



# 数学 哲学

张景中  
科普文集

张景中 彭翁成◎著

ZHANGJINGZHONG  
KEPU-WENJI

长江出版传媒  
湖北科学技术出版社

探讨了数学哲学中的许多老问题。在介绍了古代和近代主要哲学家和数学诸流派的观点后，作者还表达了自己独到的见解。

张景中  
科普文集

ZHANG  
JINGZHONG  
KEPU WENJI

张景中  
彭翥成◎著

# 数学 哲学

长江出版传媒  
湖北科学技术出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

数学哲学 / 张景中, 彭翥成著. —武汉: 湖北科学技术出版社, 2017. 6

ISBN 978-7-5352-9533-0

I. ①数… II. ①张… ②彭… III. ①数学哲学—少年读物 IV. ①01-0

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第172475号

丛书策划: 何 龙 谢俊波

责任编辑: 杨宁巍

封面设计: 喻 杨

出版发行: 湖北科学技术出版社

电话: 027-87679451

地 址: 武汉市雄楚大街268号

邮编: 430070

(湖北出版文化城B座13-14层)

网 址: <http://www.hbstp.com.cn>

印 刷: 武汉市金港彩印有限公司

邮编: 430023

710×1010 1/16

15.25印张

270千字

2017年8月第1版

2017年8月第1次印刷

定价: 58.00元

本书如有印装质量问题 可找本社市场部更换

感谢湖北科学技术出版社督促我将这30多年里写的科普作品回顾整理一下。我想人的天性是懒的，就像物体有惰性。要是没什么鞭策，没什么督促，很多事情就做不成。我的第一本科普书《数学传奇》，就是在中国少年儿童出版社的文贇阳先生督促下写成的。那是1979年暑假，他到成都，到我家里找我。他说你还没有出过书，就写一本数学科普书吧。这么说了几次，盛情难却，我就试着写了，自己一读又不满意，就撕掉重新写。那时没有电脑或打字机，是老老实用笔在稿纸上写的。几个月下来，最后写了6万字。他给我删掉了3万，书就出来了。为什么要删？文先生说，他看不懂的就删，连自己都看不懂，怎么忍心印出来给小朋友看呢？书出来之后，他高兴地告诉我，很受欢迎，并动员我再写一本。

后来，其他的书都是被逼出来的。湖南教育出版社出版的《数学与哲学》，是我大学里高等代数老师丁石孙先生主编的套书中的一本。开策划会时我没出席，他们就留了“数学与哲学”这个题目给我。我不懂哲学，只好找几本书老老实实在地学了两个月，加上自己的看法，凑出来交卷。书中对一些古老的话题如“飞矢不动”“白马非马”“先有鸡还是先有蛋”“偶然与必然”，冒昧地提出自己的看法，引起了读者的兴趣。此书后来被3家出版社出版。又被选用改编为数学教育方向的《数学哲学》教材。其中许多材料还被收录于一些中学的校本教材之中。

《数学家的眼光》是被陈效师先生逼出来的。他说，您给文先生写了书，他退休了，我接替他的工作，您也得给我写。我经不住他一再劝说，就答应下来。一答应，就像是欠下一笔债似的，只好想到什么就写点什么。5年积累下来，写

成了6万字的一本小册子。

这是外因，另外也有内因。自己小时候接触了科普书，感到帮助很大，印象很深。比如苏联伊林的《十万个为什么》《几点钟》《不夜天》《汽车怎样会跑路》；我国顾均正的《科学趣味》和他翻译的《乌拉·波拉故事集》，刘薰宇的《马先生谈算学》和《数学的园地》，王峻岑的《数学列车》。这些书不仅读起来有趣，读后还能够带来悠长的回味和反复的思索。还有法布尔的《蜘蛛的故事》和《化学奇谈》，很有思想，有启发，本来看上去很普通的事情，竟有那么多意想不到的奥妙在里面。看了这些书，就促使自己去学习更多的科学知识，也激发了创作的欲望。那时我就想，如果有人给我出版，我也要写这样好看的书。

法布尔写的书，以十大卷的《昆虫记》为代表，不但是科普书，也可以看成是科学专著。这样的书，小朋友看起来趣味盎然，专家看了也收获颇丰。他的科学研究和科普创作是融为一体的，令人佩服。

