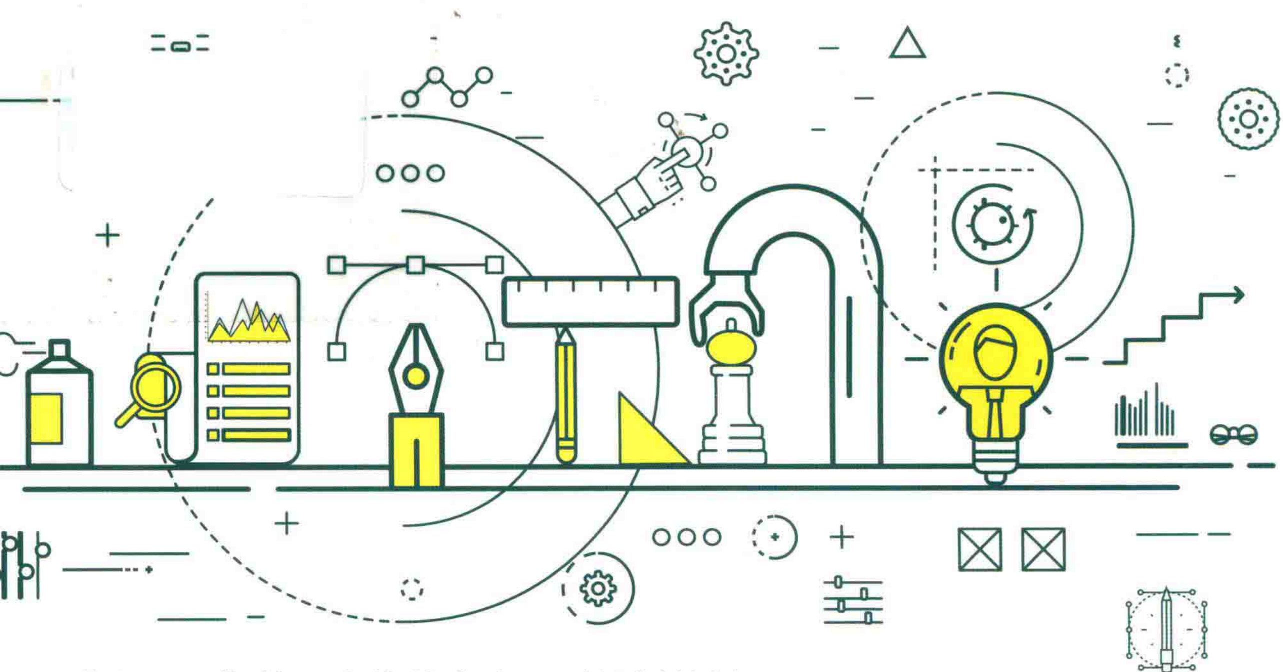


“十三五”普通高等教育应用型规划教材

Linear Algebra

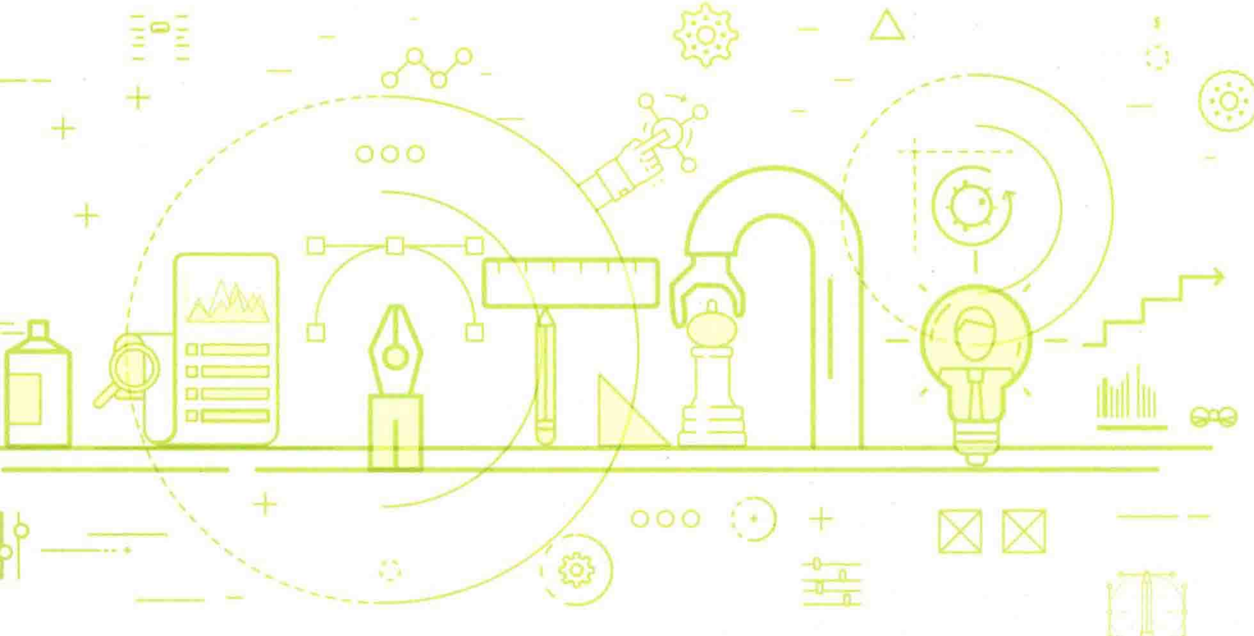
线性代数

四川大学数学学院

谭友军　杨　亮　徐友才　编

扫码下资源

中国人民大学出版社



“十三五”普通高等教育应用型规划教材

- 高等数学
- 微积分
- **线性代数**
- 概率论与数理统计
- 数学软件与数学实验
- Excel在经济管理中的应用
- 大学数学应用案例及分析

配套数字资源服务

登录网站：www.1kao.cn/math，或扫描封面二维码关注微信公众号。

技术支持

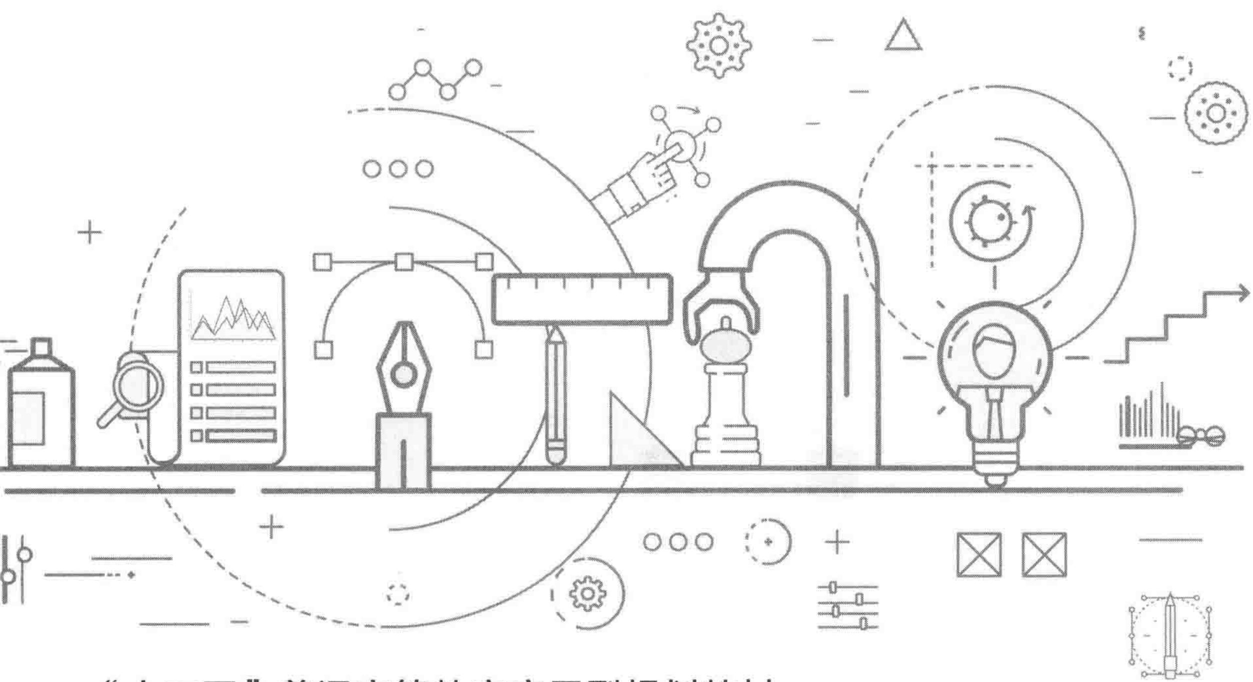
电话：010-62510326，邮箱：econapp@rucdigit.com

如果您想了解有关数学方面的图书信息，请登录人大社网站：www.crup.com.cn

策划编辑　李丽娜
责任编辑　王美玲
装帧设计

ISBN 978-7-300-26898-9

定价：36.00元



“十三五”普通高等教育应用型规划教材

Linear Algebra

线性代数

四川大学数学学院

谭友军 杨 亮 徐友才 编

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/谭友军，杨亮，徐友才编．—北京：中国人民大学出版社，2019.4
“十三五”普通高等教育应用型规划教材
ISBN 978-7-300-26898-9

Ⅰ.①线… Ⅱ.①谭… ②杨… ③徐… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 067907 号

