;
C. 曲线 $\begin{cases} x=5\cos\theta \\ y=-4\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数) 不是椭圆;
D. 曲线 $\begin{cases} x=5\cos\theta \\ y=4\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数且 $0 \leq \theta \leq \pi$) 不是椭圆.

4. 在给定椭圆中, 过焦点且垂直于长轴的弦长为 $\sqrt{2}$, 焦点到相应准线的距离为 1, 则该椭圆的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

5. 设 O 是曲线 $\begin{cases} x=3\cos\varphi \\ y=2\sin\varphi \end{cases}$ (φ 为参数) 的中心, P 是曲线上对应于 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 的点, 那么直线 OP 的斜率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

6. $F(c, 0)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点, F 与椭圆上点的距离的最大值为 m , 最小值为 n , 则椭圆上与点 F 距离为 $\frac{m+n}{2}$ 的点是 ()

- A. $(c, \pm \frac{b^2}{a})$ B. $(c, \pm \frac{b}{a})$
C. $(0, \pm b)$ D. 不存在

二、填空题

7. 椭圆 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ 上有一点 P , 它到椭圆的左准线距离为 10, 则点 P 到椭圆的右焦点的距离是_____.

8. 过椭圆 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$ 的焦点 F_1 作直线交椭圆于 A, B 二点, F_2 是此椭圆的另一焦点, 则 $\triangle ABF_2$ 的周长为_____.

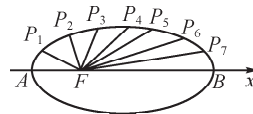
9. 如图所示, 把椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的长轴 AB 分成 8 等分, 过每个分点作 x 轴的垂线交椭圆的上半部分于 $P_1, P_2, \dots$

P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 七个点, F

是椭圆的一个焦点, 则 $|P_1F|$

$+ |P_2F| + |P_3F| + |P_4F|$

$+ |P_5F| + |P_6F| + |P_7F|$ _____.

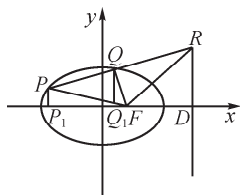


三、解答题

10. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 其上一点 $P(3, y)$ 到两焦点的距离分别是 6.5 和 3.5, 求椭圆方程.



11. P, Q 为椭圆上的任意两点, 延长 PQ 交焦点 F 所对应的准线于点 R , 求证: FR 为 $\angle PFQ$ 的外角平分线.



12. (2014 · 天津理) 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 右顶点为 A , 上顶点为 B , 已知 $|AB| = \frac{\sqrt{3}}{2} |F_1 F_2|$.

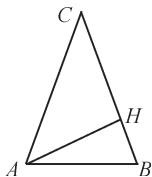
- (1) 求椭圆的离心率;
- (2) 设 P 为椭圆上异于其顶点的一点, 以线段 PB 为直径的圆经过点 F_1 , 经过原点 O 的直线 l 与该圆相切, 求直线 l 的斜率.



单元测试题(一) 曲线方程和椭圆测试题

一、选择题

- 与两坐标轴距离相等的动点的轨迹方程是 ()
A. $y=x$ B. $y=-x$
C. $y=|x|$ D. $x^2-y^2=0$
- 在 $\triangle ABC$ 中, $B(-2,0)$, $C(2,0)$, 中线 AO 的长度是 3, 则点 A 的轨迹方程是 ()
A. $x^2+y^2=3(x \neq 0)$ B. $x^2+y^2=3(y \neq 0)$
C. $x^2+y^2=9(x \neq 0)$ D. $x^2+y^2=9(y \neq 0)$
- 等腰 $\triangle ABC$, 若一腰的两个端点坐标分别是 $A(4,2)$, $B(-2,0)$, A 为顶点, 则另一腰的一个端点 C 的轨迹方程是 ()
A. $x^2+y^2-8x-4y=0$
B. $x^2+y^2+8x+4y-20=0$ 除去点 $(-2,0)$ 与 $(10,4)$
C. $x^2+y^2-8x-4y-20=0$ 除去点 $(-2,0)$ 与 $(10,4)$
D. $x^2+y^2-8x-4y+20=0$ 除去点 $(-2,0)$ 与 $(10,4)$
- 椭圆 $x^2+my^2=1$ 的焦点在 y 轴上, 长轴长是短轴长的两倍, 则 m 的值为 ()
A. 4 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$
- 以椭圆两焦点为直径端点的圆交椭圆于四个不同点, 这 4 个交点与 2 个焦点组成一个正六边形, 则椭圆离心率为 ()
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
C. $\sqrt{3}-1$ D. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
- 如图所示, H 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上一点, $\tan \frac{C}{2} = \frac{1}{2}$, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = 0$, 则以 A, H 为两焦点且过点 C 的椭圆的离心率为 ()



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 2

二、填空题

- 若直线 l 的方程为 $4x+3y-5=0$, 则到 l 的距离为 1 的点的轨迹方程为_____.
- 直线 $y=3x+m$ 与椭圆 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$ 交于 A, B 两点, 若 M 为弦 AB 中点, 则原点 O 与 M 连接斜率为_____.
- 设 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左顶点为 A_1 , 右焦点为 F_2 , 点 P 为椭圆上的一点, 则当 $\overrightarrow{PA_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}$ 取最小值时, $|\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PF_2}|$ 的值为_____.