写数学科普，想学法布尔太难了。也许根本不可能做到像《昆虫记》那样将科研和科普融为一体。但在写的过程中，总还是禁不住想把自己想出来的东西放到书里，把科研和科普结合起来。

从一开始，写《数学传奇》时，我就努力尝试让读者分享自己体验过的思考的乐趣。书里提到的“五猴分桃”问题，在世界上流传已久。20世纪80年代，诺贝尔奖获得者李政道访问中国科学技术大学，和少年班的学生们座谈时提到这个问题，少年大学生们一时都没有做出来。李政道介绍了著名数学家怀德海的一个巧妙解答，用到了高阶差分方程特解的概念。基于函数相似变换的思想，我设计了“先借后还”的情景，给出一个小学生能够懂的简单解法。这个小小的成功给了我很大的启发：写科普不仅仅是搬运和解读知识，也要深深地思考。

在《数学家的眼光》书中，提到了祖冲之的密率 $355/113$ 有什么好处的问题。数学大师华罗庚在《数论导引》一书中用丢番图理论证明了，所有分母不超过366的分数中， $355/113$ 最接近圆周率 $\pi$ 。另一位数学家夏道行，在他的《 $e$ 和 $\pi$ 》一书中用连分数理论推出，分母不超过8000的分数中， $355/113$ 最接近圆周率 $\pi$ 。在学习了这些方法的基础上我做了进一步探索，只用初中数学中的不等式

知识，不多几行的推导就能证明，分母不超过 16586 的分数中， $355/113$  是最接近  $\pi$  的冠军。而  $52163/16604$  比  $355/113$  在小数后第七位上略精确一点，但分母却大了上百倍！

我的老师北京大学的程庆民教授在一篇书评中，特别称赞了五猴分桃的新解法。著名数学家王元院士，则在书评中对我在密率问题的处理表示欣赏。学术前辈的鼓励，是对自己的鞭策，也是自己能够长期坚持科普创作的动力之一。

在科普创作时做过的数学题中，我认为最有趣的是生锈圆规作图问题。这个问题是美国著名几何学家佩多教授在国外刊物上提出来的，我们给圆满地解决了。先在国内作为科普文章发表，后来写成英文刊登在国外的学术期刊《几何学报》上。这是数学科普与科研相融合的不多的例子之一。佩多教授就此事发表过一篇短文，盛赞中国几何学者的工作，说这是他最愉快的数学经验之一。

1974 年我在新疆当过中学数学教师。一些教学心得成为后来科普写作的素材。文集中多处涉及面积方法解题，如《从数学教育到教育数学》《新概念几何》《几何的新方法和新体系》等，源于教学经验的启发。面积方法古今中外早已有了。我所做的，主要是提出两个基本工具（共边定理和共角定理），并发现了面积方法是具有普遍意义的几何解题方法。1992 年应周咸青邀请访美合作时，从共边定理的一则应用中提炼出消点算法，发展出几何定理机器证明的新思路。接着和周咸青、高小山合作，系统地建立了几何定理可读证明自动生成的理论和算法。杨路进一步把这个方法推广到非欧几何，并发现了一批非欧几何新定理。国际著名计算机科学家保伊尔（Robert S. Boyer）将此誉为计算机处理几何问题发展道路上的里程碑。这一工作获 1995 年中国科学院自然科学一等奖和 1997 年国家自然科学二等奖。从教学到科普又到科学研究，20 年的发展变化实在出乎自己的意料！

在《数学家的眼光》中，用一个例子说明，用有误差的计算可能获得准确的结果。基于这一想法，最近几年开辟了“零误差计算”的新的研究方向，初步有了不错的结果。例如，用这个思想建立的因式分解新算法，对于两个变元的情形，比现有方法效率有上千倍的提高。这个方向的研究还在发展之中。

