JINBANG BOOKS · SINCE 1997
金榜图书
北京时代巨流文化有限公司

2020 全国各大考研辅导机构通用教材

李永乐 · 王式安考研数学系列

数学基础过关660题·数学二

答案册

主编◎李永乐 王式安 武忠祥

编委◎李永乐 王式安 武忠祥 李正元 蔡燧林 章纪民 胡金德 刘西垣 姜晓千

核心搭配：《复习全书》+《660题》+《历年真题》+《330题》

互联网可视化版本

微信扫书中二维码
观看重难点讲解视频
(详见封二使用说明)

2020全新升级：习题与答案分册 更便携实用

- 一线名师强强联手
- 实力打造考研精品
- 先填空后选择编排
- 无须过渡直接做题
- 解答精准评注点睛
- 全面指导解题思路
- 循序渐进稳步提升
- 基础过关举一反三

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

金榜图书

2020

全国各大考研辅导机构**通用教材**

李永乐·王式安考研数学系列

数学基础过关660题·数学二

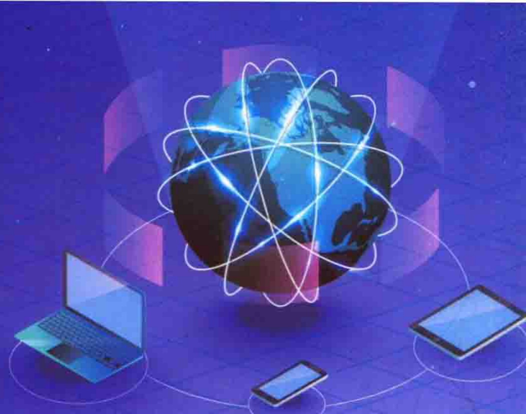
答案册

主编◎李永乐 王式安 武忠祥

编委◎李永乐 王式安 武忠祥 李正元 蔡燧林 章纪民 胡金德 刘西垣 姜晓千

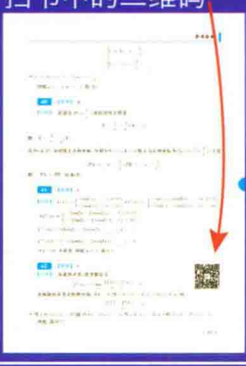
西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

本书**二维码扫码**使用说明



V研客独创扫码解答，扫难题，求问答
助你制胜考研，**使用步骤**如下：

1. 打开【微信】扫一扫
扫书中的二维码



2. 领取专属优惠券

3. 注册验证→0元购

4. 关注V研客

5. 微信扫描书中二维码观看课程

小V特别提醒

关注V研客，
点击【分享】
有考研新人
礼包哦~

温馨提示：V研客最新推出专属“超级会员”

会员可享有：
①**原价1698元**的“数英政全程班”（总课时：338+）
②专属答疑服务
现持本书专享价：**68元**
扫描右侧二维码成为超级会员，专业课信息请关注公众号：V研客考研

本页所有服务由微客兄弟网络科技（北京）有限公司提供，如有变更恕不另行通知
联系方式 微信公众号：V研客考研 电话：010-51906235 QQ：3053326262

目录

第1部分　填空题

第2部分　选择题

第1部分

填空题

参考答案

高等数学

1 【答案】 $g(f(x))=\begin{cases}4+(x^2+1)^2, & x<0\\ 4-x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$.

【分析】 这是求分段函数的复合函数的表达式.

$$g(f(x))=\begin{cases}4-f^2(x), & f(x)\leqslant 0\\ 4+f^2(x), & f(x)>0\end{cases}$$

由 $f(x)$ 的定义知，当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2+1>0$；当 $x>0$ 时，$f(x)=-x<0$；当 $x=0$ 时，$f(x)=0$. 于是

$$g(f(x))=\begin{cases}4+(x^2+1)^2, & x<0\\ 4-(-x)^2, & x\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}4+(x^2+1)^2, & x<0\\ 4-x^2, & x\geqslant 0\end{cases}.$$

2 【答案】 $-\dfrac{a}{\alpha}$

【分析】 分子、分母均为一阶无穷小，分子、分母同除 x 得

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{a\dfrac{\tan x}{x}+b\dfrac{1-\cos x}{x}}{\alpha\dfrac{\ln(1-x)}{x}+\beta\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x^2}}{x}}=\frac{a+0}{-\alpha+0}=-\frac{a}{\alpha},$$