“十三五”普通高等教育应用型规划教材
线性代数
谭友军　杨　亮　徐友才　编
Xianxing Daishu

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京七色印务有限公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本	**版　　次**	2019 年 4 月第 1 版
印　　张	16.5	**印　　次**	2019 年 4 月第 1 次印刷
字　　数	347 000	**定　　价**	36.00 元

前言

线性代数源于对线性方程组的研究，是大学数学的重要组成部分，在众多领域中有广泛的应用. 本书介绍线性代数的基本概念和基本结论，主要包括线性方程组、向量、矩阵与行列式、矩阵的相似、内积、正交阵以及二次型. 各节配有习题，并加入了习题课教学内容，包括知识点小结、习题解答和补充例题，可作为非数学类各专业的线性代数教材或复习应考的参考书.

在内容安排上，我们尽量避免单一的“定义—引理—命题（定理）—推论—例题”的模式. 在概念和结论的引入之前，一般先用例子或者设置启发性问题来说明相关背景，充分体现了从特殊到一般的原则. 例如，在讨论线性方程组解的存在性时，我们先讨论阶梯形方程组的情形. 又例如，在介绍矩阵的相似、特征向量和特征值这些概念之前，我们先讨论具体的矩阵计算问题，而不是抽象地直接给出定义. 再例如，在讨论矩阵的合同关系时，我们先讨论对角阵的情形. 对一些较为复杂的证明我们通常也是通过具体的例子来说明其思路，而不仅仅是叙述证明过程.

为了帮助读者在学习线性代数时积极参与问题的讨论，从而提高学习的主动性和自主性，在版面上我们采用了大量的边注和脚注，并且预留边空，以方便读者写自己的注记；在讨论问题的过程中，我们尽量对上下文所涉及的概念、结论给出详细的交叉引用，以方便读者查阅、理解和记忆.