1979—1985年，我在中国科学技术大学先后为少年班和数学系讲微积分。在教学中对极限概念和实数理论做了较深入的思考，提出了一种比较容易理解的极限定义方法——“非 $\epsilon$ 语言极限定义”，还发现了类似于数学归纳法的“连续归纳法”。这些想法，连同面积方法的部分例子，构成了1989年出版的《从数学教育到教育数学》的主要内容。这本书是在四川教育出版社余秉本女士督促下写出来的。书中第一次提出了“教育数学”的概念，认为教育数学的任务是“为了数学教育的需要，对数学的成果进行再创造。”这一理念渐渐被更多的学者和老师们认同，导致2004年教育数学学会（全名是“中国高等教育学会教育数学专业委员会”）的诞生。此后每年举行一次教育数学会年，交流为教育而改进数学的心得。这本书先后由三家出版社出版，从此面积方法在国内被编入多种奥数培训读物。师范院校的教材《初等几何研究》（左铨如、季素月编著，上海科技教育出版社1991年出版）中详细介绍了系统面积方法的基本原理。已故的著名数学家和数学教育家，西南师大陈重穆教授在主持编写的《高效初中数学实验教材》中，把面积方法的两个基本工具“共边定理”和“共角定理”作为重要定理，教学实验效果很好。1993年，四川都江堰教育学院刘宗贵老师根据此书中的想法编写的教材《非 $\epsilon$ 语言一元微积分学》在贵州教育出版社出版。在教学实践中效果明显，后来还发表了论文。此后，重庆师范学院陈文立先生和广州师范学院萧治经先生所编写的微积分教材，也都采用了此书中提出的“非 $\epsilon$ 语言极限定义”。

10多年之后，受林群先生研究工作的启发带动，我重启了关于微积分教学改革的思想。文集中有关不用极限的微积分的内容，是2005年以来的心得。这方面的见解，得到著名数学教育家张奠宙先生的首肯，使我坚定了投入教学实践的信心。我曾经在高中尝试过用5个课时讲不用极限的微积分初步。又在南方科技大学试讲，用16个课时不用极限讲一元微积分，严谨论证了所有的基本定理。初步实验的，效果尚可，系统的教学实践尚待开展。

也是在2005年后，自己对教育数学的具体努力方向有了新的认识。长期以来，几何教学是国际上数学教育关注的焦点之一，我也因此致力于研究更为简便有力的几何解题方法。后来看到大家都在删减传统的初等几何内容，促使我作战

略调整的思考，把关注的重点从几何转向三角。2006年发表了有关重建三角的两篇文章，得到张奠宙先生热情的鼓励支持。这方面的想法，就是《一线串通的初等数学》一书的主要内容。书里面提出，初中一年级就可以学习正弦，然后以三角带动几何，串联代数，用知识的纵横联系驱动学生的思考，促进其学习兴趣与数学素质的提高。初一学三角的方案可行吗？宁波教育学院崔雪芳教授先吃螃蟹，做了一节课的反复试验。她得出的结论是可行！但是，学习内容和国家教材不一致，统考能过关吗？做这样的教学实验有一定风险，需要极大的勇气，也要有行政方面的保护支持。2012年，在广州市科协开展的“千师万亩工程”支持下，经广州海珠区教育局立项，海珠实验中学组织了两个班的初中全程的实验。两个实验班有105名学生，入学分班平均成绩为62分和64分，测试中有三分之二的学生不会作三角形的钝角边上的高，可见数学基础属于一般水平。实验班由一位青年教师张东方负责备课讲课。她把《一线串通的初等数学》的内容分成5章92课时，整合到人教版初中数学教材之中。整合的结果节省了60个课时，5个学期内不仅讲完了按课程标准6个学期应学的内容，还用书中的新方法从一年级下学期讲正弦和正弦定理，以后陆续讲了正弦和角公式，余弦定理这些按常规属于高中课程的内容。教师教得顺利轻松，学生学得积极愉快。其间经历了区里的3次期末统考，张东方老师汇报的情况如下：

### 从成绩看效果

期间经过三次全区期末统考。实验班学生做题如果用了教材以外的知识，必须对所用的公式给出推导过程。在全区80个班级中，实验班的成绩突出，比区平均分高很多。满分为150分，实验一班有4位同学获满分，其中最差的个人成绩120多分。

	实验1班平均分	实验2班平均分	区平均分	全区所有班级排名
七年级下期末	140	138	91	第一名和第八名
八年级上期末	136	133	87.76	第一名和第五名
八年级下期末	145	141	96.83	第一名和第三名

