

 理性派

身边的数学译丛

数学与现实世界： 进化论的视角

[以] 兹维·阿特斯坦 Zvi Artstein 著
程晓亮 张传兴 胡兆玮 译



 机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

身边的数学译丛

数学与现实世界： 进化论的视角

[以] 兹维·阿特斯坦 (Zvi Artstein) 著

程晓亮 张传兴 胡兆玮 译

机械工业出版社

本书以历史顺序, 展现了从古至今数学与现实世界之间的重要联系. 书中包含丰富的现代数学及其应用, 同时揭示了人类进化对于数学既是一种促进又是一种障碍, 数学严密的逻辑结构与人类进化所塑造的思考方式背道而驰, 从而也解释了数学学习的困难所在和正确的数学学习方式.

Mathematics and the Real World: The Remarkable Role of Evolution in the Making of Mathematics.

Amherst, NY: Prometheus Books, 2014. Copyright© 2014 by Zvi Artstein.

All rights reserved. Authorized translation from the English-language edition published by Prometheus Books. China Machine Press recognizes the following registered trademarks mentioned within the text: IBM[®], NBA[®], and Philadelphia 76ers[®].

本书由 Prometheus Books 授权机械工业出版社在中华人民共和国境内 (不包括香港、澳门特别行政区及台湾地区) 出版与发行. 未经许可之出口, 视为违反著作权法, 将受法律之制裁.

北京市版权局著作权合同登记: 图字 01-2016-6516 号.

图书在版编目 (CIP) 数据

数学与现实世界: 进化论的视角 / (以) 兹维·阿特斯坦 (Zvi Artstein) 著; 程晓亮, 张传兴, 胡兆玮译. —北京: 机械工业出版社, 2018. 12

(身边的数学译丛)

书名原文: Mathematics and the Real World: The Remarkable Role of Evolution in the Making of Mathematics

ISBN 978-7-111-61513-2

I. ①数… II. ①兹…②程…③张…④胡… III. ①数学 IV. ①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 267970 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 韩效杰 责任编辑: 韩效杰 陈崇昱 任正一

责任校对: 郑 婕 封面设计: 陈 沛

责任印制: 孙 炜

北京联兴盛业印刷股份有限公司印刷

2019 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

169mm × 239mm · 18 印张 · 298 千字

标准书号: ISBN 978-7-111-61513-2

定价: 69.00 元

电话服务

客服电话: 010-88361066

010-88379833

010-68326294

封底无防伪标均为盗版

网络服务

机工官网: www.cmpbook.com

机工官博: weibo.com/cmp1952

金书网: www.golden-book.com

机工教育服务网: www.cmpedu.com

译者序

本书作者阿特斯坦是以色列魏茨曼科学研究所杰出的教授，原书是希伯来文，本次的中文翻译参照的是英文翻译版本。这既是一部以进化论观点阐述数学发展的著作，又是一部探讨数学在进化中的重要角色的论著。全书从历史和哲学的视角，游走于数学的发展与自然选择之间，涵盖了纯粹数学与应用数学、天文学、物理学、生物科学、认知科学和教育科学等众多领域。

全书以简明的语言、严密的论述以及详细的注解生动活泼地讲述了数学与现实世界之间的重要联系，包括人类重大建筑中的数学、从古至今天体模型中的数学、现代物理学中的数学、人类行为中的随机数学、数学与计算机、教育行为中的数学，等等。通过阅读这部著作，我们能以全新的角度审视数学与现实世界，认识各门学科与数学之间千丝万缕的联系与渗透，无论是出于简单了解还是专门研究，研读本书都将受益匪浅。

在本书的翻译过程中，我们得到了机械工业出版社的充分信任以及热情鼓励与支持，还得到了吉林师范大学数学学院同事们的大力帮助，在此表示衷心的感谢。同时也要特别感谢众多学生在本书的初稿形成与修改中给予的帮助，他们既是翻译过程的参与者，又是本书的第一批读者。由于译者语言文字水平以及对全书的把控能力有限，翻译中定会有诸多纰漏与不足之处，恳请读者批评指正！

