全国工程专业学位研究生教育国家级规划教材

张义民 编著 Zhang Yimin

机械振动（第2版）

Mechanical Vibrations (Second Edition)

清华大学出版社

内容简介

本书深入阐明了各种振动现象的物理机理以及分析振动问题的数学方法，主要介绍了机械振动力学的基本理论和方法，内容丰富，概念清晰，阐述详尽，系统性强。主要内容包括：单自由度系统的振动，两自由度系统的振动，多自由度系统的振动，连续系统的振动。并介绍了求解特征值问题和系统响应的近似方法及数值计算方法，简要叙述了非线性振动及随机振动的基本概念和理论。

本书可作为高等院校机械工程等学科的专业学位研究生和工学硕士研究生以及高年级本科生必修课的教材或参考书，也可作为相关学科研究人员和工程技术人员参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

机械振动/张义民编著. —2版. —北京：清华大学出版社，2019
（全国工程专业学位研究生教育国家级规划教材）
ISBN 978-7-302-52938-5

Ⅰ. ①机…　Ⅱ. ①张…　Ⅲ. ①机械振动－研究生－教材　Ⅳ. ①TH113.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第083570号

责任编辑：许　龙
封面设计：常雪影
责任校对：刘玉霞
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京国马印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　张**：18　　**字　　数**：435千字
版　　次：2007年3月第1版　2019年4月第2版　　**印　　次**：2019年4月第1次印刷
定　　价：49.80元

产品编号：074176-01

前言 FOREWORD

振动理论是现代许多科学技术领域的基础理论。现代工业对工程质量、产品精度及可靠性都提出了越来越高的要求，研究和解决工业工程中出现的各种振动问题已成为一项急迫的任务。在设计研制中，不仅要考虑静力效应，而且还要考虑动力效应。这样，振动理论也就必将成为广大科技人员必备的基础知识。机械振动课程对培养新时代的科技人才有着重要的作用和意义。

本教材符合机械工程研究生培养方案和教学大纲的要求，适用于机械工程研究生和高年级本科生的教学和学习。本教材由浅入深、理论严谨、结构合理、体例统一、文字精练，易于理解，数学概念与物理现象相协调，并且理论联系实际，具有广泛的适应性，便于学生更好地理解和掌握所学内容。本教材系统地介绍了工程实际中振动分析所需要的必备知识，详细阐述了振动理论的基本方法，在深入阐明各种振动现象的物理机理和数学分析的同时，也注意到了振动理论在机械和汽车等领域内的应用。全书共分 9 章，分别讨论了单自由度、多自由度、连续系统的特征值问题，及在各种类型激励作用下的稳态和瞬态响应分析，并介绍了振动分析的数值方法、非线性振动的定性和定量分析方法以及随机振动的基本知识。

本教材除了注重理论的系统性和完整性以外，还特别注意工程应用，力图把科研中的体会融入教学之中。本教材的主要特色为：

第一，本教材内容既系统又简明，既重视理论又强调实际，包括了现代振动工程中的基本精确与近似方法，便于有关工程技术人员阅读和作为工科院校研究生教材。

第二，本教材介绍了实用有效的数值分析方法，便于解决实际工程中的振动分析问题，这样会使学生学完之后，就可以将所学应用于解决一些实际问题。

第三，本教材包含工程实际中的多种机械和汽车模型的实例，便于培养出理论与实际相结合、把所学理论应用于实际以解决工程问题的科技人才。本教材的部分习题同样富有实用价值。

第四，本教材列举了具有工程实际背景的讨论题，并给出相应的解答，以便学生更好地理解和掌握所学内容。

读者只需具备高等数学、工程数学、理论力学与材料力学的基础知识，就可

以学习本教材。本教材可作为高等理工科院校机械工程研究生和高年级本科生的教学用书,也可作为有关科技人员的参考用书。

在本书撰写过程中,作者参考了一些国内外资料,限于篇幅,在参考文献目录中只列出其中的一部分。在此,谨向原作者、编者表示衷心感谢。

本书为全国工程专业学位研究生教育国家级规划教材。在编著过程中,得到了清华大学出版社大力支持,在本书第1版出版以后,清华大学、上海交通大学、华中科技大学、中国科学技术大学、同济大学、北京理工大学、山东大学、武汉大学、大连理工大学、北京师范大学、西北工业大学、电子科技大学、东北大学、北京科技大学、南京理工大学、北京工业大学、燕山大学、杭州电子科技大学、安徽大学、湖南科技大学、河南理工大学、沈阳工业大学、长春工业大学、河北科技大学、河北工程大学、重庆理工大学、扬州大学、昆明理工大学、北京联合大学、宁波大学等多所高等院校和研究院所采用本书作为“机械振动”课程教材,在此一并表示谢意。

