"十三五"移动学习型规划教材

高等数学

下册 第2版

HIGHER MATHEMATICS

杜洪艳 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

"十三五"移动学习型规划教材

高等数学

下册

第2版

主　编　杜洪艳
副主编　胡满姑　韩世勤
参　编　高　萍　朱小红　洪　宁　栗　慧

机械工业出版社

本书是以国家教育部高等工科数学课程教学指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》为标准编写而成的．书中渗透了不少现代数学观点及数学文化，增加了部分数学实验的内容，以培养学生的专业素质、提高学生应用数学的能力为目的，充分吸收了编者多年来的教学实践与教学改革成果．

本书内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数．每节后配有相应的习题，每章末配有综合练习，书末附有部分习题的参考答案．

本书适用于普通高等院校本、专科高等数学课程的教学，也可作为科技工作者的参考用书．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册/杜洪艳主编．—2 版．—北京：机械工业出版社，2017.12

"十三五"移动学习型规划教材

ISBN 978-7-111-58790-3

Ⅰ．①高… Ⅱ．①杜… Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 320056 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰 汤 嘉
责任校对：张 薇 封面设计：菊 杨
责任印制：孙 炜
保定市中画美凯印刷有限公司印刷
2019 年 1 月第 2 版第 1 次印刷
184mm×260mm · 16.5 印张 · 402 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-58790-3
定价：43.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88379833	机 工 官 网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-88379649	机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
	教育服务网：www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版	金 书 网：www.golden-book.com

前　　言

科学的飞速发展和计算机的快速普及，使得数学在其他科学领域中的应用空前广泛，社会各个领域对数学的需求也越来越多，对各专业人才的数学素养要求也越来越高．本书是以国家教育部高等工科数学课程教学指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》为标准，以提高学生的专业素质为目的，在充分吸收编者多年来的教学实践和教学改革成果的基础上编写而成的．

“高等数学”是高校的基础课程之一，这门课程的思想和方法是人类文明发展史上理性智慧的结晶，它不仅提供了解决实际问题的有力的数学工具，同时还给学生提供了一种思维的训练方法，帮助学生提高作为应用型、创造型、复合型人才所必需的文化素质和修养．本书在编写过程中，注重强调数学的思想方法，重点培养学生的数学思维能力，并力求提高学生的数学素养，从而体现出数学既是一种工具、同时也是一种文化的思想．在内容选取上删去了传统本科教材中难而繁的内容，保留了高等数学在传统领域中的知识内容，渗透了不少现代数学观点，增加了一批各学科领域中的应用型例题以及以往传统教材中没有的数学实验，以利于学生更好地利用计算机来应用数学．通过对本书的学习，学生不仅达到会数学、更达到会用数学的目的．

本书对数学的基本概念和原理的讲述通俗易懂，同时又兼顾了数学的科学性与严谨性；对定义和定理等的叙述准确、清晰，并在节后配有相应的习题，每章末配有综合练习．本书适用于普通高等院校本、专科高等数学课程的教学，也可作为科技工作者的参考用书．

参加本书编写的人员有杜洪艳、胡满姑、韩世勤、高萍、朱小红、洪宁、栗慧等．全书的框架结构、统稿及定稿由主编杜洪艳负责．

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请专家及读者批评指正．

编　者

目　录

第 8 章

向量代数与空间解析几何

学习向量的概念以及向量的代数运算的定义和规则是向量代数的主要内容，这是研究数学、力学、电学的必备知识，也是学习工程技术科学和管理科学的有力工具．向量代数也是研究本章的空间解析几何以及后续的多元函数微积分学的必不可少的基础知识．

空间解析几何与平面解析几何类似，通过建立空间坐标系，使空间的每一个点与一个有顺序的三元数组对应，把空间的几何图形与方程或方程组对应起来，从而可以用代数方法解决几何问题．空间解析几何学的知识对于学习多元函数微积分和其他数学知识以及力学、电学等其他自然科学知识来说，也是必不可少的基础知识．