译者

前 言

有许多与数学有关的幽默故事，其中我最喜欢的一个是关于三个已经宣判要被绞死的人，这三个人中一个是工程师，一个是建筑师，一个是数学家。在被执行死刑的前夜，看守询问他们死前的最后一个请求。工程师的请求是展示他所设计的一款新机器，这款机器在不需要人类任何监管的情况下可以做各种类型的家务。看守承诺在第二天执行绞刑之前，他将有一个小时的时间来向监狱里的工作人员以及那两个即将被执行死刑的狱友展示他的机器。建筑师请求可以讲解他的新概念居所，一个能够保证冬暖夏凉，而且不需要制冷燃料的现代化住宅。看守再次承诺在第二天执行死刑之前，他也将有一个小时的时间来对监狱员工以及他的那两个即将被执行死刑的狱友来阐明其想法。而数学家说他最近证明了一个数学定理，这个定理将撼动整个数学的根基，他想在一次演讲中向聪明的观众解释他的证明。看守最初同意了，但是建筑师和工程师开始咆哮抗议，“我们希望今天晚上能提前执行绞刑！”

这个故事之所以吸引我，是因为它反映了公众对数学的普遍态度，即就数学而言，我们寄希望于从课本和讲座中得到知识。至于为何会有这样的态度，后面我们将给出一些原因，这里仅仅注意到，即使在学校中，数学知识还是在以课本和讲座的方式灌输给学生，而且它也与其他学科有很大的不同。在学校，学生被期待通过做数学练习来显示他们已经理解了所学的数学内容。其他学科，比如历史、文学，甚至是生物学却不会要求做这样的练习。这就造成了人们的一种印象，如果不进行解题训练，听数学课或者数学演讲就是毫无意义的。数学是这样一门学科，如果对于已经学习的内容不做练习，而只是直观上的理解，是不能被承认已经理解了所学内容的。然而，对于其他学科和一般原理，我们却能够接受这样的事实，即不需要进行练习就能够通过直观来掌握所学知识。这种观点是错误的，而且容易对人们产生误导，这对数学来讲也是不

公平的。此外，这种观点也与职业数学家的认识相违背。当然，他们必须对他们所研究的主题有深入的理解，但是对其他的数学领域有一个直观的理解也是有必要的。下面我将会做一个类比，当读者阅读这本书时，希望你们一直记住这个类比。

我喜爱古典音乐，会定期去听以色列爱乐乐团的音乐会，无论是现场的表演还是录音带我都非常喜欢。我不懂音乐，不知道音乐的详尽历史，也不知道不同作曲家们的生平。但我坚信的是，那些识乐谱并且非常熟悉音乐历史的人一定有自己的欣赏音乐的方式，在某种程度上他们的欣赏方式与我的方式是不同的。我并不确信他们是否比我更加享受这些音乐，举个例子来说，对于弹奏的任何音符，稍微不够精准的，他们都会发觉，然而我却完全注意不到。虽然与专家对艺术的理解水平不在一个层面上，但是我却非常享受音乐。这种享受或许不是来自纸面上的音符，而是来自曲调。不是单纯的“树木”与“树木”，而是“森林”。同样，在这本书里几乎没有任何的“音符”或是“树木”，主要是“曲调”和“森林”。如果本书中有一个或者几个“音符”偶尔出现，在对整篇文章大意不产生影响的情况下，可以把它跳过去。

本书的不同章节之间是有联系的，我是以这样的理念来呈现内容的，即书中的每一节也都是独立的，可以不依赖于其他章节来单独阅读。章标题和节标题都表明了其所阐述内容的中心思想。显然要从第一章开始阅读本书，但是随后读者就可以直接阅读第五章或者跳到第六章，甚至直接跳到最后一章。

自然地，像这样一本书不能在有以下因素的情况下写就，如信息、观点的碰撞以及各种帮助，这些帮助来自于朋友、同事、学生，还有我所开设的有关书中主题的各种研讨会中那些听过演讲的人，我的翻译、编辑、出版团队，当然还有我的家庭。对我来说，还有太多的人，在此不能一一列举。真诚地感谢所有帮助过我的人。

整本书主要是讲述什么呢？这本书致力于阐述自然界中的数学和数学的本质，以及它们之间的内在关联。我们会同时从历史的视角和当前研究两个方面出发，来描述数学与现实世界以及我们社会生活之间的联系。书中的讨论也会涉及与数学息息相关的科学领域和社会领域。因此，我们也会用数学来描述科学事实与社会情况。当我们只是致力于阐述各个领域的数学问题时，这里的陈述就不会是透彻详尽的。书中的讨论也会不时地伴随着这样的问题，即人类的进化对数学发展与应用的影响程度。我们还会审视这样的观点，即在数百万年