限于水平,书中缺漏和不当之处在所难免,敬请读者不吝批评指正。

张义民

2017年12月于西子湖畔

目录 CONTENTS

第1章 绪论

1.1 机械振动

振动是在日常生活和工程实际中普遍存在的一种现象，也是整个力学中最重要的研究领域之一。事实上，人类就生活在振动的世界里，地面上的车辆、空中的飞行器、海洋中的船只等都在不断地振动着。房屋建筑、桥梁水坝等在受到激励后也会发生振动。就连茫茫的宇宙中，也到处存在着各种形式的振动，如风、雨、雷、电等随时间的不断变化，从广义的角度来理解，就是特殊形式的振动(或波动)，而电磁波不停地在以振动的方式发射和传播。就人类的身体来说，心脏的跳动、肺叶的摆动、血液的循环、胃的蠕动、脑电的波动、肌肉的搐动、耳膜的振动和声带的振动等，在某种意义上来说也是一种振动，就连组成人类自身的原子，也都在振动着。

所谓机械振动，是指物体(或物体系)在平衡位置(或平均位置)附近来回往复的运动。在机械振动过程中，表示物体运动特征的某些物理量(如位移、速度、加速度等)将时而增大、时而减小地反复变化。在工程实际中，机械振动是非常普遍的，钟表的摆动、车厢的晃动、桥梁与房屋的振动、飞行器与船舶的振动、机床与刀具的振动、各种动力机械的振动等，都是机械振动。

工程中有大量的振动问题需要人们研究、分析和处理，特别是近代机器结构正向大功率、高速度、高精度、轻型化、大型化和微型化等方向发展，振动问题也就越来越突出，因此掌握振动规律就显得十分重要了，也只有掌握了振动规律和特征以后，才能有效地利用振动有益的方面和限制振动有害的方面。众所周知，振动在日常生活和工程中会带来危害，例如，振动引起噪声污染，影响精密仪器设备的功能，降低机械加工的精度和光洁度，加剧构件的疲劳和磨损，缩短机器和结构物的使用寿命；机械振动还要消耗能量，降低机器效率；振动有时会使结构发生大变形而破坏，甚至造成灾难性的事故，有些桥梁就是由于振动而坍毁；机翼的颤振、机轮的摆振和航空发动机的异常振动，曾多次造成飞行事故；飞机和车船的振动恶化了乘载条件；地震、暴雨、台风等造成巨大的经济损失等。然而，振动也可以用来为人类服务，例如，利用钟摆振动原理制造钟表；工程实际中数以万计的振动机器和振动仪器可以完成许多不同的工艺过程，如给料、上料、输送、筛分、布料、烘干、冷却、脱水、选分、破碎、粉磨、光饰、落砂、成型、整形、振捣、夯土、压路、摊铺、钻挖、装载、振仓、犁土、沉桩、拔桩、清理、捆绑、采油、时效、切削、检桩、检测、勘探、测试、诊断等，这些机器和仪器包括振动给料机、振动输送机、振动整形机、振动筛选机、振动脱水机、振动干燥机、振动冷却机、振动冷冻机、振

动破碎机、振动球磨机、振动光饰机、振动压路机、振动摊铺机、振动夯土机、振动沉/拔桩机、振动造型机、振动采油机、海浪发电机、各种形式的振捣器和激振器等,它们极大地改善了劳动条件,甚至成百倍地提高了劳动生产率;人们可以根据逐年气象要素统计得出的气象波动的规律,预估某一年度的气象要素;人们可以利用潮汐的周期性振动,预报重大灾难的来临、开发能源、保护环境、排涝灌溉、安排航运、建设海港和防护海岸等;人们可以利用树木年轮中一疏一密的波动变化,进行地质考古、环境污染、森林更新、自然灾害、冰川进退、医疗卫生、农牧业产量预测等方面的研究;美妙动听的音乐(包括人声)也是源于振动而产生出来的。可见研究和掌握振动规律有着十分重要的意义,可以使人们能更好地利用振动有益的一面,而减少有害的一面。随着生产实践和科学研究的不断进展,人们对振动过程的认识将愈益深化,机械振动的利用将会更加广泛,我们的许多关于振动利用的畅想,会逐步地变为现实,并造福人类。

