高教版 2020

“考研考试大纲解析及配套题”系列
严格按照最新考试大纲编写

考研数学

考试大纲解析配套 600 题

（数学一和数学二适用）

全国考研数学配套教材编委会

高等教育出版社

● 最佳搭配：考试大纲解析 + 考试大纲解析配套 600 题

高教版 2020

“考研考试大纲解析及配套题”系列

严格按照最新考试大纲编写

考研数学

考试大纲解析配套 600 题

（数学一和数学二适用）

全国考研数学配套教材编委会

高等教育出版社·北京

- 最佳搭配：考试大纲解析 + 考试大纲解析配套 600 题

内容简介

《考研数学考试大纲解析配套600题(数学一和数学二适用)》具有如下特色:

1. 在对试题内容的分类和命题规律研究的基础上，按照考试内容对题型和考点进行了分类，每部分内容和练习题后面对这类题型的解题方法和技巧、需要着重掌握的内容、考生答题中丢分的主要因素进行了简明扼要的小结，使读者在练习几道题后对这部分内容的解题要点、常见错误有更深的体会，进而能够获得良好的学习效果;

2. 题目达到或略高于考题的深度和难度，注重数学思考方法的培养、解题方法的掌握和解题技巧的训练，使得考生不但能够熟悉试题的类型，而且能够掌握解决问题的方法;

3. 题目知识点覆盖全面，融入了编者多年从事考研辅导授课经验和积累的丰富资料，某些题目是编者根据命题趋势和阅卷经验有针对性地自行命制，有较高的参考价值;

4. 体例简洁，符合学习规律。

编辑推荐:

《考研数学考试大纲解析配套600题》旨在帮助考生在强化复习阶段强化解题思维训练，培养和快速提高解题能力，为拿下数学高分打下坚实基础。

图书在版编目(CIP)数据

考研数学考试大纲解析配套600题.数学一和数学二适用/全国考研数学配套教材编委会编. --北京:高等教育出版社,2019.6

ISBN 978-7-04-052069-9

Ⅰ.①考… Ⅱ.①全… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第109469号

考研数学考试大纲解析配套600题(数学一和数学二适用)

KAOYAN SHUXUE KAOSHI DAGANG JIEXI PEITAO 600 TI(SHUXUE YI HE SHUXUE ER SHIYONG)

策划编辑 朱丽娜　　责任编辑 张耀明　　封面设计 李小璐　　版式设计 王艳红

责任校对 王　雨　　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	三河市骏杰印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开　本	787mm×1092mm　1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	17.25		
字　数	420千字	版　次	2019年6月第1版
购书热线	010-58581118	印　次	2019年7月第2次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	46.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

版权所有　侵权必究

物 料 号　52069-00

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

修订说明

《考研数学考试大纲解析配套600题(数学一和数学二适用)》是《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲解析(数学一和数学二适用)》的姊妹篇。《考研数学考试解析配套600题(数学一和数学二适用)》旨在帮助考生在强化复习阶段强化解题思维训练,培养和快速提高解题能力,为拿下数学高分打下坚实基础。为了使读者获得良好的复习效果,在编写《考研数学考试大纲解析配套600题》时贯彻如下指导思想:

1. 严格按照《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》的内容和要求编写;
2. 内容上力求能够把握命题规律,追踪命题走向,立足考题特点;
3. 风格简约清新,适应学习规律,帮助考生达到高质、高效的学习效果。

按照上述指导思想,本书具有如下特色:

1. 在对试题内容的分类和命题规律研究的基础上,按照考试内容对题型和考点进行了分类,每部分内容和练习题后面对这类题型的解题方法和技巧,需要着重掌握的内容,考生答题中丢分的主要因素进行了简明扼要的小结,使读者在练习几道题后对这部分内容的解题要点、常见错误有更深的体会,进而能够获得良好的学习效果;
2. 达到或略高于考题的深度和难度,注重数学思维方法的培养,解题方法的掌握和解题技巧的训练,使考生不但能够熟悉试题的类型,而且能够掌握解决问题的方法;
3. 题目知识点覆盖全面,融入了编者多年从事考研辅导授课经验和积累的丰富资料,某些题目是编者根据命题趋势和阅卷经验有针对性地自行命制,有较高的参考价值;
4. 体例简洁,符合学习规律。