三、解答题

- $\triangle ABC$ 中, 点 $A(2,0)$, BC 边在直线 $l: x-y+2=0$ 上移动, 求重心 G 的轨迹方程.
- A, B 分别是直线 $y = \frac{b}{a}x$ 和 $y = -\frac{b}{a}x$ 上的两点, O 为坐标原点, 且 $|OA| \cdot |OB| = a^2 + b^2$, 求 AB 中点的轨迹方程.
- 椭圆 $G: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, M 是椭圆上一点, 满足 $\overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_2M} = 0$.
(1) 求离心率 e 的取值范围.
(2) 当离心率 e 取得最小值时, 点 $N(0, 3)$ 到椭圆上的点的最远距离为 $5\sqrt{2}$.
(i) 求此时椭圆 G 的方程.
(ii) 设斜率为 $k (k \neq 0)$ 的直线 l 与椭圆 G 相交于不同的两点 A, B , Q 为 AB 的中点, 问: A, B 两点能否关于过点 $P(0, -\frac{\sqrt{3}}{3})$, Q 的直线对称? 若能, 求出 k 的取值范围; 若不能, 请说明理由.



§ 1.1.3 椭圆的综合问题(一)

一、选择题

- 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的中心、右焦点、右顶点依次为 O, F, A , 右准线与 x 轴的交点为 H , 则 $\frac{|FA|}{|OH|}$ 的最大值为 ()
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. 1
- 焦点为 $(0, \pm 5\sqrt{2})$ 的椭圆截直线 $3x - y - 2 = 0$ 所得弦的中点的横坐标为 $\frac{1}{2}$, 则此椭圆方程为 ()
A. $\frac{2}{25}x^2 + \frac{2y^2}{75} = 1$ B. $\frac{2x^2}{75} + \frac{2y^2}{25} = 1$
C. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{75} = 1$ D. $\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{25} = 1$
- 直线 $y = kx - 2$ 与椭圆 $x^2 + 4y^2 = 80$ 相交于不同的两点 P, Q , 若 PQ 的中点横坐标为 2, 则直线的斜率等于 ()
A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. -2 D. 2
- 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 中心的直线交椭圆于 A, B 两点, 右焦点为 $F_2(c, 0)$, 则 $\triangle ABF_2$ 的最大面积是 ()
A. ab B. ac C. bc D. b^2
- 经过椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点任意作弦 AB , 过 A 作椭圆右准线的垂线 AM , 垂足为 M , 则直线 BM 必经过点 ()
A. $(2, 0)$ B. $(\frac{5}{2}, 0)$ C. $(3, 0)$ D. $(\frac{7}{2}, 0)$
- 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 其右准线与 x 轴的交点为 A . 在椭圆上存在点 P 满足线段 AP 的垂直平分线过点 F , 则椭圆离心率的取值范围是 ()
A. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ B. $(0, \frac{1}{2}]$
C. $[\frac{2}{-1}, 1)$ D. $[\frac{1}{2}, 1)$

二、填空题

- 直线 $y = x - \frac{1}{2}$ 被椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 截得的弦长为 _____.
- 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, 一组平行直线的斜率是 $\frac{3}{2}$, 当这组直线与椭圆相交时, m 的取值范围是 _____.
- 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 , 点 P 在椭圆上, 若 $|PF_1| = 4$, 则 $|PF_2| =$ _____; $\angle F_1PF_2$ 的大小为 _____.