1.2 振动系统模型

模型就是将实际事物抽象化而得到的表达。例如,力学中的质点、刚体、梁、板、壳、质量-弹簧系统等都是模型。振动系统模型按系统的不同性质可分为离散系统与连续系统、常参数系统与变参数系统、线性系统与非线性系统、确定系统与随机系统等。

1. 离散系统与连续系统

离散系统是由集中参数元件组成的,基本的集中参数元件有三种:质量、弹簧与阻尼。

(1) 质量(包括转动惯量)模型只具有惯性。

(2) 弹簧模型只具有弹性,其本身质量一般可以略去不计。

(3) 阻尼模型既不具有弹性,也不具有惯性。它是耗能元件,在相对运动中产生阻力。

离散系统的运动在数学上用常微分方程来描述。

连续系统是由弹性体元件组成的。典型的弹性体元件有杆、梁、轴、板、壳等。弹性体的惯性、弹性与阻尼是连续分布的,故亦称为分布参数系统。

连续系统的运动在数学上用偏微分方程来描述。

2. 常参数系统与变参数系统

如果一个振动系统的各个特性参数(如质量、刚度、阻尼系数等)都不随时间而变化,即它们不是时间的函数,这个系统就称为常参数系统(或不变系统)。反之,称为变参数系统(或参变系统)。

常参数系统的运动用常系数微分方程来描述,而变参数系统则需要用变系数微分方程来描述。

3. 线性系统与非线性系统

如果一个振动系统的质量不随运动参数(如坐标、速度、加速度等)而变化,而且系统的弹性力和阻尼力都可以简化为线性模型(①弹性力和变形的一次方成正比;②阻尼力与速度的一次方成正比),则称为线性系统。凡是不能简化为线性系统的振动系统都称为非线性系统。

线性系统的运动用线性微分方程来描述,而非线性系统则需要用非线性微分方程来描述。

4. 确定系统与随机系统

确定系统的系统特性可用时间的确定函数给出。随机系统的系统特性不能用时间的确定函数给出,只具有概率统计规律性。

确定系统的运动用确定微分方程来描述,而随机系统则需要用随机微分方程来描述。

一个实际系统究竟应该采用哪一种简化模型,应该根据具体情况进行具体分析。而分析简化模型的正确与否,必须经过科学实验或生产实践的检验。

1.3 激励与响应

一个实际振动系统,在外界振动激励的作用下,会呈现一定的振动响应。这种激励就是系统的输入,响应就是输出,二者由系统的振动特性联系(图 1.3-1)。

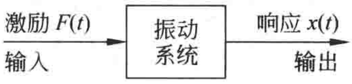

图 1.3-1

系统激励可分为两大类:

(1) 确定激励

可以用时间的确定函数来描述的激励属于确定激励。脉冲函数、阶跃函数、周期函数、简谐函数等都是典型的确定函数。

(2) 随机激励

随机激励不能用时间的确定函数来描述,但它们具有一定的概率统计规律性,因而可以用随机过程来描述。

系统响应同样可以分为两大类:

(1) 确定响应

系统的响应是时间的确定函数,这样的振动响应称为确定响应。

① 根据响应存在时间分为瞬态响应和稳态响应。瞬态振动的响应在较短的时间内会逐渐消失;稳态振动的响应可持续充分长时间。

② 根据响应是否有周期性还可分为简谐响应、周期响应、非周期响应和混沌。简谐振动的响应为时间的正弦或余弦函数;周期振动的响应为时间的周期函数;非周期振动的响应可以认为是若干脉冲响应的总和;混沌(chaos)振动的响应为时间的始终有限的非周期函

数。“混沌”是应用于过去40年内数学和自然界大量非线性系统中观察到的非周期、不规则、错综复杂、不能预计和随机等行为的用语。

(2) 随机响应

系统的响应为时间的随机函数,只能用概率统计的方法描述,这样的振动响应称为随机响应。无论是确定系统,还是随机系统,在随机激励的作用下,振动系统的响应一定为随机响应。如果是随机系统,即使在确定激励的作用下,系统的响应也是随机的。