本书适用于考研数学的数学一和数学二卷种。

在编写过程中,作者参考了许多相关教材,引用了其中的一些例子,恕不一一列出,在此向有关作者表示诚挚的感谢,并致以深深的敬意。

本书仓促付梓,书中的疏漏和不足,敬请同行专家和读者不吝赐教。

编　者

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话　(010)58581999　58582371　58582488

反盗版举报传真　(010)82086060

反盗版举报邮箱　dd@ hep. com. cn

通信地址　北京市西城区德外大街4号

　　　　　高等教育出版社法律事务与版权管理部

邮政编码　100120

防伪说明及增值服务

高教版考试用书书后配有防伪标，该防伪标为高教版考试用书正版书的专用标识：

1. 刮开防伪涂层，利用手机微信等软件扫描二维码，会跳转至防伪查询网页，获得所购图书详细信息和增值服务导航。

2. 使用荧光灯照射防伪标的“高教考试在线”字样，文字在照射下由白色变为紫色，则为正版图书标签。

3. 如需获得更多图书增值信息，请访问高教社考试官方平台(http://px. hep. edu. cn)。

防伪客服电话

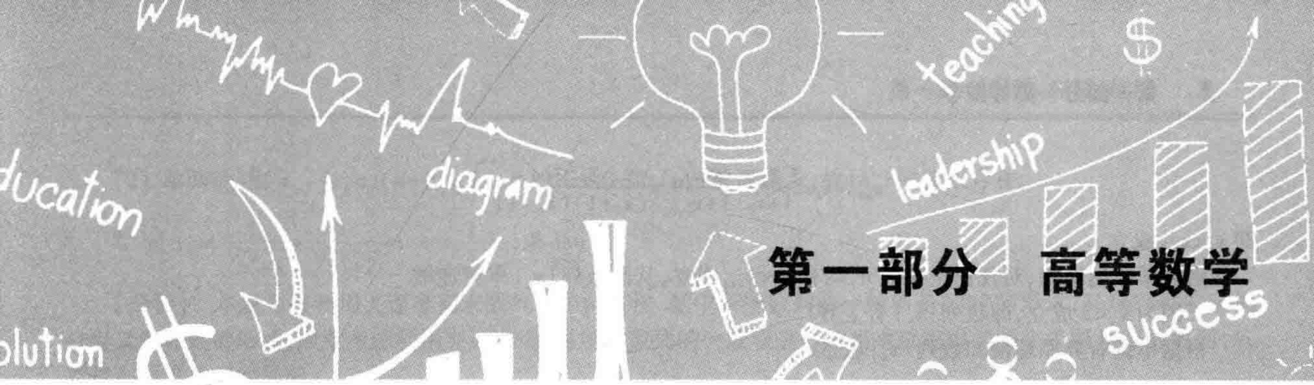
(010)58582300

目　录

第一部分　高 等 数 学

第二部分　线 性 代 数

第三部分　概率论与数理统计



第一部分 高等数学

第一章 函数、极限、连续

1. 如果数列 $x_n>0, n=1,2,\cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=a>1$，则数列 x_n( )

(A) 有界. (B) 趋向于正无穷大. (C) 收敛于 a. (D) 收敛于 0.

【解】 因为 $a>1$，取常数 r，使得 $a>r>1$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=a>r>1.$$

由极限的保号性，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}>r>1, n=N+1, N+2, \cdots,$$

于是得到

$$x_{N+k}>r^k x_N, k=1,2,\cdots.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}r^k=+\infty$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，应选(B).

2. 设 $f(x+1)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-2}\right)^n$，则 $f(x)=$( )

(A) e^{x-1}. (B) e^{x+2}. (C) e^{x+1}. (D) e^{-x}.

【解】 应选(C).

$$f(x+1)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2+x}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{2+x}}\right]^{\frac{n(2+x)}{n-2}}=e^{2+x}=e^{1+(x+1)},$$

所以 $f(x)=e^{1+x}$，因此选(C).

3. 设常数 $1<a<e^{\frac{1}{e}}$，$x_1=a$，$x_n=a^{x_{n-1}}(n=2,3,\cdots)$，证明当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{x_n\}$ 极限存在.