其中 $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1,\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x}=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x}=-1,\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{-x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0.$$

3 【答案】 4

【分析】 直接用等价无穷小因子替换：

$$\mathrm{e}^t-1\sim t(t\to 0),1-\cos t\sim\frac{1}{2}t^2(t\to 0)$$

$$\Rightarrow\qquad I=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3}{\frac{1}{2}x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3}{\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}x^2}=4.$$

4 【答案】 1

【分析】 先改写 $x=\ln\mathrm{e}^x,2x=\ln\mathrm{e}^{2x}$

于是

$$分子 = \ln\left(1+\frac{\sin^2 x}{e^x}\right) \sim \frac{\sin^2 x}{e^x} \sim \sin^2 x (x \to 0)$$

$$分母 = \ln\left(1+\frac{x^2}{e^{2x}}\right) \sim \frac{x^2}{e^{2x}} \sim x^2 (x \to 0)$$

再利用等价无穷小因子替换得

$$I = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2} = 1.$$

5 【答案】 0

【分析】 用相消法结合洛必达法则求这个$\frac{\infty}{\infty}$型的极限，分子、分母同除以$(e^x)^3$.

$$I = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3 e^{-x}(3+e^{-x})}{[e^{-2x}+(1+e^{-x})^2](e^{-x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{3+e^{-x}}{[e^{-2x}+(1+e^{-x})^2](e^{-x}+1)} = 0\times 3 = 0$$

其中用洛必达法则易知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=0$.

【评注】 求$\frac{\infty}{\infty}$(或$\frac{0}{0}$)型极限的一个重要方法是：先约去分子、分母中极限为∞(或 0)的因子，然后可用四则运算法则.

6 【答案】 0

【分析】

$$I = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{\frac{\beta}{\alpha}x}}\right)^{\alpha}$$

用洛必达法则求得$\frac{\infty}{\infty}$型极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\frac{\beta}{\alpha}x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\beta}{\alpha}e^{\frac{\beta}{\alpha}x}} = 0$$

$\Rightarrow I = 0$.

【评注】 (1) 同理可证：设$\alpha>0,\beta>0,a>1$为常数，则$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^{\beta x}}=0$. 再由函数极限与数列极限关系可得数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{a^n}=0$.

(2) 由该题结论可得：

设$\alpha>0,\beta>0$为常数，则$I=\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\alpha}\mid\ln x\mid^{\beta}=0$.

(作变量替换，令$t=\mid\ln x\mid=-\ln x$(不妨设$0<x<1$)$\Rightarrow x=e^{-t}\Rightarrow I=\lim\limits_{t\to+\infty}t^{\beta}e^{-\alpha t}=0$.)

(3) 由该题结论还可得：

设$\alpha>0,\beta>0$为常数，则$I=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^{\beta}x}{x^{\alpha}}=0$

(作变量替换. 令 $t = \ln x \Rightarrow x = e^t$, $I = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^\beta}{e^{\alpha t}} = 0$.)

(4) 题中用到了一个简单的结论:若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \Rightarrow$ 对 $\forall$ 常数 $\alpha > 0$ 有

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)|^\alpha = 0$$

7 【答案】 $e^{-\frac{1}{3}}$

【分析 1】 这是指数型(1^∞)极限,用求指数型极限的一般方法:

$$I = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\sin x}{x}}$$

转化为求 $\dfrac{0}{0}$ 型极限

$$J \xlongequal{\text{记}} \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\sin x}{x}$$

先用等价无穷小因子替换,再用洛必达法则.

$$J = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{2}x^2}\ln\left[\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)+1\right] = \lim_{x\to 0}\frac{2}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{3}$$

于是

$$I = e^{-\frac{1}{3}}$$

其中 $\quad 1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2, \ln\left[\left(\dfrac{\sin x}{x}-1\right)+1\right] \sim \dfrac{\sin x}{x} - 1 \qquad (x\to 0)$

【分析 2】 用求 1^∞ 型极限的方法:

$$I = \lim_{x\to 0}\left\{\left[\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)+1\right]^{\frac{x}{\sin x - x}}\right\}^{\frac{\sin x - x}{x}\cdot\frac{1}{1-\cos x}}$$

利用重要极限

$$I = e^A$$

转化为求极限

$$A \xlongequal{\text{记}} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\cdot\frac{1}{2}x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

因此 $\qquad I = e^{-\frac{1}{3}}$.