1.4 振动的分类

根据研究侧重点的不同,可以从不同角度对振动进行分类。振动现象按系统相应的性质可分为确定振动与随机振动两大类。

(1) 对于一个确定系统(不论它是常参数系统,还是变参数系统),在受到确定激励作用时,响应也是确定的,这类振动称为确定振动。

(2) 对于确定系统,在受到随机激励作用时,系统的响应是随机的,这类振动称为随机振动。随机振动只能用概率统计的方法描述。

对于随机结构系统来说,无论是受到确定激励,还是随机激励作用,其响应均为随机的,这类振动称为随机结构(系统)振动。

此外,还可以按激励的控制方式分类如下:

(1) 自由振动:系统受初始激励作用后不再受外界激励作用的振动。它一般指的是弹性系统偏离平衡状态以后,不再受外界激励作用的情形下所发生的振动。

(2) 强迫振动:系统在外界控制的激励作用下的振动。它指的是弹性系统在受外界控制的激励作用下发生的振动。此时,即使振动被完全抑制,激励照样存在。

(3) 自激振动:系统在自身控制的激励作用下的振动。它指的是激励受系统振动本身控制的振动,在适当的反馈作用下,系统会自动地激起定幅振动,但一旦振动被抑制,激励也就随之消失。

(4) 参激振动:系统自身参数变化激发的振动。这种激励方式是通过周期地或随机地改变系统的特性参数来实现的。

1.5 振动问题及其解决方法

1. 振动问题

不论是确定的还是随机的振动问题,一般来说,无非是在激励、响应以及系统特性三者之中已知二者求第三者。

(1) 在激励条件与系统特性已知的情形下,求系统的响应,就是所谓振动分析。

(2) 在激励与响应均为已知的情形下,来确定系统的特性,就是所谓振动特性测定或系统识别。

(3) 在一定的激励条件下,如何来设计系统的特性,使得系统的响应满足指定的条件,这就是所谓振动综合或振动设计。

(4) 在系统特性和响应已知的情形下,求激励,即判别系统的环境特性,就是所谓振动环境预测。

实际的振动问题往往是错综复杂的,它可能同时包含分析、识别、测定、综合、设计、预测等几个方面的问题。通常,将实际问题抽象成为力学模型,实质上就是一个系统识别的问题,进而针对系统模型列式求解的过程,实质上就是振动分析的过程。而分析并不是问题的终结,分析的结果还必须用于改进设计或者排除故障(实在的或潜在的),这就是振动设计或综合的问题。

2. 解决振动问题的方法

解决振动问题的方法,不外乎是理论分析方法与实验研究方法,二者是相辅相成的。在大量实践和科学实验基础上建立起来的理论,反过来对实践起一定的指导作用。而从理论分析得到的每一个结论都必须通过实验的验证,并经受实践的检验,才能确定它是否正确。在振动问题的理论分析中大量地应用了数学工具,特别是计算机与计算技术的日益发展为解决复杂振动问题提供了有力的工具。

1.6 自由度

确定一个振动系统空间位置所需要的独立坐标的个数,称为振动系统的自由度。

例如,图 1.6-1 所示的系统,只需要用一个独立坐标就可以完全确定振动系统的位置,所以称它们为单自由度系统。图 1.6-1(a)用偏离平衡位置的坐标 x,图 1.6-1(b)用在铅垂平面内单摆摆动的偏角 θ,图 1.6-1(c)用绕定轴作扭振的扭摆的摆角 φ。