【证】 因为 $x_1=a>1$，所以 $x_2=a^{x_1}>a=x_1$.

假设 $x_n=a^{x_{n-1}}>x_{n-1}$，则

$$x_{n+1}=a^{x_n}>a^{x_{n-1}}=x_n.$$

由归纳法，$\{x_n\}$ 为单调增加数列.

又 $x_1=a<e$，假设 $x_n<e$，则

$$x_{n+1}=a^{x_n}<a^e<(e^{\frac{1}{e}})^e=e,$$

由归纳法知 $\{x_n\}$ 有上界.

由单调有界准则，数列 $\{x_n\}$ 极限存在.

4. 设 $x_1=1$，$x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{x_n+1}$，$n=1,2,\cdots$，证明当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求其值.

【证】 首先证明数列 $\{x_n\}$ 是单调递增的.

$x_1<x_2$ 显然成立.

假设 $x_{k-1}<x_k$ 成立，则有

$$x_{k+1}-x_k=\frac{x_k}{1+x_k}-\frac{x_{k-1}}{1+x_{k-1}}=\frac{x_k-x_{k-1}}{(x_k+1)(x_{k-1}+1)}>0,$$

即 $x_k<x_{k+1}$ 成立.

由数学归纳法知,对任何正整数 n,均有 $x_n<x_{n+1}$ 成立,从而数列 $\{x_n\}$ 单调递增.

又因为 $x_n<2$ 成立,即数列 $\{x_n\}$ 有上界.

根据单调有界原理便知数列 $\{x_n\}$ 收敛.

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,将 $x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{x_n+1}$ 两边取极限得

$$l^2=l+1.$$

考虑到 $l>0$,解得 $l=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,

因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

5. 设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值;

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求此极限.

【解】 (1) 由题意

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}.$$

令 $f'(x)=0$,得唯一驻点 $x=1$.

又

$$f''(1)=\left.\frac{2-x}{x^3}\right|_{x=1}=1>0,$$

故 $f(1)=1$ 是极小值,也是最小值.

(2) 由(1)知 $\ln x+\dfrac{1}{x}\geqslant 1$,从而 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_n}\geqslant 1$,于是

$$\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<\ln x_n+\frac{1}{x_n},$$

即 $x_{n+1}>x_n$,故 $\{x_n\}$ 为单调增加数列.

又 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$,知 $\ln x_n<1$,故 $x_n<\mathrm{e}$,即 $\{x_n\}$ 有上界,由单调有界准则,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

在不等式 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$ 两边取极限,且设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,有

$$\ln a+\frac{1}{a}<1.$$

又 $\ln a+\dfrac{1}{a}\geqslant 1$,故 $\ln a+\dfrac{1}{a}=1$,得 $a=1$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

6. 设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数,

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots),$$

证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

【解】 只须证明 a_n 是单调有界数列. 由题设 $f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant f(k)$,$k=1,2,\cdots$.

(1) 有界性. $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\sum\limits_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left[f(k)-\int_k^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x\right]+f(n)\geqslant 0.$

(2) 单调性. 由 $a_{n+1}-a_n=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 0$ 知, $\{a_n\}$ 单调减少, 故 $\{a_n\}$ 的极限存在.

7. 设 $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【分析】 本题考查利用夹逼准则求数列极限的方法. 题中所给数列的一般项是"和"的形式, 又难以写成定积分定义中和式的形式, 因此考虑利用夹逼准则. 通过对数列的一般项进行恰当地放缩得到两个极限相等的数列, 从而得到所求数列的极限.

【解】 对一切 n, 显然有

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant x_n\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1,$$

由夹逼准则, 有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1.$$

8. 设 $x_n=\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】 因为

$$1\leqslant\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}\leqslant\sqrt[n]{n},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 所以由夹逼准则, 得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

9. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n^3\left(2\sin\dfrac{1}{n}-\sin\dfrac{2}{n}\right)$.

【分析】 本题是数列未定式的极限问题, 先利用海涅定理化为函数极限, 在利用洛必达法则求出极限.