8 【答案】 e^2

【分析】 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2}} = \cos 0 = 1$,所以只须求

$$J = \lim_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{2}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)^x$$

【分析 1】 这是指数型(1^∞)极限,用求指数型极限的一般方法:

$$J=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)}$$

转化为求

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(\sin2t+\cos t)}{t}$$

$$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim_{t\to0^+}\frac{2\cos2t-\sin t}{\sin2t+\cos t}=2$$

$\Rightarrow J=e^2,I=(e^2)^1=e^2.$

【分析 2】 用求 1^∞ 型极限的方法：

$$J=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)+1\right]^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}\cdot x\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}$$

其中 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to0^+}\frac{\sin2t+\cos t-1}{t}$

$$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim_{t\to0^+}(2\cos2t-\sin t)=2$$

$\Rightarrow J=e^2,I=(e^2)^1=e^2.$

9 【答案】 $\frac{1}{10}$

【分析】 $\sin^{10}x\sim x^{10}(x\to0)$，用等价无穷小因子替换得

$$I=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2\,dt}{x^{10}}$$

再作变量替换：$u=x^2$ 得

$$I=\lim_{u\to0^+}\frac{u-\int_0^u\cos t^2\,dt}{u^5}\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}}\lim_{u\to0^+}\frac{1-\cos u^2}{5u^4}$$

$$=\lim_{u\to0^+}\frac{\frac{1}{2}u^4}{5u^4}=\frac{1}{10}$$

其中 $1-\cos u^2\sim\frac{1}{2}u^4\quad(u\to0)$.

10 【答案】 1

【分析】 $\displaystyle\int_{x^2}^{x}\frac{\sin(xt)}{t}dt\xlongequal{xt=s}\int_{x^3}^{x^2}\frac{\sin s}{s}ds$

$$\Rightarrow I=\lim_{x\to0}\frac{\int_{x^3}^{x^2}\frac{\sin s}{s}ds}{x^2}\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}}\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot2x-\frac{\sin x^3}{x^3}\cdot3x^2}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{x^2}-\lim_{x\to0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin x^3}{x^3}\cdot x=1-\frac{3}{2}\cdot1\cdot0=1.$$

11 【答案】 $\dfrac{1}{n!}$

【分析 1】 用等价无穷小因子替换

$$\sqrt[m]{1+x}-1=(1+x)^{\frac{1}{m}}-1\sim\frac{x}{m}(x\to 0)$$

得 $\sqrt[m]{\cos x}-1=\sqrt[m]{1+\cos x-1}-1\sim\dfrac{\cos x-1}{m}(x\to 0)$，于是

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{(\cos x-1)+1})(1-\sqrt[3]{(\cos x-1)+1})\cdots(1-\sqrt[n]{(\cos x-1)+1})}{(1-\cos x)^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{(\cos x+1)+1}-1}{\cos x-1}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{(\cos x-1)+1}-1}{\cos x-1}\right)\cdot\cdots\cdot\left(\frac{\sqrt[n]{(\cos x-1)+1}-1}{\cos x-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(\cos x-1)}{\cos x-1}\cdot\frac{\frac{1}{3}(\cos x-1)}{\cos x-1}\cdots\frac{\frac{1}{n}(\cos x-1)}{\cos x-1}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}.$$

【分析 2】 用等价无穷小因子替换：

$t\sim\ln(1+t)\quad(t\to 0)$

$(\cos x)^{\frac{1}{m}}-1\sim\ln[(\cos x)^{\frac{1}{m}}-1+1]=\dfrac{1}{m}\ln\cos x\quad(x\to 0)$

因此

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{\cos x}-1)(\sqrt[3]{\cos x}-1)\cdots(\sqrt[n]{\cos x}-1)}{(\cos x-1)^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sqrt{\cos x}\ln\sqrt[3]{\cos x}\cdots\ln\sqrt[n]{\cos x}}{(\cos x-1)^{n}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\frac{\ln^{n}\cos x}{(\cos x-1)^{n}}$$

$$=\frac{1}{n!}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln[(\cos x-1)+1]}{\cos x-1}\right)^{n}=\frac{1}{n!}.$$