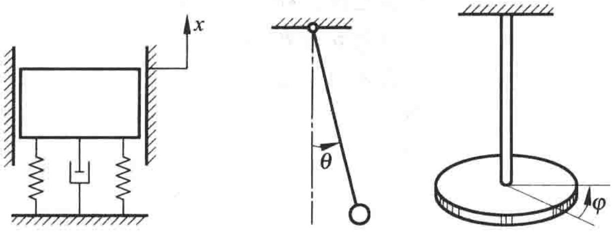

图 1.6-1

图 1.6-2 给出了两自由度的几个例子:图 1.6-2(a)假定其中的质量 A,B 只能沿直线平

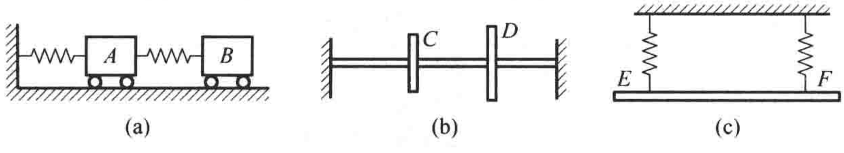

图 1.6-2

动;图 1.6-2(b)圆盘 C,D 只能绕固定轴转动;图 1.6-2(c)刚杆 EF 限于在一个铅垂平面内运动,且其重心限于沿铅垂线运动。确定这些振动系统的空间位置,各需要两个独立坐标。

弹性连续体可以看作由无数质点组成,各个质点之间有着弹性连接,只要满足连续性条件,各个质点的任何微小位移都是可能的。因此,一个弹性连续体有无限多个自由度。

1.7 单位

国际单位制(SI)包括:①7 个明确定义的基本单位;②派生单位;③补充单位。基本单位在量纲上是独立的,如表 1.7-1 所示。一些基本单位按代数关系连在一起组成的单位称为派生单位。不少派生单位具有专门的名称和符号,如表 1.7-2 所示。补充单位构成第三组 SI 单位,如表 1.7-3 所示。

表 1.7-1 SI 基本单位举例

量	单位名称	单位符号	说明
长度(length)	米	m	用氪(krypton)-86 灯的波长来定义:1 米长度等于氪-86 原子在能级 $2p_{10}$ 和 $5d_5$ 间转变时的真空辐射波长的 1 650 763.73 倍
质量(mass)	千克	kg	其标准原器是一个铂-铱(platinum-iridium)圆柱体。藏于法国 Sévres 地方的地下室内
时间(time)	秒	s	由原子共振频率来定义:1 秒等于铯(cesium)-133 原子在基态的两个超精细能级间跃迁时辐射波的 9 192 631 770 个周期的时间

表 1.7-2 SI 派生单位举例

量	单位名称	单位符号	用基本单位表示
面积(area)	平方米	m^2	
体积(volume)	立方米	m^3	
速度(velocity)	米每秒	m/s	
加速度(acceleration)	米每二次方秒	m/s^2	
密度(质量密度)(mass density)	千克每立方米	kg/m^3	
比容(specific volume)	立方米每千克	m^3/kg	
频率(frequency)	赫[兹]	Hz	s^{-1}
力(force)	牛[顿]	N	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
应力(stress)	帕[斯卡]	Pa	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
能量、功(energy、work)	焦[耳]	J	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
功率(power)	瓦[特]	W	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
力矩(moment of force)	牛[顿]·米	N·m	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$

表 1.7-3 SI 补充单位举例

量	单位名称	单位符号
平面角(plane angle)	弧度	rad
角速度(angular velocity)	弧度每秒	rad/s
角加速度(angular acceleration)	弧度每二次方秒	rad/s^2

CHAPTER

第2章 单自由度系统的自由振动

任何具有质量和弹性的系统都能产生振动，若不外加激励的作用，振动系统对初始激励的响应，通常称为自由振动。自由振动是没有外界能量补充的振动。保守系统在自由振动过程中，由于总机械能守恒，动能和势能相互转换而维持等幅振动，称为无阻尼自由振动。但实际系统不可避免存在阻尼因素，由于机械能的耗散，使自由振动不能维持等幅而趋于衰减，称为有阻尼自由振动。某些实际的机械或结构系统的振动问题有时可以简化为单自由度系统的振动，本章只讨论最简单的振动系统，即单自由度系统的自由振动。以质量-弹簧系统为简化的力学模型。所讨论系统的动力学方程为常系数线性微分方程。系统的无阻尼振动频率为系统固有的物理参数，称为固有频率，振幅取决于初始扰动的大小。阻尼振动的固有频率小于无阻尼情形。临界阻尼和大阻尼条件下的系统作非往复的衰减运动。