数学与现实世界：进化论的视角

的进化中，人类思想被塑造的方式影响了人类的数学能力和数学形式，一种易于形成与理解的数学形式。我们也认为，很大程度上，人类理解数学的其他某个领域有一定的困难，其中进化是有责任的。我们会尝试着用最少的音符谱写出动人的乐章。

兹维·阿特斯坦

魏茨曼科学研究所

目 录

译者序

前言

第一章 进化、数学与数学的进化	1
1. 进化	1
2. 动物世界中的数学能力	5
3. 人类的数学能力	8
4. 数学产生的进化优势	12
5. 数学没有进化优势	16
6. 早期数学文明	19
7. 接下来是希腊人	24
8. 希腊人的动机是什么	35
第二章 数学与希腊人的世界观	38
9. 基础科学的起源：提问题	38
10. 第一个数学模型	40
11. 柏拉图主义与形式主义	44
12. 天体模型	46
13. 希腊科学认知论	48
14. 天体模型（续）	50
第三章 近代早期的宇宙观与数学	55
15. 太阳重新成为中心	55
16. 巨人的肩膀	57
17. 椭圆与圆	61
18. 接下来是牛顿	66

数学与现实世界：进化论的视角

19. 关于微积分和微分方程你想知道的一切	67
20. 牛顿定律	70
21. 目的：极小原则	75
22. 波动方程	77
23. 现代科学的认知	79
第四章 数学与现代世界观	81
24. 电学与磁学	81
25. 接下来是麦克斯韦	83
26. 麦克斯韦理论和牛顿理论之间的差异	88
27. 世界的欧氏几何	89
28. 接下来是爱因斯坦	94
29. 自然界中量子态的发现	101
30. 奇妙的方程	103
31. 粒子群	106
32. 弦论的到来	109
33. 从另一视角来看柏拉图主义	111
34. 科学方法：有另一种选择吗	113
第五章 数学的偶然性	116
35. 世界上动物的进化和随机性	116
36. 古代的概率和博弈	119
37. 帕斯卡和费马	122
38. 快速发展	125
39. 数学的预测和误差	128
40. 来自经验的数学学习	133
41. 概念的形式化	135
42. 直觉与数学随机性	139
43. 直觉与随机统计	144
第六章 人类行为中的数学	147
44. 宏观思考	147
45. 稳定婚配问题	150
46. 偏好与投票系统	153

47. 对抗中的数学	158
48. 期望效用	166
49. 决策的不确定性	168
50. 演化理性	174
第七章 计算与计算机	179
51. 计算数学	179
52. 从表格到计算机	184
53. 数学的计算	189
54. 高概率证明	195
55. 编码	199
56. 下一步会怎么样	201
第八章 真的没有疑问吗	207
57. 无公理的数学	207
58. 缺乏几何学的严格化发展	209
59. 数集和集合的逻辑	212
60. 主要危机	219
61. 另一个主要危机	222
第九章 数学研究的本质	226
62. 数学家是怎样思考的	226
63. 论数学研究	231
64. 纯粹数学与应用数学	238
65. 数学美的功效和普遍性	245
第十章 为什么教数学和学数学都如此困难	252
66. 为什么学习数学	252
67. 数学思维——不存在的东西	253
68. 家长会	256
69. 数学教学的逻辑结构	260
70. 数学教学中的困难是什么	263
71. 数学的多面性	269
后记	272
参考文献	273

第一章

进化、数学与数学的进化

- 进化能够影响数学吗？
- 马会算术吗？
- 老鼠呢？
- 婴儿可以做加减法吗？
- 哪一种矩形会使我们感到愉悦？
- 为什么婴儿会觉得小丑可怕？
- 爱尔兰的绵羊是什么颜色的？
- 在 4, 14, 23, 34, 42, 50, 59, ... 这个数列中，下一个数字是什么？
- 如何化圆为方（求与已知圆面积相等的正方形）？
- 怎样让视错觉为科学做贡献？