本书各节都给出了大量例子. 这些例子中，有的本身就是有用的结论，有的是为继续讨论而设置的问题. 在配置习题时，我们尽量避免不必要的重复练习. 绝大多数习题属于新编习题. 我们设置了大量的辨别是非题，目的是加深读者对概念和结论的理解. 为了帮助读者提高学习效率和方便习题课教学，我们简明扼要地给出各章节中基本概念、基本结论和基本计算的知识点小结，对习题给出了详细的解答（我们强烈建议读者自己先独立思考、完成这些习题，然后把这些解答作为参考）. 在最后一章中我们还适当补充了一些例题，其中绝大多数例题是往年的硕士研究生入学试题，以方便读者复习应考. 借此机会我们真诚感

谢命题老师，并且，如果有引用不当的地方，敬请批评指正.

为了帮助读者理解、记忆基本概念和结论，我们对线性代数中绝大多数计算问题都总结了算法，例如，用高斯消元法解线性方程组、矩阵的对角化问题等. 值得注意的是，这些算法只是解决计算问题的一般算法，通常不是唯一算法.

对于书中的不妥之处，敬请读者批评指正.

本书由徐友才（执笔第 1 章）、谭友军（执笔第 2 章、第 3 章和第 4 章）、杨亮（执笔第 5 章和第 6 章）共同编写，谭友军统稿. 感谢四川大学数学学院和中国人民大学出版社编辑的大力支持，感谢家人对我们工作的支持.

编者

2019 年 2 月

目　录

第1章　线性方程组

线性方程组是线性代数的主要研究对象之一，在众多领域中有广泛应用. 关于线性方程组的两个基本问题是：如何判断方程组有解？如果方程组有解，如何求出它的所有解？对任意线性方程组，这两个问题有完整的解答. 高斯消元法是解线性方程组的一个重要方法. 在本章里，我们介绍如何用高斯消元法来判断线性方程解的存在情况，并在此基础上引入矩阵的初等变换等重要概念.