【解】
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n^3\left(2\sin\frac{1}{n}-\sin\frac{2}{n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin\frac{1}{n}-\sin\frac{2}{n}}{\frac{1}{n^3}}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2\cos x-2\cos 2x}{3x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin x+4\sin 2x}{6x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin x}{6x}+\lim_{x\to0}\frac{4\sin 2x}{6x}\\&=-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\\&=1.\end{aligned}$$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_1^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=$ ________.

【分析】 这是一个数列未定式, 可以利用海涅定理化数列极限为函数极限, 再利用洛必达法则.

【解】 设 $\sqrt{n}=x$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_1^{x^2}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1}\end{aligned}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}$$
$$=2.$$

11. 设函数$f(x)$在$x=a$可导,且$f(a)\neq 0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n=$________.

【解】 $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}\right]^n$$
$$=\exp\left\{\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{\frac{1}{n}}\frac{1}{f(a)}\right\}$$
$$=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

12. 求$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1}\right)\ (a\neq 0)$.

【解】 由拉格朗日中值定理知

$$\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}=\frac{1}{1+\xi_n^2}\left(\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1}\right)=\frac{1}{1+\xi_n^2}\frac{a}{n(n+1)}\ \left(\frac{a}{n+1}<\xi_n<\frac{a}{n}\right).$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{a}{1+\xi_n}\frac{n^2}{n(n+1)}=a.$$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)=$________.

【解】 $$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

14. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\frac{1}{i}}2^{\frac{i}{n}}$.

【解】 显然

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{1}{i}}2^{\frac{i}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}.$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}=\int_0^1 2^x dx=\frac{1}{\ln 2},$$

所以由夹逼准则,知$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\frac{1}{i}}2^{\frac{i}{n}}=\dfrac{1}{\ln 2}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(k+1)^2}{k!}=$________.

【解】 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)^2}{k!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}x^n\Big|_{x=1}=(x^2+3x+1)e^x\Big|_{x=1}=5e.$$

16. 求下列极限:

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^{x}-1}{x\ln(1+x^2)}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{2}{x}}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2}{x}\right)$;

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

【分析】 本题考查函数未定式的极限,可利用等价无穷小量代换和洛必达法则求极限.对(3)、(5)题先"指数对数化",再利用洛必达法则,对(4)题先做变量代换 $x=\dfrac{1}{t}$,再利用泰勒公式求极限.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^{x}-1}{x\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln\frac{1+\cos x}{2}}-1}{x\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln\dfrac{1+\cos x}{2}}{x\cdot x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\cos x-1}{2}\right)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\cos x-1}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)}{x^2}=-\frac{1}{4}.$$

(2) 因 $(x^x)'=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$,所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x^x(\ln x+1)}{-1+\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{-x^x(\ln x+1)^2-x^x\cdot\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{-1-1}{-1}=2.$$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}}=e^0=1.$

(4) 令 $\dfrac{1}{x}=t$,则

$$\lim_{x\to\infty}x^3\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sin\frac{2}{x}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-\dfrac{1}{2}\sin 2t}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{t-\dfrac{t^3}{6}+o(t^3)-\dfrac{1}{2}\left[2t-\dfrac{(2t)^3}{6}+o(t^3)\right]}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t^3}{2}+o(t^3)}{t^3}=\frac{1}{2}.$$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\cdot\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)}{\frac{1}{x}}}=e^{-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}}=e^{-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}}=e^{-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}}=e^{-1}.$

17. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

【解法 1】 因为 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}}$,

且

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x+2x\sin x}\cdot\frac{-2\sin 2x+2\sin x+2x\cos x}{4x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos 2x+2\cos x-x\sin x}{6x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x-3\sin x-x\cos x}{12x}\\&=\frac{1}{3},\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=e^{\frac{1}{3}}.$$

【解法 2】 因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}&=\lim_{x\to0}(1+\cos 2x+2x\sin x-1)^{\frac{1}{x^4}}\\&=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}}\\&=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin 2x+2\sin x+2x\cos x}{4x^3}}\\&=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin 2x+\sin x+x\cos x}{2x^3}}\\&=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\cos 2x+2\cos x-x\sin x}{6x^2}}\\&=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{4\sin 2x-3\sin x-x\cos x}{12x}}\\&=e^{\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

18. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$； (2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[2x+\ln(1-2x)]}$.