1. 进化

进化理论的提出归功于查尔斯·罗伯特·达尔文（Charles Robert Darwin, 1809—1882），但是达尔文也不是最先开始进行进化研究的人。所罗门王（King Solomon）说：“日光之下并无新事。”（《传道书》Ecclesiastes 1:9）这是一条哲学的声明，暗指世界处于一种不断变化的状态中。在任何给定的时间中，我们可以看到我们周围的情景，我们也遵循发生在我们生命中的变化，并且我们可以意识到在一段时间内发生的变化，但我们却无法直接观察到。那些有关过去发生的变化的证据常常让我们能够推断出这些变化发生的原因。这适用于物质世界，比如岩石、植物和动物，也适用于社会，包括行为模式、时尚、文学、药物试验和科学。这些改变都根据自身的原理而发生。有时对于我们来说，什么生存下来了、什么变化了、什么消失了都是再明显不过的了，但要想辨别出它们的原理却并不总是那么简单。

让我们以地球表面为例。一些岩石存在多年，然而其他岩石却被风化、侵

数学与现实世界：进化论的视角

蚀殆尽。是什么使它们变得不同的呢？显然是不同的质地决定了它们生存能力的不同。玄武岩会一直存在，然而石灰石却会粉碎。不会有沙丘存在于山顶，因为它们会被风吹走。我们可以说这是物竞天择，适者生存。我们可以推断出由玄武岩构成的山峰在生存竞争中具有更大的优势。这一关于岩石的论断在研究领域是微不足道的，我们并不经常研究岩石的生存能力。但是我们得出的结论是，无论是岩石还是人类社会，更能适应环境就意味着更容易生存。历史学家穷尽了人类历史，试着去理解为什么一个特定的社会形态还存在，而其他的却消失了，他们的结论通常会提及通过战争而获得留存下来的优势。我们也可以了解到社会或者物种从它的本质特性中发展起来所需要的条件。同样地，从它发展的条件，我们也可以了解到让它在竞争中胜出的优势。

达尔文对进化论做出了重大贡献，他发现了不同物种改变和进化的原理。不像拉马克（Lamarck），他认为每一个物种都会去适应环境，并且它们的特征从诞生一直保留到灭绝。达尔文对于每个物种都会经历的改变提出了一种不同的原理。这种原理有两个主要因素：突变和选择。在繁衍过程中个体经历突变，这使得它们的自身特征产生一种随机而普遍的微小变化。拥有最适合环境特征的个体以最快的速度繁衍，这就构成了一种选择，这种选择导致每个物种在连续遗传过程后能更好地适应环境条件。在对同一种食物资源进行竞争的物种之中，只有最适应环境的物种才会生存下来。

查尔斯·罗伯特·达尔文出生于英国小镇什鲁斯伯里的一个颇有地位的家庭中，他的父亲罗伯特是一个富有的内科医生。他的祖父伊拉兹马斯·达尔文（Erasmus Darwin）在查尔斯出生之前就去世了，但是他的手稿被查尔斯获得。伊拉兹马斯是一个哲学家、自然主义者，他支持由法国自然主义者让-巴普蒂斯特·拉马克（Jean-Baptiste de Monet, Chevalier de Lamarck, 1744—1829）提出的进化论。年轻的查尔斯接触到这些科学研究，但他并不是一个勤勉的学生。相对于投身研究，他更喜欢去探索自然，收集不同的标本，特别是不同种类的甲壳虫。23岁时他作为科学家被邀请加入了一支航海探险队，船名叫作贝格尔号（Beagle）。探险的主要目的是为英国皇室画出澳大利亚和南美洲的海岸线。他的工作是收集和分类地质学、动物学和植物学的样本。在航海的过程中，达尔文记下了发现的相似且不同的物种，特别是在加拉帕戈斯群岛附近区域中。就是在那里他构思出了由突变和选择组成的进化论雏形。这也标志着达尔文的动植物进化论的发展受到了政治哲学家托马斯·马尔萨斯（Thomas Malthus，生

活在达尔文时期的半个世纪以前) 的人类社会的人口统计和经济发展相关理论的深远影响。在达尔文的自传中也表现出他是一个谦逊又有智慧的人, 在他的陈述中充满了对于进化论的深刻理解, 这超出了他所掌握的知识水平。例如, 他提到, 年长于他的同事莱纳德·杰宁斯 (Leonard Jenyns), 他们之间有过很多关于自然的讨论, 他写道: “最开始我不喜欢他, 由于他有点尖刻和冷酷的表达, 第一印象是难以改变的, 但是我完全错了。” 在这本书中还继续讨论了有关第一印象难以改变和进化之间的联系。