【分析 3】 用极限的四则运算法则，这是 $n-1$ 个极限的乘积，分别求每个 $\dfrac{0}{0}$ 型极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[m]{\cos x}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{m}(\cos x)^{\frac{1}{m}-1}\sin x}{\sin x}=\frac{1}{m}\ (m=2,3,\cdots,n),$$

于是

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{1-\cos x}\cdots\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[n]{\cos x}}{1-\cos x}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdots\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}.$$

12 【答案】 2

【分析 1】 先作恒等变形后，用等价无穷小因子替换：

$a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}=a^{\frac{1}{x+1}}(a^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1)=a^{\frac{1}{x+1}}(a^{\frac{1}{x(x+1)}}-1)$

当 $x\to+\infty$，$a^{\frac{1}{x(x+1)}}-1\sim\dfrac{\ln a}{x(x+1)}$

因此 $I=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{p}a^{\frac{1}{x+1}}\dfrac{\ln a}{x(x+1)}=\ln a\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{p}}{x(x+1)}$

$=\ln a$ （当 $p=2$ 时）.

【评注】 容易看出：当 $p<2$ 时，$I=0$，当 $p>2$ 时，$I=+\infty$.

【分析 2】 当 $p\leqslant 0$ 时，显然

$$I=\lim_{x\to+\infty}x^{p}\left(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}\right)=0.$$

当 $p>0$ 时这是 $\infty\cdot 0$ 型极限，先转化为 $\dfrac{0}{0}$ 型极限，然后用洛必达法则

$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}}{x^{-p}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-\dfrac{1}{x^{2}}+\dfrac{1}{(x+1)^{2}}\right)\ln a}{-px^{-p-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p+1}(2x+1)\ln a}{px^{2}(x+1)^{2}}=\begin{cases}+\infty & (p>2)\\ 0 & (0<p<2)\\ \ln a & (p=2)\end{cases}$$

13 【答案】 -1

【分析】 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\mathrm{e}^{x^{2}}-1)\dfrac{2x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}}{\ln(1-x^{2})\sin\dfrac{x}{1+x}}$

用等价无穷小因子替换：$x\to 0$ 时

$\mathrm{e}^{x^{2}}-1\sim x^{2}$，$\ln(1-x^{2})\sim -x^{2}$，$\sin\dfrac{x}{1+x}\sim\dfrac{x}{1+x}\sim x$

得

$$I=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^{2}\cdot 2x}{-x^{2}\cdot x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)=-1.$$

【评注】 在计算极限时，正确利用等价无穷小因子的代换定理能简化计算.
常遇到的等价无穷小有：

当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^{2}$，

$a^{x}-1\sim x\ln a\ (a>0)$， $\ln(1+x)\sim x$.

14 【答案】 e

【分析】 这是 ∞^{0} 型极限，先作恒等变形

$$I=\lim_{x\to\infty}\left(\mathrm{e}^{x^{2}}\left(1+\frac{x^{3}}{\mathrm{e}^{x^{2}}}\right)\right)^{\frac{1}{x^{2}}}=\mathrm{e}\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^{2}}\ln\left(1+\frac{x^{3}}{\mathrm{e}^{x^{2}}}\right)}$$

又

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{2}}\ln\left(1+\frac{x^{3}}{\mathrm{e}^{x^{2}}}\right)\xlongequal[\text{因子替换}]{\text{等价无穷小}}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^{2}}\cdot\frac{x^{3}}{\mathrm{e}^{x^{2}}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^{x^{2}}}$$

$$\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2xe^{x^2}}=0$$

其中
$$\ln\left(1+\frac{x^3}{e^{x^2}}\right)\sim\frac{x^3}{e^{x^2}}\quad(x\to\infty)$$

因此，

$$I=e\cdot e^0=e.$$

15 【答案】 $\frac{1}{3}$

【分析 1】 $\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}=x\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-1\right)-x\left(\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}-1\right)$

$$I=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-1\right)-\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}-1\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x}\right)-\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

【评注】 这里先作恒等变形后利用了等价无穷小因子替换：
$$(1+t)^\alpha-1\sim\alpha t\quad(t\to0).$$

【分析 2】 这是求 $\infty-\infty$ 型的极限，先转化为 $\frac{0}{0}$ 型极限，然后再用洛必达法则.