§1.1　基本概念、阶梯形方程组

很多实际问题可以通过设一个或多个未知数建立方程或方程组来解决①.

一般的 n 元线性方程具有形式：$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$，其中，$a_1$，…，$a_n$，$b$ 是已知的.

例1.1.1　(1) $2x_1-3x_2+x_3=1$ 是一个 3 元线性方程；

(2) $\sqrt{x_1}+x_2^2-5x_3=0$ 不是线性方程.

定义1.1.1　由若干个 n 元线性方程组成的方程组称为一个 n 元线性方程组.

例1.1.2

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1 \\ x_2+x_3=5 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

① 在本书中，通常用 x_1，…，x_n 来表示未知数；在第 5 章中又用 x_1，…，x_n 表示函数的自变量.

是一个 3 元线性方程组，而

$$\begin{cases} x_1=0 \\ x_1-x_2+x_3+x_4=5-x_5 \\ x_2+x_3-x_4=2x_5-3 \end{cases} \tag{1.1.2}$$

是一个 5 元线性方程组.

一般地，为讨论问题的方便起见，通常把 n 元线性方程组写成如下标准形式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}. \tag{1.1.3}$$

注1.1.1 在本书中，如果没有其他说明，线性方程组指的都是形如式（1.1.3）的线性方程组.

例如，线性方程组（1.1.2）应该写为：

$$\begin{cases} x_1=0 \\ x_1-x_2+x_3+x_4+x_5=5 \\ x_2+x_3-x_4-2x_5=-3 \end{cases} \tag{1.1.4}$$

方程的个数 m 不一定等于未知数的个数 n.

对于线性方程组，下面的术语是很常用的.

定义1.1.2 (1) 在线性方程组（1.1.3）中，称 m 为方程的个数，n 为未知数的个数；称 a_{ij} 为系数，b_i 为常数项.

(2) 如果 n 个数 c_i 满足：当 $x_i=c_i$ 时，方程组（1.1.3）中每个方程的左边得到的数等于右边的常数项，则称 $\begin{cases} x_1=c_1 \\ x_2=c_2 \\ \cdots\cdots \\ x_n=c_n \end{cases}$ 是方程组（1.1.3）的一个解. 在本书中，方程组（1.1.3）的解通常简写为[①] $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

线性方程组的解是一个列向量. 关于向量的概念参见第 2 章.

解集（如果不是空集）是由某些向量组成的集合.

(3) 方程组（1.1.3）的全部解构成的集合称为它的解集；如果两个线性方程组的解集相同，则称这两个线性方程组同解或等价.

注1.1.2 方程组（1.1.3）中的每个方程都可以看成是由一个方程组成的方程组. 因此，方程组（1.1.3）的解集是每个方程的解集的

① 也可以把线性方程组（1.1.3）的解写成“行”的形式：$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$. 我们把线性方程组的解写成“列”的形式，是为了可以方便地利用矩阵的语言来讨论线性方程组.

交集.

例1.1.3 考虑线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=1 \\ x_1+x_2+2x_3=2 \\ 2x_1+2x_2+4x_3=3 \end{cases}$. 由于不存在数 c_1, c_2, c_3 使得当 $\begin{cases} x_1=c_1 \\ x_2=c_2 \\ x_3=c_3 \end{cases}$ 时第二个方程和第三个方程同时成立，所以，该方程组无解.

如果系数为1，则不写系数；$-2x_2$ 表示 x_2 前的系数为 -2.

例1.1.4 考虑线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+4x_3=1 \\ x_2-4x_3=0 \\ -x_3=2 \end{cases}$. 由第三个方程我们得到 $x_3=-2$，从而由第二个方程得到 $x_2=-8$，最后由第一个方程得到 $x_1=17$. 因此，该方程组有且仅有一个解：$\begin{cases} x_1=17 \\ x_2=-8 \\ x_3=-2 \end{cases}$.

在线性方程组中，系数为0的未知项不用写出来.

例1.1.5 考虑线性方程组 $x_1+3x_2+4x_3=0$. 直接验证可得 $\begin{cases} x_1=4 \\ x_2=0 \\ x_3=-1 \end{cases}$ 是它的一个解.