虽然达尔文向他的同事们分享了他对进化的看法和他所发现的能支撑进化理论的丰富论据, 他的同事中不乏一些在那个时代非常知名的英国科学家, 但达尔文却拒绝出版他的发现。达尔文同意只有在阿尔弗莱德·华莱士 (Alfred Wallace) 提交出版论文之后再出版他的理论。华莱士是一个年轻的自然研究学者, 经历了很多次从南美到远东的航海, 他的论文中包含了一些和达尔文相近的想法, 但理论基础却十分薄弱。达尔文的朋友意识到这件事, 并且催促他尽快出版他的书《物种起源》。因此, 当这一理论首次发布时, 华莱士的文章和达尔文的理论同时出现了。

达尔文之所以长时间犹豫要不要出版他的理论是有一些原因的。一方面是源自与宗教信仰之间可能产生的矛盾, 即不同物种的存在是因为它们被创造出来时就是这样的。达尔文的妻子艾玛 (Emma) 有着十分热诚的宗教信仰, 达尔文不希望让她伤心。他对于发表进化论的犹豫还有另一个同样重要的原因, 那就是尽管他拥有的可支配的财富能维持进化论的研究, 但这一理论的有些方面还是没有被论证的, 而且缺少一个科学的依据。尤其是达尔文不能提供出导致突变的生物理论。这个生物理论直到 20 世纪中期才发现, 即某种 DNA 分子中的基因编码在重新组合时会产生随机性的突变。

基因的突变与选择是现代人们对植物与动物进化过程理解的基础。基因带来的特征对于每一个生物的生存和发展都是至关重要的。整体的基因和它们表现的方式有时是对环境的反应, 这就确定了物种的特征。基因的改变使得物种发生变化, 然而, 除了基因自身的突变以外, 关于进化还有很多需要学习的内容。通过学习物种生存、发展以及在物种竞争中存活下来的条件, 我们可以了解到, 物种的特征被编码到基因上并代代遗传。这一点换个角度看也是正确的, 即在任何给定时刻, 可见的基因特征都能让我们了解到在什么条件下物种才能够发展。

数学与现实世界：进化论的视角

下面的例子显示了我们如何学习到物种发展的条件和它们如今的特征之间的联系。几年前，我去加拉帕戈斯群岛旅行时偶然发现了这样的例子，即有关于鸟类的求偶过程。



左边图片中岩石上的鸬鹚不会飞，它住在靠近海边的悬崖上，那里的风十分强劲。它所需要的能力就是找到小树枝来建造家园，这对于在严酷环境中生长的它们来说是至关重要的。在它的求偶期，雄性鸬鹚会向未来的配偶展示自己是如何收集小树枝的，以此显示其建造它们共同家园的能力。雌性鸬鹚只有当雄性向它展示了这一能力之后才会对其加以回应。中间的图片是军舰鸟，在它的求偶期，雄鸟会鼓起自己的喉囊直到它看起来像一个巨大的红色气球，它做这件事是为了向未来的配偶展示自己的肺部力量以及长途飞行时从水面上叼起鱼类的能力。右边的图片是蓝脚鲣鸟，在求偶期它展示了完全不同的能力，雄鸟培育鸟蛋并用大脚盖住鸟蛋来保护它们。因此，它会向自己的未来伴侣展示它脚的大小与形状，以此来证明它保护鸟蛋的能力。它们会一起抵御外敌、克服无处栖身以及恶劣的天气等困难。

这些例子都说明，我们如今所看到的动物特征和行为模式暗示了那些特性在动物进化过程中的重要性，也向我们展示了这些物种是如何在生存竞争中存活下来的。

使动物在物种竞争期间获胜的基本特征是被编码到基因中的，我们可以称其为天赋。猎豹的速度、鹰的眼睛、猫爬树的能力都是天赋。跑得快是猎豹与生俱来的最基本的能力。它也会从父母那里得到帮助来学习需要害怕什么、怎样打猎，甚至怎样奔跑更有效率。但是最基础的特征：速度和捕猎能力是被编码到基因中的。与之相同的是，猫的基因让它能够学习如何去抓住老鼠，一只老鹰先天的特征使得它有敏锐的视觉，使其能从一个很高的地方去鉴别一个隐藏着的猎物。学习只会改善和提高先天的特性，每个物种的特性能够使我们了解物种成长的条件。同样地，了解物种成长的条件能够使我们了解进化特性。