【分析】 本题考查利用泰勒公式求函数未定式极限. 若直接利用洛必达法则不易求出其极限,可利用泰勒公式计算. (1)题应先利用代换 $t=\frac{1}{x}$ 转化为 $\frac{0}{0}$ 型未定式,再利用泰勒公式.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$ $\left(令\ t=\frac{1}{x}\right)$

$$=\lim_{t\to0^+}\left[\left(\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{2t}\right)e^t-\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^6+1}\right]=\lim_{t\to0^+}\frac{\left(1-t+\frac{t^2}{2}\right)e^t-\sqrt{1+t^6}}{t^3}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\left(1-t+\frac{t^2}{2}\right)\left(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o(t^3)\right)-(1+o(t^3))}{t^3}=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{t^3}{6}+o(t^3)}{t^3}=\frac{1}{6}.$$

(2) 因为 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$,

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4),$$

$$\ln(1-2x)=-2x-\frac{1}{2}(-2x)^2+o(x^2)=-2x-2x^2+o(x^2),$$

所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[2x+\ln(1-2x)]}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right]}{x^2[2x-2x-2x^2+o(x^2)]}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{-2x^4+o(x^4)}=\frac{1}{24}.$$

19. 已知极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\arctan x-\ln\frac{1+x}{1-x}}{x^n}=c\neq0$,试确定常数 n 和 c 的值.

【解法1】 由洛必达法则,得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{2\arctan x-\ln\frac{1+x}{1-x}}{x^n}&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{1+x^2}-\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}}{nx^{n-1}}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{1+x^2}-\frac{2}{(1+x)(1-x)}}{nx^{n-1}}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2(-2x^2)}{1-x^4}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to0}\frac{-4x^2}{nx^{n-1}(1-x^4)}\end{aligned}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-4}{1-x^4}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{nx^{n-3}}=-4\lim_{x\to0}\frac{1}{nx^{n-3}}=c,$$

故有 $n=3$，　$c=-\frac{4}{3}$.

【解法 2】　因为

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3),\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3),\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

所以
$$2\arctan x-\ln\frac{1+x}{1-x}=2\arctan x-\ln(1+x)+\ln(1-x)=-\frac{4}{3}x^3+o(x^3),$$

故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\arctan x-\ln\frac{1+x}{1-x}}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)}{x^n}=c\neq0$，从而有　$n=3,c=-\frac{4}{3}$.

20. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{f(x)-1}{\tan x}-\dfrac{e^x\sin x}{\tan^2x}\right)=2$，求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

【解】　由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin x}{\tan^2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\cdot x}{x^2}=\infty$，故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{\tan x}=\infty$.

又由 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{f(x)-1}{\tan x}-\dfrac{e^x\sin x}{\tan^2x}\right)=2$，知存在 $x\to0$ 时的无穷小量 $\alpha(x)$，使得

$$\frac{f(x)-1}{\tan x}-\frac{e^x\sin x}{\tan^2x}=2+\alpha(x)$$

成立. 则 $f(x)=2\tan x+\alpha(x)\tan x+\dfrac{e^x\sin x}{\tan x}+1$，从而

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(2\tan x+\alpha(x)\tan x+\frac{e^x\sin x}{\tan x}+1\right)=2.$$

21. 设 $f(x)$ 在 $0<|x|<\delta$ 时有定义，其中 δ 为正常数，且

$$\lim_{x\to0}\left[\cos x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}=e,$$

求极限 $\dfrac{f(x)}{x^3}$.

【解】　$\lim\limits_{x\to0}\left[\cos x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\left[1+\left(\cos x-1+\dfrac{f(x)}{x}\right)\right]^{\frac{1}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to0}\left[1+\left(\cos x-1+\frac{f(x)}{x}\right)\right]^{\frac{1}{\cos x-1+\frac{f(x)}{x}}\cdot\frac{\cos x-1+\frac{f(x)}{x}}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\cos x-1}{x^2}+\frac{f(x)}{x^3}\right]}=e,$$

即 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^3}=1$，而

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2},$$

故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^3}=\dfrac{3}{2}$.

22. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin3x}{x^3}+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)=0$，求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+3}{x^2}$.

【解】　因为

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin3x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin3x}{x}+f(x)}{x^2}=0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin3x}{x}+f(x)\right)=0$.

又$f(x)$在$x=0$的某邻域内二阶可导，因此$f(x)$，$f'(x)$在$x=0$处连续，从而$f(0)=-3$.

因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\sin 3x}{x}+f(x)}{x^2}=0$，所以$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\sin 3x}{x}-3+f(x)+3}{x^2}=0$，故

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+3}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3-\dfrac{\sin 3x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3x-\sin 3x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{3-3\cos 3x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3\sin 3x}{2x}=\frac{9}{2}.$$

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+3}{x}=\lim_{x\to0}x\cdot\frac{f(x)+3}{x^2}=0\times\frac{9}{2}=0.$$

由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+3}{x^2}=\dfrac{9}{2}$，将$f(x)$麦克劳林展开，得

$$\lim_{x\to0}\frac{f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2)+3}{x^2}=\frac{9}{2},$$

因此$\dfrac{1}{2}f''(0)=\dfrac{9}{2}$，于是$f''(0)=9$.

23. 设$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=c$，求$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x-1)]$.

【解】 由微分中值定理，存在$\xi\in(x-1,x+1)$，使

$$f(x+1)-f(x-1)=2f'(\xi).$$

注意到当$x\to\infty$时，$\xi\to\infty$，从而

$$\lim_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x-1)]=\lim_{x\to\infty}2f'(\xi)=2\lim_{\xi\to\infty}f'(\xi)=2c.$$

24. $[x]$表示不超过x的最大整数，试确定常数a的值，使$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right]$存在，并求出此极限.

【解】 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{\ln(1+e^{2u})}{\ln(1+e^u)}=\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{\dfrac{2e^{2u}}{1+e^{2u}}}{\dfrac{e^u}{1+e^u}}=\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{2(1+e^u)e^{2u}}{(1+e^{2u})e^u}=0$，$\lim\limits_{x\to0^-}a[x]=-a$.

又

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{2u})}{\ln(1+e^u)}=\lim_{u\to+\infty}\frac{2e^u(1+e^u)}{1+e^{2u}}=2,$$

$$\lim_{x\to0^+}a[x]=0.$$

故$-a=2$，即$a=-2$时上述极限存在，并且

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right]=2.$$

25. 若$x\to0$时$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$与$x\sin x$是等价无穷小量，试求常数a.

【分析】 本题考查等价无穷小量的定义.

【解法1】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{1}{4}ax^2}{x^2}=-\dfrac{a}{4}$.

由等价无穷小的定义知$-\dfrac{1}{4}a=1$，即$a=-4$.

【解法2】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{4}(1-ax^2)^{-\frac{3}{4}}(-2ax)}{\sin x+x\cos x}=-\dfrac{a}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(1-ax^2)^{-\frac{3}{4}}}{\sin x+x\cos x}$

$$=-\frac{a}{2}\lim_{x\to0}\frac{1}{\dfrac{\sin x}{x}+\cos x}=-\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{a}{4}=1,$$

即 $a=-4$.

26. 当 $x\to 0$ 时,$x-\sin x\cos x\cos 2x$ 与 cx^k 为等价无穷小量,则(　　)

(A) $c=\dfrac{8}{3},k=3$.　　(B) $c=\dfrac{8}{3},k=2$.　　(C) $c=\dfrac{2}{3},k=3$.　　(D) $c=\dfrac{2}{3},k=2$.

【解】 应选(A).

应用三角函数公式化简,有

$$x-\sin x\cos x\cos 2x=x-\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x=x-\frac{1}{4}\sin 4x.$$

由于 $\sin u=u-\dfrac{1}{3!}u^3+o(u^3)$,所以

$$\begin{aligned}x-\sin x\cos x\cos 2x&=x-\frac{1}{4}\left[4x-\frac{1}{6}(4x)^3+o(x^3)\right]\\&=x-x+\frac{1}{24}\cdot 4^3x^3+o(x^3)=\frac{8}{3}x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

因 $x\to 0$ 时,原式 $\sim cx^k$,所以 $c=\dfrac{8}{3},k=3$.