2.1 简谐振动

最简单的单自由度振动系统就是一个弹簧连接一个质量的系统，如图 2.1-1 所示的质量-弹簧系统。在光滑的水平面上，质量为 m 的物体用不计重量的弹簧连至定点 D，弹簧原长为 l_0，轴线成水平。沿弹簧轴线取坐标轴 x，以弹簧不受力时的右端位置 O 为原点，向右为正。假定物体只限于沿坐标轴 x 进行直线运动，则物体在任一瞬时的位置可以由坐标 x 完全确定，所以系统是单自由度系统。

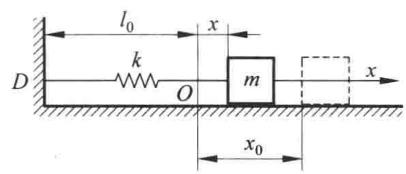

图 2.1-1

作用于物体上的力，除重力与光滑水平面的反力互相抵消外，只有弹簧力。在原点 O，弹簧力等于零，这是物体的静平衡位置。当物体从该位置偏离 x 时，设在原点 O 的右侧，x 为正值，弹簧受拉伸，它作用于物体的力水平向左；设在原点 O 的左侧，x 为负值，弹簧受压缩，它作用于物体的力水平向右。可见弹簧力总是指向原点 O，力图使物体回到静平衡位置，这种力称为恢复力。

假设把物体从位置 O 向右拉至距离 x_0 后静止地放开，物体将在弹簧力的作用下向左加速运动；回到位置 O 时，弹簧力变为零，但物体具有速度，由于惯性将继续向左运动；越过原点 O 后，弹簧力使物体减速，直到速度等于零，此时弹簧力又使物体向右运动。这样物体将在平衡位置附近进行往复运动。在没有阻尼的理想条件下，这种运动一经开始，就会无限期地持续进行，永不停止。

令 k 表示弹簧的刚度系数，即弹簧发生单位变形时所受的力，k 的单位取为 N/m。在一般工程问题中，系数 k 可以视为常数，因而弹性力与弹簧的变形成正比(在弹性范围内)。

设在某一瞬时 t，物体的位移为 x，则弹簧作用于物体的力为 $-kx$，以 $\dot{x}$ 和 $\ddot{x}$ 分别表示物体的速度与加速度。由牛顿定律，有

$$m\ddot{x} = -kx \tag{2.1-1}$$

引入参数

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.1-2}$$

式中，$\omega_n = \sqrt{k/m}$ 为系统的固有频率。方程(2.1-1)改写为

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{2.1-3}$$

这是二阶常系数线性齐次常微分方程。容易证明方程(2.1-3)的解具有下面的一般形式：

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t \tag{2.1-4}$$

式中，A_1 和 A_2 为取决于初始位置 $x_0 = x(0)$ 和初始速度 $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$ 的积分常数。为了方便起见，引入符号

$$① \ A_1 = A\cos\phi, \quad A_2 = A\sin\phi$$

或

$$② \ A_1 = A\sin\varphi, \quad A_2 = A\cos\varphi \tag{2.1-5}$$

从而得出

$$① \ A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad \phi = \arctan\frac{A_2}{A_1}$$

或

$$② \ A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad \varphi = \arctan\frac{A_1}{A_2} \tag{2.1-6}$$

将式(2.1-6)代入式(2.1-4)，并用三角关系式① $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta)$，② $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha + \beta)$，其解可以改写为

$$① \ x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi) \quad 或 \quad ② \ x(t) = A\sin(\omega_n t + \varphi) \tag{2.1-7}$$

式中，常数 A 和 φ ($\phi = \pi/2 - \varphi$) 分别称为振幅和相角。因为 A 和 φ 取决于 A_1 和 A_2，所以它们也是取决于初始条件 x_0 和 $\dot{x}_0$ 的积分常数。方程(2.1-7)说明该系统以固有频率 ω_n 作简谐振动。凡是位移可以按时间的正弦函数(或余弦函数)所作的振动，都称为简谐振动。