假设动物身体的特性是刻在基因中的先天特性的说法是合理的，同理，也可以将其应用于一些精神的特性上。精神和社会技能也在生存竞争中扮演着重

要角色，所以这也是物种选择强化特性并以此来帮助其打败其竞争者的原因。特别地，在繁殖过程中精神上的特性也能通过突变被改变，甚至被提高。在接下来的部分中我们将从进化方面测试人类在数学上的能力。我们将要讨论的是，理解并使用数学是否就是进化发展的结果，或者说数学是否是为了解一时之需而由大脑功能衍生出来的副产品。

2. 动物世界中的数学能力

如果数学能力在进化斗争中做出了贡献，并带来了当前人类在各个物种中所占据的优势地位，那么可以认为其他生物也拥有一定程度上的数学能力。但是数学能力是什么意思呢？数学是一个广泛的话题和概念上的理论。因此，问题是哪些数学特征能够提供进化的优势？后续的问题是，我们如何能鉴别动物中的这些数学能力？

最基本的数学能力是计数。它是在理解了数字这一抽象研究对象的概念以及拥有进行简单算术运算（例如加法和减法）的能力之后才有的。我们将从成年动物开始讨论这些简单计数能力的存在。母猫把小猫从一个地方移动到另一个地方时，一般都不会忘掉一两只小猫，当它完成移动时，通常不会再回来检查是否移走了所有的小猫。它可能是能够单独记住它们中的每一个，但母猫对数量很敏感这种说法更为合理。定量估计的本能显然提供了进化优势，因此我们不该惊讶于成年动物能够拥有这种能力。但是这种能力又能否延伸出计数和执行算术操作的能力呢？

在举出几个令人信服的例子来表明一些动物有数学能力之前，有一个警告。一般的实验结果，特别是动物实验的结果应该非常小心地加以解释。一个众所周知的例子是“聪明的汉斯（Clever Hans）”（关于这个故事以及本节后面提到的研究的更多细节和参考资料，可以在 Dehaene [1997] 和 Devlin [2000] 的专著中找到）。19 世纪末，一匹被称为“聪明的汉斯”的马在德国巡回展览，其教练为威廉·冯·奥斯顿（Wilhelm von Osten）。这匹马明显地展示出了其在加法、减法、平方、简单除法等方面的非凡能力，所有这些都具有非常高的成功率，这匹马有时也会出错，但是这些错误却出现得不是很频繁。这匹马展示其能力的方法是：当读出或在板子上写出练习题时，它会用马蹄子的敲击次数对应答案中的正确数字。有人怀疑，这种行为只是一个聪明的骗局，教练以某种

数学与现实世界：进化论的视角

方式或其他人设法给马正确的答案。为了验证这匹马的行为，人们成立了一个官方委员会，它由名为卡尔·斯图姆夫（Carl Stumpf）的心理学家领导，其成员包括柏林动物园的园长。委员会检查马是否可以在教练不在场的情况下解决问题，结果发现，教练不在场时，马仍然可以给出正确的答案。由此得出的结论是，一些动物具有相当高的数学能力。随后，在1907年由另一位名为奥斯卡·方斯特（Oscar Pfungst）的心理学家所做的更详细的测试表明，马并不知道数学。训练师确实可信赖并且诚实，但这匹马已经学会了去区分他的面部表情以及当其不在场时观众的面部表情中的无意识的变化。当马的蹄子敲击达到正确的数量时，马可以从那些人的面部表情中理解到。训练师或观众的存在是极其重要的。奥斯卡·方斯特发现，如果训练师看起来紧张的话就是答案错误，可见马作答的根据是面部表情而非正确答案。鉴于这种情况，他所开发的研究方法现在被认为是心理研究的突破。