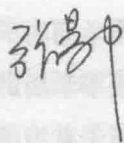
这样的实验效果是出乎我意料的。目前，广州市教育研究院正在总结研究经验，

并组织更多的学校准备进行更大规模的教学实验。

科普作品，以“普”为贵。科普作品中的内容若能进入基础教育阶段的教材，被社会认可为青少年普遍要学的知识，就普得不能再普了。当然，一旦成为教材，科普书也就失去了自己作为科普的意义，只是作为历史记录而存在。这是作者的希望，也是多年努力的目标。

文集编辑工作即将完成之际，湖北科学技术出版社刘虹老师建议我写个总序。我从记忆中检索出一些与文集中某些内容有关的往事杂感，勉强塞责。书中不当之处，欢迎读者指正。

湖北科学技术出版社何龙社长和谢俊波主任热心鼓励我出版文集；还有华中师范大学国家数字化学习工程中心彭翕成老师（《绕来绕去的向量法》作者之一，该书绝大多数例题和题解由他提供）为文集的出版付出了辛勤劳动，在此谨表示衷心的感谢。



2017年4月

张易中	张易中	张易中	张易中
张易中	张易中	张易中	张易中
张易中	张易中	张易中	张易中
张易中	张易中	张易中	张易中

## 第一章 “万物皆数”观点的破灭与再生

### ——第一次数学危机与实数理论 ..... 1

#### 1.1 毕达哥拉斯学派的信条

##### ——万物皆数 ..... 2

#### 1.2 第一个无理数 ..... 3

#### 1.3 无理数之谜 ..... 5

#### 1.4 连续性的奥秘 ..... 5

#### 1.5 戴德金分割 ..... 7

#### 1.6 连续归纳原理 ..... 9

#### 1.7 “万物皆数”的再生 ..... 11

#### 1.8 勾股定理的多种证明 ..... 12

#### 1.9 无理数与第一次数学危机 ..... 13

#### 1.10 中国古代文化中的“万物皆数” ..... 15

#### 1.11 一分为二和一分为三 ..... 18

## 第二章 哪种几何才是真的

### ——非欧几何与现代数学的“公理” ..... 21

#### 2.1 欧几里得的公理方法 ..... 22

#### 2.2 欧几里得的几何定理是真理吗 ..... 24

#### 2.3 非欧几何的发现 ..... 25

2.4	哪一个是真的	27
2.5	公理是什么	29
2.6	古今由圆外一点向圆作切线的不同	31
2.7	定义的多样性和局限性	32
<b>第三章 变量·无穷小·量的鬼魂</b>		
——第二次数学危机与极限概念		36
3.1	数学怎么描述运动与变化	38
3.2	瞬时速度	40
3.3	微分是量的鬼魂吗	42
3.4	无穷小量的再生	45
3.5	不用极限的微积分	47
<b>第四章 自然数有多少</b>		
——数学中的“实在无穷”概念		57
4.1	伽利略的困惑	59
4.2	康托,闯入无穷王国的先锋	60
4.3	希尔伯特的“无穷旅店”	63
4.4	所有的无穷都一样吗	65
4.5	自然数究竟有多少	69
4.6	有理数的自白	71
4.7	素数无穷的不同表述	72
4.8	数学的严格	73
<b>第五章 罗素悖论引起的轩然大波</b>		
——第三次数学危机		76
5.1	逻辑—集合—数	77
5.2	罗素悖论	79
5.3	集合的层次理论	80

5.4	集合论的公理化	81
5.5	连续统假设	82
5.6	地平线仍在前方	83
5.7	悖论与危机	86

## 第六章 数是什么

	——对数学对象本质的几种看法	89
6.1	1 是什么	90
6.2	柏拉图主义——数存在于理念世界	92
6.3	唯名论观点——数是纸上的符号或头脑中特定的概念	95
6.4	康德:数是思维创造的抽象实体	96
6.5	约定论的观点——数学规则不过是人的约定	97
6.6	逻辑主义——算术是逻辑的一部分	98
6.7	直觉主义——数学概念是自主的智力活动	99
6.8	形式主义——把数学化为关于有限符号排列的操作	102
6.9	争论与统一	105
6.10	存在与构造	106
6.11	$0.\dot{9}=1$ 吗	108