8.1 空间直角坐标系

在平面解析几何中，通过坐标法，把平面上的点与一对有顺序的数组对应起来，使平面上的几何图形与方程（或代数关系式）对应起来，从而达到可以用代数方法研究几何问题的目的[⊖]．

为了用代数方法研究空间的几何问题，首先必须将空间中的点与有顺序的数组对应起来．为此，必须建立这种对应的桥梁即空间的坐标系，本章只介绍空间直角坐标系．

8.1.1 空间直角坐标系的建立

过空间某一点 O 作 3 条两两互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点，且一般具有相同的长度单位．点 O 称为坐标原点，这 3 条数轴分别称为 x 轴、y 轴、z 轴，这 3 条轴统称为坐标轴．规定这 3 条轴的次

⊖ 这种将数学中的两大研究对象“数”与“形”统一起来的做法，是由法国哲学家、数学家笛卡儿首先提出来的，这种使“数”与“形”相结合，并用代数方法以及微积分的方法研究几何问题的数学方法和数学思想是数学发展史上的一次划时代的变革．

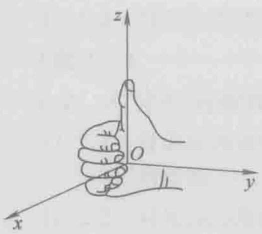

图 8-1

序和正方向要符合“右手法则”，即以右手握住 z 轴，当右手的除大姆指外的其他 4 个手指从 x 轴的正方向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转至 y 轴的正方向时，大拇指的指向就是 z 轴的正方向，见图 8-1. 这时，我们便在空间建立了一个空间直角坐标系，并称其为 $O\text{-}xyz$ 坐标系，如图 8-2 所示，我们习惯上分别称 x 轴、y 轴、z 轴为横轴、纵轴、竖轴.

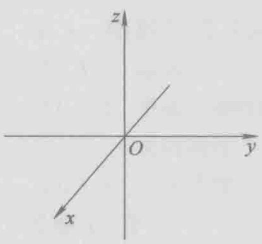

图 8-2

8.1.2 点的坐标的确定

建立了空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 之后，就可以建立空间中的点与 3 个有顺序的数构成的一个数组(以下简称三元有序数组)之间的对应关系.

设 M 为空间中一已知点，过点 M 作 3 个平面分别垂直于 3 个坐标轴，该平面与 x 轴、y 轴、z 轴的交点分别为 P、Q、R，如图 8-3 所示. 设这 3 点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次分别为 x、y、z. 这样空间中一点 M 就唯一地确定了一个三元有序数组，记为 (x,y,z). 反之，对于任何一个给定的三元有序数组 (x,y,z)，我们可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，再过点 P、Q、R 分别作 x 轴、y 轴、z 轴的垂面，这 3 个垂面的交点 M 便是由三元有序数组 (x,y,z) 所确定的唯一的一个点. 这样就建立了空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中的点 M 与一个三元有序数组 (x,y,z) 之间的一一对应关系，x、y、z 分别称为点 M 的 x 坐标、y 坐标、z 坐标，或者分别称为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标，并将点 M 表示为 $M(x,y,z)$.

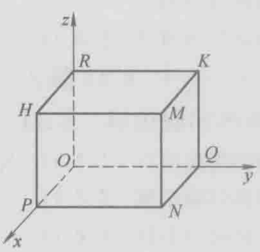

图 8-3

显然原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$.

在空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中，每两条坐标轴所在的平面称为坐标平面，如 x 轴与 y 轴所在的平面称为 xOy 平面，简称 xy 平面.

3 个坐标平面将空间分为 8 个部分，每一个部分叫作一个卦限，在 xy 平面的 4 个象限即第一、第二、第三、第四象限的上方(即 Oz 轴的正方向所指的方向)的 4 部分空间分别为第一、第二、第三、第四卦限，这 4 个卦限的下方依次分别是第五、第六、第七、第八卦限.