更加坚实的科学实验已经证明，一些动物确实具有数学能力。德国动物学家奥托·科勒（Otto Koehler, 1889—1974）早在20世纪30年代就证明，某些鸟类可以识别具有给定数量元素的集合。显然，训练一只鸽子在面对多堆种子时，从中选择出每三粒一堆的种子并不困难。松鼠也可以被训练，使得其面对包含不同数量的坚果的盒子时，可以选择具有正好五个坚果的盒子。这些动物的数字识别能力是有限的。科勒自己发现，即使是最有能力的动物也不能鉴别超过7个元素的集合。通过查阅相关文献，这个数字也与人类大脑可以处理的信息单元的数量有关。数字7，将在类似的情况中再次出现。然而，这些实验证明了动物估计数量的数学能力，但是尚未证明它们计数或掌握数字的抽象概念的能力。

我们知道，成年乌鸦已经能够在一定限度内计数。食物放在建筑物附近，乌鸦很快就知道，当有人在建筑物内时，尝试接近食物是危险的。虽然它不能看到建筑中的情况以检查是否有人在里面，但它可以看到有人进入或离开。著名的文献资料中记载（必须说明，这是没有经过科学检验的）：几个人一个接一个地进入了建筑物。只要他们留在建筑物中，乌鸦就不会接近。建筑物里的人们一个一个地离开。只有当乌鸦准确地知道进入建筑物的所有人都已经离开后，它才会接近食物。显然乌鸦计数的准确性是有限度的，就像人类对于确定大数字的能力是有限度的一样。乌鸦以这种方式计数的量可高达5或6，且具有高度的准确性。在这个示例中，乌鸦识别具有给定数量的元素的集合的能力，而这

在其他物种的实例中也得到了证明，并且与进化优势是一致的。

计数的能力显然在生存斗争中会获得优势，但这在鸟类世界中是如何起源的我们不得而知。毕竟，在乌鸦的进化中，并不知道它们多长时间才会遇到这种情况，即不得不计算进入和离开建筑物的危险动物的数量的情况。具体来说，不清楚这种表面上的计算是否实际上是在做数学意义上的计算。换句话说，乌鸦是否有能力了解进入建筑物的人数，无论这种行为是否是有意识的，还是只记住谁进来、谁出来？

猴子被发现有更强的计算和做比较的数学能力。下面的实验是由宾夕法尼亚大学的盖伊·伍德拉夫（Guy Woodruff）和大卫·普利马克（David Premack）所做的（他们的论文于1981年发表）。他们多次向一只黑猩猩展示全满和半满的玻璃杯，并且每次都教导它选择半满的玻璃杯。随后让这只黑猩猩选择一整个苹果或半个苹果，它选择了半个苹果。换句话说，它将数学原理从玻璃杯推广到了苹果。以类似的方式教导黑猩猩展示简单的数学能力，例如认识到半个苹果和四分之一苹果的组合是苹果的四分之三。在另一个实验中，将两个托盘放置在黑猩猩面前。第一个盘子有两堆巧克力，一堆三块，另一堆有四块。第二个托盘也有两堆巧克力，一堆五块，另一堆一块。在大多数情况下，黑猩猩会选择具有更大总数的托盘。这还不能证明黑猩猩能够理解数字的抽象概念或数字的加法，但却是黑猩猩具有数学能力的证据。这并不奇怪，因为这种能力构成了进化优势。

另一个动物实验证明，抽象的数字概念在某些程度上是存在的，即使是在不太发达的动物中。这个实验是由布朗大学的拉塞尔·丘奇（Russell Church）和沃伦·梅克（Warren Meck）进行的（研究结果发表于1984年）。这种训练老鼠的方式并不难，当它们一个接着一个地听到两声嘟嘟声时，能够得到足够多的美味食物。同样地，当它们看到两次闪光时也可以安全地吃到食物。然而，它们被教导，当听到四次嘟嘟声或看到四次闪光时吃食物是危险的，因为会受到电击。听觉或视觉信号，即嘟嘟声或闪光，通过两种不同的感觉——听觉和视觉在大脑中被接收和处理。小鼠能够做出正确反应，并达到了很高水平，如果听到两次嘟嘟声或看到两次闪光时就会接近食物，听到四次嘟嘟声或看到四次闪光时就不会接近。当小鼠受到充分训练时，听到两次嘟嘟声，紧接着两次轻微的闪光。你认为它们会如何反应？小鼠会认为信号是两次信号而去吃食物，还是会将它们理解为四次信号而远离？如果它们的反应是后者，则可以假定它