三、解答题

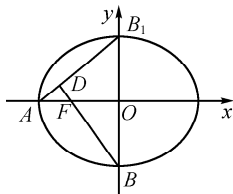
- 从椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上一点 M 向 x 轴作垂线, 恰好通过椭圆左焦点 F_1 , 且它的长轴端点 A 与短轴端点 B 的连线 $AB \parallel OM$.
(1) 求椭圆的离心率 e .
(2) 某直线过椭圆右焦点与 AB 垂直, 交椭圆于 P, Q 两点, 若 $\triangle F_1PQ$ 的面积为 $20\sqrt{3}$, 求椭圆方程.
- 已知椭圆 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$, 问当 m, k 满足何种条件时, 直线 $y = kx + m$ 与椭圆 E 恒有两个交点 A, B , 且 $\vec{OA} \perp \vec{OB}$.
- 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 直线 $l: y = x + 2$ 与以原点为圆心、以椭圆 C_1 的短半轴长为半径的圆相切.
(1) 求椭圆 C_1 的方程;
(2) 设椭圆 C_1 的左焦点为 F_1 , 右焦点 F_2 , 直线 l_1 过点 F_1 且垂直于椭圆的长轴, 动直线 l_2 垂直 l_1 于点 P , 线段 PF_2 垂直平分线交 l_2 于点 M , 求点 M 的轨迹 C_2 的方程;
(3) 设 C_2 与 x 轴交于点 Q , 不同的两点 R, S 在 C_2 上, 且满足 $\vec{QR} \cdot \vec{RS} = 0$, 求 $|\vec{QS}|$ 的取值范围.



§ 1.2.3 椭圆的综合问题(二)

一、选择题

1. 如图所示,椭圆中心在原点, F 是左焦点,直线 AB_1 与 BF 交于 D ,且 $\angle BDB_1 = 90^\circ$,则椭圆的离心率为 ()



A. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ C. $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 椭圆 $4x^2 + 9y^2 = 144$ 内有一点 $P(3, 2)$,过点 P 的弦恰好以 P 为中点,那么这弦所在直线的方程为 ()

A. $3x + 2y - 12 = 0$ B. $2x + 3y - 12 = 0$

C. $4x + 9y - 144 = 0$ D. $9x + 4y - 144 = 0$

3. 已知以 $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$ 为焦点的椭圆与直线 $x + \sqrt{3}y + 4 = 0$ 有且仅有一个交点,则椭圆的长轴长为 ()

A. $3\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{6}$ C. $2\sqrt{7}$ D. $4\sqrt{2}$

4. 设 P 是椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 上一点, M, N 分别是两圆: $(x+2)^2 + y^2 = 1$ 和 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 上的点,则 $|PM| + |PN|$ 的最小值、最大值分别为 ()

A. 4, 8 B. 2, 6 C. 6, 8 D. 8, 12

5. 若点 O 和点 F 分别为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的中心和左焦点,点 P 为椭圆上的任意一点,则 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{FP}$ 的最大值为 ()

A. 2 B. 3 C. 6 D. 8

6. (2009 · 重庆理) 已知以 $T=4$ 为周期的函数 $f(x) = \begin{cases} m\sqrt{1-x^2}, & x \in (-1, 1] \\ 1-|x-2|, & x \in (1, 3] \end{cases}$, 其中 $m > 0$. 若方程 $3f(x) = x$ 恰有 5 个实数解,则 m 的取值范围为 ()

A. $(\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{8}{3})$ B. $(\frac{\sqrt{15}}{3}, \sqrt{7})$

C. $(\frac{4}{3}, \frac{8}{3})$ D. $(\frac{4}{3}, \sqrt{7})$

二、填空题

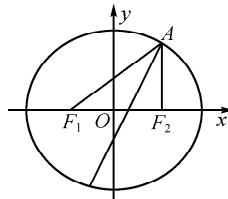
7. 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 , 点 P 在椭圆上, 若 $|PF_1| = 4$, 则 $|PF_2| =$ _____; $\angle F_1PF_2$ 的大小为 _____.

8. (2012 · 四川高考理) 椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左焦点为 F , 直线 $x=m$ 与椭圆相交于点 A, B , 当 $\triangle FAB$ 的周长最大时, $\triangle FAB$ 的面积是 _____.

9. 已知圆 $G: (x-2)^2 + y^2 = r^2$ 是椭圆 $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$ 的内接 $\triangle ABC$ 的内切圆, 其中 A 为椭圆的左顶点, 则圆 G 的半径 r 等于 _____.

三、解答题

10. 椭圆 $E: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 经过点 $A(2, 3)$, F_1, F_2 为椭圆的左右焦点, 求 $\angle F_1AF_2$ 的角平分线所在直线的方程.



11. 动圆 M 过定点 $A(-\sqrt{2}, 0)$, 且与定圆 $A': (x-\sqrt{2})^2 + y^2 = 12$ 相切.

(1) 求动圆圆心 M 的轨迹 C 的方程;

(2) 过点 $P(0, 2)$ 的直线 l 与轨迹 C 交于不同的两点 E, F , 求 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ 的取值范围.

12. 定义: “在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上 $P(x_0, y_0)$ 点处的切线方程记作: $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$ ”, 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 左右焦点为 F_1, F_2 , 在其 P 点处的切线记为 l , 过 F_2 作 l 的垂线于 C 点.

(1) F_2 关于切线 l 的对称点为 D , 证明: D, P, F_1 三点共线;

(2) 求点 C 的轨迹方程.