27. 设当 $x\to 0$ 时,$\ln(1+x)-(ax^2+bx)$ 是比 $x\arcsin x$ 高阶的无穷小量,试求常数 a 和 b.

【分析】 本题考查高阶无穷小量的定义,其中 $\ln(1+x)$ 要利用泰勒公式展开.

【解】 当 $x\to 0$ 时,$x\arcsin x\sim x^2$. 而

$$\ln(1+x)-(ax^2+bx)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(ax^2+bx)=(1-b)x-\left(\frac{1}{2}+a\right)x^2+o(x^2).$$

由条件知 $1-b=0,\dfrac{1}{2}+a=0$,即 $a=-\dfrac{1}{2},b=1$ 时,$\ln(1+x)-(ax^2+bx)$ 是 $x\to 0$ 时的比 $x\arcsin x$ 高阶的无穷小量.

28. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}, & 若\ x\neq 1,\\ 1, & 若\ x=1.\end{cases}$ 问 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否连续?若不连续,修改 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的定义,使之连续.

【分析】 本题考查分段函数在分段点处的连续性.

【解】
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}f(x)&=\lim_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{-\sin(x-1)}{\cos(x-1)}}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to 1}\frac{\tan(x-1)}{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{-\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}x}=-\frac{4}{\pi^2}\neq 1.\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)\neq f(1)$,故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续.

令 $f(1)=-\dfrac{4}{\pi^2}$,则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

29. 设函数 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x^2}, & x\neq 0,\\ f(0), & x=0,\end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导,$f''(0)\neq 0,f'(0)=0,f(0)=0$,则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的(　　)

(A) 第一类间断点.　　(B) 连续点.

(C) 第二类间断点.　　(D) 连续点或间断点不能由此确定.

【解】 应选(A).

$$\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0)\neq F(0),$$

所以 $x=0$ 是 $F(x)$ 的第一类(可去)间断点.

30. 设 $f(x)$ 连续,且 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{f(x)-1}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}\right]=3$,求 $f(0)$.

【解】 由 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{f(x)-1}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}\right]=3$ 知

$$\frac{f(x)-1}{x}-\frac{\sin x}{x^2}=3+\alpha(x),\text{其中}\lim_{x\to0}\alpha(x)=0.$$

$$xf(x)-x-\sin x=3x^2+\alpha(x)\cdot x^2,$$

$$f(x)=3x+1+\frac{\sin x}{x}+\alpha(x)\cdot x.$$

等式两边取极限,得

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left[3x+1+\frac{\sin x}{x}+\alpha(x)\cdot x\right]=2.$$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=2$.

31. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\arctan\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}$ 的间断点,并判别其类型.

【解】 $f(x)$ 的间断点为 $x=0$ 以及 $x-\dfrac{1}{x}=0$,即 $x=1$ 和 $x=-1$.

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\arctan\frac{1}{x-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\arctan\frac{x}{x^2-1}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{x^2-1}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x(x^2-1)}=\infty,$$

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点,且是无穷间断点.

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x^2}\arctan\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to1^-}\arctan\frac{x}{x^2-1}=-\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x^2}\arctan\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to1^+}\arctan\frac{x}{x^2-1}=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{1}{x^2}\arctan\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to(-1)^-}\arctan\frac{x}{x^2-1}=-\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}\arctan\frac{x}{x^2-1}=\frac{\pi}{2}.$$

故 $x=1$ 和 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点,且是跳跃间断点.

32. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(e^{nx}+1)}{1+x^2e^{nx}}$,讨论 $f(x)$ 的间断点,其结论为(　　)

(A) 不存在间断点.　　(B) $x=0$ 是可去间断点.

(C) $x=0$ 是跳跃间断点.　　(D) $x=0$ 是无穷间断点.

【解】 应选(D).

当 $x=0$ 时,$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0\cdot2}{1}=0$,

当 $x<0$ 时,$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(e^{nx}+1)}{1+x^2e^{nx}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+0}=x$,

当 $x>0$ 时,$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(e^{nx}+1)}{1+x^2e^{nx}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(1+e^{-nx})}{e^{-nx}+x^2}=\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x}$,

即 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}, & x>0.\end{cases}$

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点，故应选(D).