$$I=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$$

$$\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to0^+}\frac{(1+t)^{\frac{1}{6}}-(1-t)^{\frac{1}{6}}}{t}=\lim_{t\to0^+}\left(\frac{1}{6}(1+t)^{-\frac{5}{6}}+\frac{1}{6}(1-t)^{-\frac{5}{6}}\right)$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

16 【答案】 $-p$

【分析】 因为 $|x|$ 是分段函数，分界点是 $x=0$，又 $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}$ 不 ∃，但 $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，所以要分别求左、右极限.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{a+be^{\frac{1}{x}}}{a-be^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\sin px}{|x|}=\lim_{x\to0^+}\frac{ae^{-\frac{1}{x}}+b}{ae^{-\frac{1}{x}}-b}\cdot\frac{px}{x}=\frac{0+b}{0-b}\cdot p=-p$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{a+be^{\frac{1}{x}}}{a-be^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\sin px}{|x|}=\lim_{x\to0^-}\frac{a+be^{\frac{1}{x}}}{a-be^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{px}{-x}=\frac{a+0}{a-0}(-p)=-p.$$

因此 $I=-p$.

17 【答案】 12

【分析】 分式极限存在，分母的极限$\lim\limits_{x\to0}(e^{2x^3}-1)=0$，$\Rightarrow$分子极限$\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+f(x)\ln(1+x)}-1)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}f(x)\ln(1+x)=0$，又 $\exists\delta>0$，当$0<|x|<\delta$时$f(x)\neq0$.

用等价无穷小因子替换$\left(\begin{matrix}(1+t)^{\alpha}-1\sim\alpha t\\ e^t-1\sim t\end{matrix}(t\to0)\right)$

$$I=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\ln(1+x)}{2x^3}=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)}{x^2}\cdot\frac{\ln(1+x)}{4x}\right)=3$$

$$\Rightarrow\quad\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}\cdot\frac{\ln(1+x)}{4x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{4x}{\ln(1+x)}=3\times4=12.$$

18 【答案】 2

【分析】 由 $$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}=3\qquad(1)$$

当$x\to0$时，分母为无穷小，所以分子也为无穷小，进一步有$\lim\limits_{x\to0}\left(x+\frac{f(x)}{x}\right)=0$.

因此，当$x\to0$时

$\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)\sim x+\frac{f(x)}{x}$，所以(1)可写为$\lim\limits_{x\to0}\frac{x+\frac{f(x)}{x}}{x}=3.$

因此

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=2$$

19 【答案】 $-\frac{7}{3}$

【分析 1】 用泰勒公式.

已知

$$\ln(1+2x-x^2)=(2x-x^2)-\frac{1}{2}(2x-x^2)^2+o((2x-x^2)^2)$$

$$=2x-x^2-\frac{1}{2}(2x)^2+o(x^2)=2x-3x^2+o(x^2)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{3}}-1=\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)x^2+o(x^2)=\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+o(x^2)$$

$$\Rightarrow\quad I=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left[(2x-3x^2)-6\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2\right)+o(x^2)\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(-3+\frac{2}{3}\right)x^2=-\frac{7}{3}.$$

【分析 2】 用洛必达法则.

$$I=\lim_{x\to0}\frac{1}{2x}\left[\frac{2-2x}{1+2x-x^2}-2(1+x)^{-\frac{2}{3}}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2x}{2x(1+2x-x^2)}+\lim_{x\to0}\left[\left(\frac{1}{1+2x-x^2}-1\right)-((1+x)^{-\frac{2}{3}}-1)\right]\cdot\frac{1}{x}$$

$$=-1+\lim_{x\to0}\frac{-2x+x^2}{x}-\lim_{x\to0}\frac{-\frac{2}{3}x}{x}=-1-2+\frac{2}{3}=-\frac{7}{3}.$$

其中$\frac{1}{1+2x-x^2}-1=(1+2x-x^2)^{-1}-1\sim(-1)(2x-x^2)$,$(1+x)^{-2/3}-1\sim-\frac{2}{3}x\quad(x\to0)$.

20 【答案】 0

【分析】 这是$\frac{0}{0}$型极限,先作如下变形:

$$I=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x^2-2\sin x+\sin 2x}{x^4}$$

可用的方法是洛必达法则(计算较繁)与泰勒公式.