这是一个方程个数为1的线性方程组.

进一步，设 $x_2=t_1$，$x_3=t_2$，其中 t_1，t_2 是任意数，则可以直接验证 $\begin{cases} x_1=-3t_1-4t_2 \\ x_2=t_1 \\ x_3=t_2 \end{cases}$ 也是它的解. 因此，这个方程组有无穷多个解.

值得注意的是，如果设 $x_1=k_1$，$x_2=k_2$，其中，k_1，k_2 是任意数，则可以直接验证 $\begin{cases} x_1=k_1 \\ x_2=k_2 \\ x_3=-\dfrac{1}{4}k_1-\dfrac{3}{4}k_2 \end{cases}$ 也是解.

这里得到了表面上看起来不一样的解的表达式. 在第2章里我们将解释这种现象. 参见注2.4.1和例2.4.4.

下面的术语是很重要的.

定义1.1.3 如果方程组（1.1.3）的常数项全为零，则称方程组（1.1.3）是一个齐次线性方程组；否则，称之为一个非齐次线性方程组. 即齐次线性方程组的标准形式为：

线性方程组可以分为两类：齐次的和非齐次的.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}. \tag{1.1.5}$$

关于齐次线性方程组，我们有如下重要结论：

这个命题说的是齐次线性方程组的解集具有线性性质.

命题1.1.1 (1) $\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\\cdots\cdots\\x_n=0\end{cases}$ 是齐次线性方程组（1.1.5）的解，称为零解[①]；

(2) 设 $\begin{cases}x_1=c_1\\x_2=c_2\\\cdots\cdots\\x_n=c_n\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x_1=d_1\\x_2=d_2\\\cdots\cdots\\x_n=d_n\end{cases}$ 都是齐次线性方程组（1.1.5）的解，则 $\begin{cases}x_1=c_1+d_1\\x_2=c_2+d_2\\\cdots\cdots\\x_n=c_n+d_n\end{cases}$ 也是齐次线性方程组（1.1.5）的解；

(3) 设 $\begin{cases}x_1=c_1\\x_2=c_2\\\cdots\cdots\\x_n=c_n\end{cases}$ 是齐次线性方程组（1.1.5）的解，则对任意数 t，$\begin{cases}x_1=tc_1\\x_2=tc_2\\\cdots\cdots\\x_n=tc_n\end{cases}$ 也是齐次线性方程组（1.1.5）的解.

证明：(1) 把 $x_i=0$ 代入方程组（1.1.5）中的每个方程，得到 $0=0$，所以结论成立.

(2) 对于方程组（1.1.5）中的每个方程有：

$$a_{i1}c_1+a_{i2}c_2+\cdots+a_{in}c_n=0,$$
$$a_{i1}d_1+a_{i2}d_2+\cdots+a_{in}d_n=0.$$

相加即得：

$$a_{i1}(c_1+d_1)+a_{i2}(c_2+d_2)+\cdots+a_{in}(c_n+d_n)=0,$$

所以结论成立.

在本书中，通常用□表示证明完毕或解答完毕.

(3) 类似于（2）的证明. □

由命题 1.1.1 可知，齐次线性方程组总是有解，因为它至少有零解；所以，我们有如下推论.

推论1.1.1 任意齐次线性方程组（1.1.5）只能是以下两种情形之一：

---

① 如果齐次方程组还有除零解以外的其他解，则称其他解为非零解.

(i) 只有零解；

(ii) 有非零解. 此时，有无穷多个解.

如果一个方程组类似于例 1.1.4 中给出的线性方程组，那么它是否有解是容易判断的. 我们有如下定义.

定义1.1.4　如果一个线性方程组满足如下两个条件：

• 系数全为 0 的方程（如果有的话）全部位于系数不全为 0 的方程的下方，

• 在所有系数不全为 0 的方程中，每个方程的第一个不为 0 的系数对应的未知数的下标是严格递增的，

则称该线性方程组是一个阶梯形方程组.

特别地，在一个阶梯形方程组中，每个系数不全为 0 的方程的第一个不为 0 的系数的下方的系数都为 0.

为叙述方便起见，我们引入如下术语.

定义1.1.5　称系数全为 0 而常数项不为 0 的线性方程为矛盾方程.

注1.1.3　任意含有矛盾方程的线性方程组都没有解. 不含矛盾方程的方程组也可能无解（参见前面的例 1.1.3). 齐次线性方程组不含矛盾方程.