33. 证明方程 $\dfrac{x}{\mathrm{e}}-\ln x-\sqrt{2}=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内至少有两个实根.

【分析】 本题考查利用零点定理证明方程的根的存在性.

【解】 令 $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-\ln x-\sqrt{2}$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续，因为

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}-\ln x-\sqrt{2}\right)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}-\ln x-\sqrt{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}-\ln x\right)-\sqrt{2}$$

$$\xlongequal{令\, t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to0^+}\left(\frac{1}{\mathrm{e}t}-\ln\frac{1}{t}\right)-\sqrt{2}=\lim_{t\to0^+}\frac{1+\mathrm{e}t\ln t}{\mathrm{e}t}-\sqrt{2}=+\infty.$$

又 $f(\mathrm{e})=-\sqrt{2}<0$，故由零点定理，$f(x)=0$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 与 $(\mathrm{e},+\infty)$ 内至少各有一个实根，即 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内至少有两个实根.

34. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续，且 $f(0)=f(1)=0$，证明对实数 $a(0<a<1)$，必有 $\xi\in[0,1)$ 使 $f(\xi+a)=f(\xi)$.

【证】 令 $F(x)=f(x+a)-f(x)$. 因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续，$f(x+a)$ 应在 $[-a,1-a]$ 上非负连续，于是 $F(x)$ 在 $[0,1-a]$ 上连续. 且

$$F(0)=f(a)-f(0)=f(a)\geqslant0,$$
$$F(1-a)=f(1)-f(1-a)=-f(1-a)\leqslant0.$$

(1) 若 $F(0)=0$，　则 $\xi=0$ 即为所求；

(2) 若 $F(1-a)=0$，　则 $\xi=1-a$ 即为所求；

(3) 若 $F(0)\neq0$ 且 $F(1-a)\neq0$，则由零点定理，必存在 $\xi\in(0,1-a)\subset(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi+a)=f(\xi)$.

综上所述，存在 $\xi\in[0,1)$，使 $f(\xi+a)=f(\xi)$.

35. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，$\forall x\in[a,b]$，$a<f(x)<b$，且 $f'(x)\neq1$，$x\in(a,b)$. 试证：在 (a,b) 内方程 $f(x)=x$ 有唯一实根.

【证】 存在性. 令 $F(x)=f(x)-x$，显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，又 $F(a)=f(a)-a>0$，$F(b)=f(b)-b<0$，则由零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$.

用反证法证唯一性. 设存在 $\eta\in(a,b)$，$\eta\neq\xi$，使 $F(\eta)=0$，则由罗尔定理可知，在 η 与 ξ 之间存在一点 c，使 $F'(c)=f'(c)-1=0$，即 $f'(c)=1$，这与 $f'(x)\neq1$，$x\in(a,b)$ 矛盾.

36. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可微，当 $0\leqslant x<1$ 时，恒有 $0<f(1)<f(x)$，且 $f'(x)\neq f(x)$. 讨论在 $(0,1)$ 内存在唯一的点 ξ，使得 $f(\xi)=\int_0^{\xi}f(t)\,\mathrm{d}t$.

【证】 先证存在性.

令 $g(x)=f(x)-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，又

$$g(0)=f(0)>0,g(1)=f(1)-\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1[f(1)-f(t)]\,\mathrm{d}t<0.$$

由零点定理知，存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $g(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\int_0^{\xi}f(t)\,\mathrm{d}t$.

再证唯一性，用反证法.

假设存在 $\xi_1,\xi_2(\xi_1\neq\xi_2)$ 满足 $f(\xi)=\int_0^{\xi}f(t)\,\mathrm{d}t$. 不妨设 $\xi_1<\xi_2$. 显然 $g(\xi_1)=g(\xi_2)=0$，由罗尔定理，存在 $\eta\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得 $g'(\eta)=0$，即 $f'(\eta)-f(\eta)=0$. 这与条件 $f'(x)\neq f(x)$ 矛盾. 即假设不成立. 因此满足 $f(\xi)=\int_0^{\xi}f(t)\,\mathrm{d}t$ 的 ξ 是唯一的.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com