注意泰勒公式

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\quad(x\to0)\quad(x^4\text{ 项系数为 }0)$$

$\Rightarrow$

$$x\sin x^2=x(x^2+o(x^4))=x^3+o(x^4)$$

$$-2\sin x=-2\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)=-2x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)$$

$$\sin 2x=2x-\frac{1}{6}(2x)^3+o(x^4)=2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^4)$$

相加得

$$x\sin x^2-2\sin x+\sin 2x=0+o(x^4)\quad(x\to0)$$

因此 $$I=\lim_{x\to0}\frac{o(x^4)}{x^4}=0$$

【评注】 如果求

$$I=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x^2-2\sin x+\sin 2x}{x^5}$$

就要把 $\sin x$ 展开到 x^5 项:

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)\quad(x\to0)$$

然后可得

$$x\sin x^2-2\sin 2+\sin 2x=\frac{1}{4}x^5+o(x^5)\quad(x\to0)$$

于是

$$I=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{4}x^5+o(x^5)}{x^5}=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}.$$

21 【答案】 $\frac{1}{6}$

【分析】 注意$\lim_{x\to0^+}x^x=\lim_{x\to0^+}e^{x\ln x}=e^0=1$

$\arctan x\sim x,\ln(1+x)\sim x\quad(x\to0)$

$\Rightarrow$

$$I=\lim_{x\to0^+}\frac{-x^x\left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x-1\right)}{x^3}\text{（等价无穷小因子替换）}$$

$$=-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x}{x^3}=-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}-1+1\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x-\sin x}{x^3}\text{（等价无穷小因子替换）}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

22 【答案】 $\frac{4}{3}$

【分析】 将 x_n 化简

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)x_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$$

$$=\cdots=1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}$$

$$\Rightarrow\quad\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{4}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)=\frac{4}{3}.$$

【评注】 通过恒等变形转化为可以用四则运算法则求的极限，这是求数列极限的重要方法.

23 【答案】 $\frac{\pi}{2}$

【分析】 $$I\xlongequal{\text{周期性}}\lim_{n\to+\infty}n\tan(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)$$

$$\xlongequal{\text{恒等变形}}\lim_{n\to+\infty}n\tan\left(n\pi\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-n\pi\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}n\tan\left[n\pi\frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}\right]$$

$$\xlongequal[\text{因子替换}]{\text{等价无穷小}}\lim_{n\to+\infty}\left[n\cdot\frac{\frac{\pi}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}\right]=\frac{\pi}{2}.$$

24 【答案】 $\frac{1}{\mathrm{e}}$

【分析】 先化简 x_n

$$x_n=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\right)^n=\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right)^n$$

$$= \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\cdot\frac{-n}{n+1}}$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = e^{-1}.$$

25 【答案】 $\max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$

【分析 1】 恒等变形后用幂指数运算法则. 不妨设 a_1 为最大值

$$I = a_1 \lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n+\cdots+\left(\frac{a_m}{a_1}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = a_1\cdot 1 = a_1.$$

【分析 2】 用适当放大缩小法. 不妨设 $\max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\} = a_1$

则 $$a_1 \leqslant (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} \leqslant a_1 m^{\frac{1}{n}}$$

令 $n\to\infty, m^{\frac{1}{n}}\to 1$, 由夹逼定理

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} = a_1 (\text{即} \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}).$$

26 【答案】 2

【分析】 $\dfrac{2}{x} - 1 < \left[\dfrac{2}{x}\right] \leqslant \dfrac{2}{x}$

因此, 当 $x > 0, 2 - x < x\left[\dfrac{2}{x}\right] \leqslant 2$

当 $x < 0, 2 \leqslant x\left[\dfrac{2}{x}\right] < 2 - x$

又 $\lim\limits_{x\to 0}(2 - x) = 2.$

于是 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{2}{x}\right] = 2.$

【评注】 上一题和本题都是利用夹逼定理求极限, 解这一类题的关键是要找出两个特殊的数列(或函数), 这要求我们熟练掌握一些常用的数列(或函数) 的极限.

27 【答案】 0

【分析】 注意

$$\frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$n = 1$: $\quad \dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{3}$

$n = 2$: $\quad \dfrac{3}{4} < \dfrac{4}{5}$

$\vdots \qquad \vdots$

$n = n \quad \dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{2n}{2n+1}$

将这 n 个式子相乘得

$$x_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$