## 第七章 是真的,但又不能证明

	——哥德尔定理	111
7.1	哥德尔定理	114
7.2	说谎者悖论与理查德悖论	115
7.3	算术有多少种	116
7.4	数学的力量与局限	118
7.5	数学的局限与加密	120
7.6	数学的局限与博弈	121

## 第八章 数学与结构

## ——布尔巴基学派的观点 ..... 124

8.1 在逻辑长链的背后 ..... 126

8.2 形形色色的加法 ..... 129

8.3 基本的结构 ..... 133

8.4 分析与综合的艺术 ..... 136

8.5 布尔巴基学派和新数运动 ..... 140

## 第九章 命运决定还是意志自由

## ——必然性与偶然性的数学思考 ..... 142

9.1 两种对立的哲学观点 ..... 143

9.2 从偶然产生必然 ..... 149

9.3 从必然产生偶然 ..... 151

9.4 一场风暴或一口痰能影响民族的命运吗 ..... 153

9.5 什么叫必然? 什么叫偶然 ..... 155

9.6 抽屉原理 ..... 158

9.7 五百年必有王者兴 ..... 159

## 第十章 举例子能证明几何定理吗

## ——演绎与归纳的对立与统一 ..... 163

10.1 例证法——用演绎支持归纳 ..... 164

10.2 几何定理也能用例子证明 ..... 166

10.3 进一步的思考 ..... 170

10.4 验证三角形内角和定理 ..... 172

10.5 精确数学和近似数学 ..... 174

10.6 例证法与动态几何 ..... 176

## 第十一章 计算机正在改变数学 ..... 177

11.1 四色定理的机器证明 ..... 178

11.2	计算机证明的定理可靠吗	180
11.3	数学和计算机共同发展	183
11.4	《九章算术》的算法思想	184
11.5	几何信息搜索系统简介	184
11.6	机器证明软件简介	190
<b>第十二章 数学与哲学随想</b>		<b>198</b>
12.1	数学的领域在扩大,哲学的地盘在缩小	199
12.2	数学始终在影响着哲学	200
12.3	抽象与具体	202
12.4	涉及具体问题时,语言必须精确严格	203
12.5	个别与一般	206
12.6	事物与概念	209
12.7	“我不需要这个假设”	210
12.8	证实与证伪	211
12.9	数学世界是人的创造,但它是客观的	212
12.10	事物的总体性	213
12.11	变化中的不变	215
12.12	预言	216
12.13	“没有两件事物完全一样”	217
12.14	物极必反	221
12.15	论怀疑	222
12.16	量变与质变	225
12.17	罗素与“事素”	227

# “万物皆数”观点的破灭与再生

## ——第一次数学危机与实数理论

联系数学的发展历史学习数学哲学，有趣而且有效。

数学史为数学哲学的研究提供了背景资料，让我们看到不同时期的数学家对数学的看法，他们的思想是如何产生和发展的。

西方数学史言必称希腊，这是因为希腊确实有其值得荣耀的地方。第一章从古希腊的毕达哥拉斯学派讲起，因为他们最早提出了系统的数学哲学思想。在今天看来，他们掌握的数学知识不多，但志向不小。他们面对浩瀚宇宙，希望寻找万物的本原，提出了“万物皆数”这样一个大一统的命题，并为论证该命题作出了很多的努力。

对于毕达哥拉斯学派用数来解释万物及其变化规律，恩格斯给出很高的评价，认为“宇宙的规律性第一次被说出来了”。

毕达哥拉斯学派对后世的数学哲学思想有着深远的影响。

面对 $\sqrt{2}$ 这个新事物的出现，已有的体系已经容不下它。是把它驱逐出去，还是建立一个更大的体系来容纳它？

说清楚 $\sqrt{2}$ 需要建立实数系统，需要把什么是连续性说清楚。这是一个古老的哲学问题。毕达哥拉斯学派和后来的许多哲学家都没有解决这个问题。在2000多