利用图 2.1-2 中的矢量图进一步讨论谐波振动的性质。

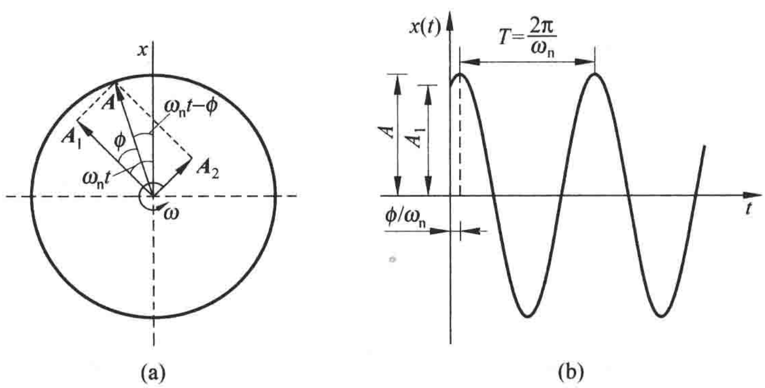

图 2.1-2

如图 2.1-2(a)所示，如果 $\boldsymbol{A}$ 代表大小为 A 的矢量，而且它与垂直轴 x 的夹角为 $\omega_n t-\phi$（或 $\omega_n t+\varphi$），那么矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 x 轴上的投影就表示解① $x(t)=A\cos(\omega_n t-\phi)$，② $x(t)=A\sin(\omega_n t+\varphi)$。当 $\omega_n t-\phi$（或 $\omega_n t+\varphi$）角随时间线性增大时，意味着整个图形以角速度 ω_n 按逆时针方向转动。当图形转动时，其投影成谐波变化，所以每当矢量 $\boldsymbol{A}$ 扫过 2π 角，运动就会出现重复。

振动重复一次所需要的时间间隔称为振动周期 T。在简谐振动的情况下，每经过一个周期，相位就增加 2π，因此$[\omega_n(t+T)+\varphi]-(\omega_n t+\varphi)=2\pi$，故有

$$T=\frac{2\pi}{\omega_n} \tag{2.1-8}$$

实际上，T 代表发生一次完整运动所需要的时间，周期通常以 s 计。在单位时间内振动重复的次数，称为振动频率 f，有

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega_n}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.1-9}$$

频率的单位为次/s，称为 Hz。

物体偏离平衡状态后，在恢复力作用下进行的振动即自由振动。固有频率就是振动系统自由振动时的圆频率。

用初始条件来表示二阶常系数线性齐次常微分方程的积分常数。设在初瞬时 $t=0$，物体有初位移 $x=x_0$ 与初速度 $\dot{x}=\dot{x}_0$，则代入式(2.1-4)及其一阶导数，不难证明振动系统对初始条件 x_0，$\dot{x}_0$ 的响应为

$$x(t)=x_0\cos\omega_n t+\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t \tag{2.1-10}$$

比较方程(2.1-4)和式(2.1-10)，并利用方程(2.1-6)可以得到振幅 A 和相角 φ 的值。

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2},\quad ①\ \phi=\arctan\frac{\dot{x}_0}{\omega_n x_0}\quad 或\quad ②\ \varphi=\arctan\frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0} \tag{2.1-11}$$

由前述可知，简谐振动的振幅与初相角，随初始条件的不同而改变；而振动频率和周期，则唯一地决定于振动系统参数，与初始条件无关，它们是振动系统的固有特征。

以上分析了物体沿水平方向进行的振动，物体在静平衡位置时，弹簧无变形。现在来看由弹簧悬挂的物体(图 2.1-3)沿铅垂方向的振动。

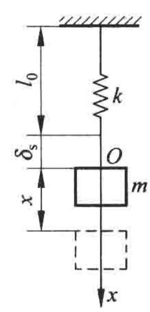

图　2.1-3

当振动系统为静平衡时，弹簧在重力 mg 的作用下将有静伸长

$$\delta_s=\frac{mg}{k} \tag{2.1-12}$$

取铅垂坐标轴 x，以静平衡位置为原点 O，向下为正，在物体从静平衡位置离开 x 时，弹簧将有伸长 δ_s+x（其中 x 是代数值，向下为正，向上为负），它作用于物体的力等于 $-k(\delta_s+x)$。在重力与弹簧力的作用下，物体的运动微分方程为

$$m\ddot{x}=mg-k(\delta_s+x) \tag{2.1-13}$$

因为 $mg=k\delta_s$，上式仍可简化为 $m\ddot{x}=-kx$，即式(2.1-1)。可见前面关于物体沿光滑平面运动的讨论，同样适用于对物体沿铅垂方向的振动，只要取物体的静平衡位置为坐标原点。