例1.1.6　线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=5 \\ 2x_3=7 \\ 0=9 \end{cases} \tag{1.1.6}$$

是一个阶梯形方程组. 由于该方程组含有矛盾方程，所以，它没有解.

例1.1.7　线性方程组

$$\begin{cases} x_1-5x_2+x_3-3x_4=6 \\ -2x_3+x_4=3 \\ 0=0 \end{cases} \tag{1.1.7}$$

是一个阶梯形方程组；线性方程组

$$\begin{cases} x_2=7 \\ x_1+x_3=6 \\ x_3=-1 \end{cases} \tag{1.1.8}$$

和

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2 \\ x_2+5x_3=-2 \\ -3x_2-15x_3=8 \\ 0=0 \end{cases} \tag{1.1.9}$$

都不是阶梯形方程组.

对于阶梯形方程组，下面的术语是常用的.

这些概念是针对阶梯形方程组而言的.

定义1.1.6 在一个阶梯形方程组中，系数不全为 0 的方程的第一个不为 0 的系数称为主元；主元所对应的未知数称为约束变量，其余变量称为自由变量.

比阶梯形方程组形式更简单的是如下定义给出的方程组.[①]

主元上方的系数为 0；不是主元的系数其上方的系数不一定为 0.

定义1.1.7 如果一个阶梯形方程组的主元都是 1，且主元上方的系数都是 0，则称该阶梯形方程组是一个行简化阶梯形方程组.

例1.1.8 线性方程组

$$\begin{cases} x_1-5x_2-\dfrac{5}{2}x_4=\dfrac{15}{2} \\ x_3-\dfrac{1}{2}x_4=-\dfrac{3}{2} \\ 0=0 \end{cases} \tag{1.1.10}$$

是一个行简化阶梯形方程组，主元的个数是 2，小于未知数的个数 4，约束变量是 x_1 和 x_3，自由变量是 x_2 和 x_4.

对于行简化阶梯形方程组，可以直接把约束变量用自由变量表示出来. 例如，由方程组（1.1.10）即得

移项！方程 $0=0$ 可以省略.

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{15}{2}+5x_2+\dfrac{5}{2}x_4 \\ x_3=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}x_4 \end{cases}. \tag{1.1.11}$$

设自由变量的值为 $\begin{cases} x_2=t_1 \\ x_4=t_2 \end{cases}$，其中 t_1，t_2 是任意数，代入方程组（1.1.11），就得到线性方程组（1.1.10）的解

方程组（1.1.10）是否还有别的解？参见例 2.4.12.

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{15}{2}+5t_1+\dfrac{5}{2}t_2 \\ x_2=t_1 \\ x_3=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}t_2 \\ x_4=t_2 \end{cases},$$

因此，线性方程组（1.1.10）有无穷多个解.

例1.1.9 线性方程组

① 也可以把行简化阶梯形方程组称为行最简方程组.

$$\begin{cases}x_1=3\\x_2=6\\x_3=7\\0=0\end{cases}\tag{1.1.12}$$

是一个行简化阶梯形方程组，且主元的个数是 3，等于未知数的个数. 易见，该方程组有且仅有一个解：$\begin{cases}x_1=3\\x_2=6\\x_3=7\end{cases}$.

例1.1.10 线性方程组

$$\begin{cases}x_1+3x_2=2\\x_3=6\\0=2\end{cases}\tag{1.1.13}$$

是一个行简化阶梯形矩阵. 虽然其主元个数 2 小于未知数的个数 3，但是，由于方程组 (1.1.13) 中有矛盾方程，所以，没有解.

任意行简化阶梯形方程组，只能是以下三种情形之一：

任意阶梯形方程组的主元个数一定不大于未知数的个数.

(i) 含有矛盾方程；

(ii) 不含矛盾方程，且主元的个数等于未知数的个数；

(iii) 不含矛盾方程，且主元的个数小于未知数的个数.

所以，类似于上述三个例子的讨论，我们有如下推论.

推论1.1.2 对于任意 n 元行简化阶梯形方程组，设它的主元个数是 r，则该方程组

(i) 无解 $\Leftrightarrow$ 它含有矛盾方程；

(ii) 有唯一解 $\Leftrightarrow$ 它没有矛盾方程，且 $r=n$；

(iii) 有无穷多个解 $\Leftrightarrow$ 它没有矛盾方程，且 $r<n$ (即有 $n-r$ 个自由变量).