年后，数学家解决了这个问题。因为这本质上是一个数学问题。

学习完本章，我们可以看到，数学和哲学自古以来就有密切的联系。

古代的哲学家大都是博学多才的人，他们不但能滔滔不绝地讲自己的哲学见解，还能讲自然现象、社会伦理，特别是数学的道理。你不要以为这是因为古人特别聪明，或是后来的哲学家不行了。这主要是因为那时各门科学还没有分家，哲学就是包罗万象的学问。另外，那时人类的知识比现在贫乏得多。所谓博学，是相对于当时多数人知识贫乏而言的。实际上，古代所谓精通数学的哲学家，他的数学知识未必赶得上今天的中学生。

在古希腊，哲学家大都格外重视数学。最早的唯物主义哲学家泰勒斯，提出原子唯物论的德漠克利特，最早的唯心主义哲学家毕达哥拉斯，都曾到埃及学习几何知识。创立理念论唯心主义体系的柏拉图，也特别推崇数学知识。在这些人当中，最推崇数学、在数学上成就最大的，当推毕达哥拉斯。

## 1.1 毕达哥拉斯学派的信条——万物皆数

毕达哥拉斯（约前 580—前 500）是古希腊著名的数学家和哲学家，早年曾游历埃及、波斯学习几何、语言和宗教知识，回意大利后在一个名叫克罗顿的沿海城市定居。在那里，他招收了 300 个门徒，建立了一个带有神秘色彩的团体，这个团体被人们称为毕达哥拉斯学派。

毕达哥拉斯被他的门徒们奉为圣贤。凡是该学派的发明、创见，一律归功于毕达哥拉斯。这个学派传授知识，研究数学，还很重视音乐。“数”与“和谐”，是他们的主要哲学思想。

他们沉醉于数学知识带给他们的快慰，产生了一种幻觉：数是万物的本原；数产生万物，数的规律统治万物。他们认为：1 是最神圣的数字，1 生 2，2 生诸数，数生点，点生线，线生面，面生体，体生万物。他们研究数与形状的关系，研究数与音乐的关系。

毕达哥拉斯强调事物间数量关系所起的重要作用，这在人类认识史上是一个进步。

与此类似，我国古代老子《道德经》中也有“道生一、一生二、二生三、三生万物”的说法，这也近于万物皆数的哲学思想，只是没那么明确和系统罢了。有趣的是，正是毕达哥拉斯学派自己的发现，导致了“万物皆数”理论的破灭。

## 1.2 第一个无理数

形如 $\frac{a}{b}$ 的数（其中 $a, b$ 是正整数），我们今天称之为分数，而毕达哥拉斯则认为 $\frac{a}{b}$ 并不是单个实体，而是两个整数之间的一个比例关系。在这样的基础上，毕达哥拉斯学派发展了初步的比例理论。

用现代数学的观点来看，整数有序对 $(a, b)$ 之间适当定义了运算，就叫有理数。但毕达哥拉斯认为分数表示的量既然能够用整数比来表示，那也就没有必要将分数单独列出来了。那么，是不是存在某一些量不能用整数比来表示呢？

毕达哥拉斯在欧洲是第一个发现勾股定理并给出证明的人。据说，他在观察地板上的方形图案时，发现以直角三角形的斜边为边长的正方形的面积（图1.2-1），恰好是以这个直角三角形的两条直角边为边长的两个正方形的面积之和，于是受到启发，进一步找出了一般证明。

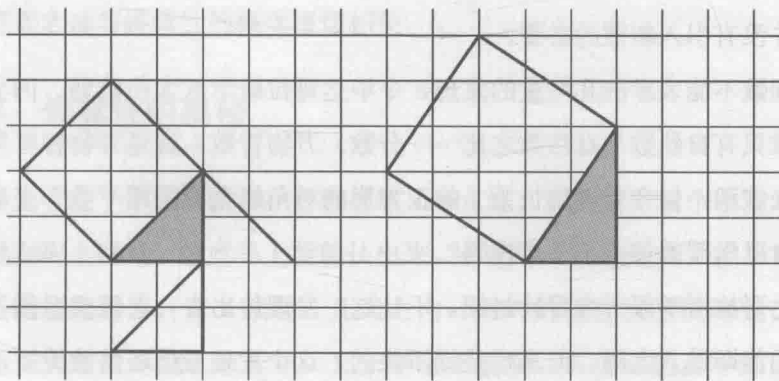


图1.2-1