单元测试(二) 椭圆测试题

一、选择题

- 方程 $\sqrt{x^2+(y-3)^2} + \sqrt{x^2+(y+3)^2} = 10$ 化简的结果是 ()
 A. $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$ B. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$
 C. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ D. $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{21} = 1$
- 若 $m > n > 0$, 则方程 $mx^2 + ny^2 = 1$ 表示曲线是 ()
 A. 焦点在 x 轴上的椭圆 B. 圆
 C. 焦点在 y 轴上的椭圆 D. 无法确定
- 椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点到直线 $y = \sqrt{3}x$ 的距离是 ()
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{3}$
- 设 $0 \leq \alpha < 2\pi$, 若方程 $x^2 \sin \alpha - y^2 \cos \alpha = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆, 则 α 的取值范围是 ()
 A. $(0, \frac{5\pi}{4}) \cup (\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$ B. $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$
 C. $(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4})$ D. $(\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$
- $y = kx + 1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{m} = 1$ 恰有公共点, 则 m 的范围是 ()
 A. $(0, 1)$ B. $(0, 5)$
 C. $[1, 5) \cup (5, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$
- 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 右顶点为 A , 点 B 在椭圆上, 且 $BF \perp x$ 轴, 直线 AB 交 y 轴于点 P , 若 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$, 则椭圆的离心率是 ()
 A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$
- 已知 P 是椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上的点, F_1, F_2 分别是椭圆的左、右焦点, 若 $\frac{\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}}{|\overrightarrow{PF_1}| \cdot |\overrightarrow{PF_2}|} = \frac{1}{2}$, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为 ()
 A. $3\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- 设 F_1, F_2 是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, P 为直线 $x = \frac{3a}{2}$ 上一点, $\triangle F_2PF_1$ 是底角为 30° 的等腰三角形, 则 E 的离心率为 ()
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{3}{4}$

- 椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左焦点为 F , 直线 $x = m$ 与椭圆相交于点 A, B , 当 $\triangle FAB$ 的周长最大时, m 等于 ()
 A. 2 B. 0 C. 1 D. -2
- 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F , 右准线为 l , 点 $A \in l$, 线段 AF 交 C 于点 B , 若 $\overrightarrow{FA} = 3\overrightarrow{FB}$, 则 $|\overrightarrow{AF}| =$ ()
 A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. 3 D. 2

二、填空题

- 若椭圆 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{m} = 1$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 则 $m =$ _____.
- 若以椭圆上一点和两个焦点为顶点的三角形面积的最大值为 1, 则椭圆长轴长的最小值为 _____.
- 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 C 的中心为原点, 焦点 F_1, F_2 在 x 轴上, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 过 F_1 的直线 l 交 C 于 A, B 两点, 且 $\triangle ABF_2$ 的周长为 16, 那么 C 的方程为 _____.
- 若点 O 和点 F 分别为椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的中心和左焦点, 点 P 为椭圆上的任意一点, 则 $|\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{PF}|^2$ 的最小值为 _____.
- 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 且倾角为 45° 的直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 以下结论中: ① $\triangle ABF_1$ 的周长为 8; ② 原点到 l 的距离为 1; ③ $|AB| = \frac{8}{3}$; 其中所有正确命题的序号是 _____ (请写出所有正确命题的序号).

三、解答题

- 设 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 过 F_2 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 直线 l 的倾斜角为 60° , F_1 到直线 l 的距离为 $2\sqrt{3}$.
 (1) 求椭圆 C 的焦距;
 (2) 如果 $\overrightarrow{AF_2} = 2\overrightarrow{F_2B}$, 求椭圆 C 的方程.



17. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{m^2} + y^2 = 1$ (常数 $m > 1$), P 是曲线 C 上的

动点, M 是曲线 C 上的右顶点, 定点 A 的坐标为 $(2, 0)$

(1) 若 M 与 A 重合, 求曲线 C 的焦点坐标;

(2) 若 $m = 3$, 求 $|PA|$ 的最大值与最小值.

18. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的长轴长为 4.

(1) 若以原点为圆心、椭圆短半轴为半径的圆与直线 $y = x + 2$ 相切, 求椭圆 C 的焦点坐标;

(2) 若点 P 是椭圆 C 上的任意一点, 过原点的直线 l 与椭圆相交于 M, N 两点, 记直线 PM, PN 的斜率分别为 k_{PM}, k_{PN} , 当 $k_{PM} \cdot k_{PN} = -\frac{1}{4}$ 时, 求椭圆的方程.

19. 已知直线 $x + y - 1 = 0$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 相

交于 A, B 两点, M 是线段 AB 上的一点, $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{BM}$,

且点 M 在直线 $l: y = \frac{1}{2}x$ 上.

(1) 求椭圆的离心率;

(2) 若椭圆的焦点关于直线 l 的对称点在单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上, 求椭圆的方程.