在 1.2 节中，这个结论将被推广到任意线性方程组的情形，参见定理 1.2.1 以及推论 1.2.1 和推论 1.2.2.

习题 1.1

1. 写出一个只有零解的齐次线性方程组的例子. 写出一个有非零解的齐次线性方程组的例子.

2. 证明：如果一个线性方程组有零解，则该方程组一定是齐次线性方程组. (等价地，非齐次线性方程组一定没有零解.)

3. 证明：如果$\begin{cases}x_1=c_1\\x_2=c_2\\\cdots\cdots\\x_n=c_n\end{cases}$和$\begin{cases}x_1=d_1\\x_2=d_2\\\cdots\cdots\\x_n=d_n\end{cases}$都是非齐次线性方程组（1.1.3）的解，则$\begin{cases}x_1=c_1-d_1\\x_2=c_2-d_2\\\cdots\cdots\\x_n=c_n-d_n\end{cases}$是齐次线性方程组（1.1.5）的解.

4. 证明：如果$\begin{cases}x_1=c_1\\x_2=c_2\\\cdots\cdots\\x_n=c_n\end{cases}$是非齐次线性方程组（1.1.3）的解，而$\begin{cases}x_1=d_1\\x_2=d_2\\\cdots\cdots\\x_n=d_n\end{cases}$是齐次线性方程组（1.1.5）的解，则$\begin{cases}x_1=c_1+d_1\\x_2=c_2+d_2\\\cdots\cdots\\x_n=c_n+d_n\end{cases}$是非齐次线性方程组（1.1.3）的解.

5. 下述方程组中，哪些是阶梯形方程组，哪些是行简化阶梯形方程组？

(1) $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=2\\x_1=3\\x_3=2\end{cases}$.

(2) $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+x_4=1\\-2x_2+x_3-2x_4=2\\x_4=0\\0=3\end{cases}$.

(3) $\begin{cases}x_1+x_2-3x_3=7\\x_4=6\end{cases}$.

§1.2　高斯消元法

由推论 1.1.2 可知，对于任意行简化阶梯形方程组，我们可以容易地判定它是否有解，以及有解时，是否有无穷多个解. 在本节里我们将讨论任意线性方程组的解的存在情况.

我们先看阶梯形方程组（参见定义 1.1.4）的情形.

例1.2.1　考虑线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ x_2 + 2x_3 = -3 \\ -2x_3 = -6 \end{cases}. \tag{1.2.1}$$

它是一个阶梯形方程组，但不是行简化阶梯形方程组（参见定义1.1.7）. 其第三个主元是-2，不是1，但是我们可以在第三个方程的两边同时乘以$-\frac{1}{2}$，其余方程不变，得到：

$$(1.2.1) \to \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_3 = 3 \end{cases}. \tag{1.2.2}$$

方程组（1.2.2）仍然不是行简化阶梯形方程组. 特别地，第三个主元1的上方的系数不为0. 但是我们可以把第三个方程的-2倍加到第二个方程上，其余方程不变；再把第三个方程的-1倍加到第一个方程上，其余方程不变，得到：

为什么这里考虑-2倍，-1倍？

$$(1.2.2) \to \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -5 \\ x_2 = -9 \\ x_3 = 3 \end{cases}. \tag{1.2.3}$$

方程组（1.2.3）还不是行简化阶梯形方程组，它的第二个主元1的上方的系数不为0. 我们可以把第二个方程的2倍加到第一个方程上，其余方程不变，得到：

$$(1.2.3) \to \begin{cases} x_1 = -23 \\ x_2 = -9 \\ x_3 = 3 \end{cases}. \tag{1.2.4}$$

于是，方程组（1.2.1）就变为一个行简化阶梯形方程组（1.2.4）了.

把上面例子中的讨论进行推广①，我们得到如下引理.

引理1.2.1 任意阶梯形方程组都可以经过若干步如下操作而变为一个行简化阶梯形方程组，而且主元个数不变：

- 用非零数乘以某个方程的两边，其余方程不变；
- 把某个方程的若干倍加到另一个方程上，其余方程不变.

我们再来看一般的线性方程组.

例1.2.2 考虑线性方程组：

① 可以用数学归纳法给出证明，细节从略.