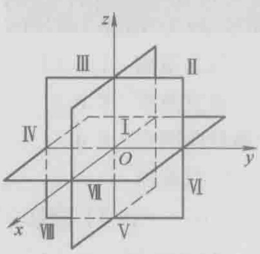

图 8-4

坐标平面与坐标轴上的点有一定的特征，xOy 平面、yOz 平面、xOz 平面上的点分别为 $(x,y,0)$、$(0,y,z)$、$(x,0,z)$；x 轴、y 轴、z 轴上的点分别为 $(x,0,0)$、$(0,y,0)$、$(0,0,z)$.

8.1.3 空间中两点间的距离

空间中两个点之间的距离公式是空间解析几何里的重要公式.

设已给两个点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，则此两点之间的距离 $|M_1M_2|$ 可由勾股定理得到(参阅图 8-5).

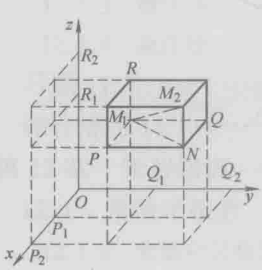

图 8-5

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2$$

$$= |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2$$
$$= |P_1P_2|^2 + |Q_1Q_2|^2 + |R_1R_2|^2$$
$$= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2,$$

所以点 M_1 与 M_2 之间的距离 d 为

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (8\text{-}1)$$

例 1　求点 $M(2,\ 3,\ -4)$ 与坐标原点 O 之间的距离 $|OM|$.

解　由公式(8-1)知点 M 与坐标原点 $O(0,\ 0,\ 0)$ 之间的距离为

$$|OM| = \sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{29}.$$

例 2　证明以点 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$ 和 $C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证　因为

$$|AB|^2 = \underline{\qquad\qquad\qquad} = 49,$$
$$|BC|^2 = (2-10)^2 + (4+1)^2 + (3-6)^2 = 98,$$
$$|CA|^2 = \underline{\qquad\qquad\qquad} = 49.$$

所以

$$|AB| = |CA| = 7,$$
$$|BC|^2 = |AB|^2 + |CA|^2.$$

因此 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

习题 8.1

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限：

$A(1,-2,-3)$；$B(-2,-1,3)$；$C(-2,1,-3)$；$D(2,1,-3)$.

2. 坐标平面上的点和坐标轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列各点所在的位置：

$A(0,0,-2)$；$B(2,-1,0)$；$C(0,2,0)$；$D(0,1,-2)$.

3. 自点 $P(a,b,c)$ 分别作各坐标平面和各坐标轴的垂线，写出各垂足的坐标.

4. 求点 $M(1,-2,3)$ 到各坐标轴的距离.

5. 证明以点 $A(4,3,1)$、$B(5,2,3)$、$C(7,1,2)$ 为顶点的三角形是一个等腰三角形.

6. 求在 z 轴上且与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

8.2 向量及其线性运算

8.2.1 向量的概念

在力学、物理学以及一些应用学科中，通常会遇到两类量，其中一类是只有大小的量，称为数量(也称纯量或标量)，如时间、质量、长度、面积等；而另一类量不仅具有大小而且还具有方向，我们称这种既有大小又有方向的量为向量(也称矢量)，如力、速度、加速度、位移、力矩等.

在数学上，往往用一条有方向的线段，即有向线段来表示向量.有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向，以 A 为起点、B 为终点的有向线段表示的向量记作 $\overrightarrow{AB}$ (见图 8-6). 有时也用一个黑体字母(即印刷体字母)表示向量，如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{v}$ 等，而在手写时，要在字母上方加上箭头，如 $\overrightarrow{AB}$、$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{v}$ 等.

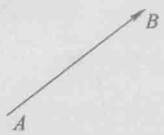

图 8-6

在实际问题中，有些向量与其起点有关(如质点的速度、位移、力)，有些向量与其起点无关. 由于一切向量的共性是它们都有大小和方向，因此在数学上只研究与起点无关的向量，并称这种向量为自由向量，简称向量，也就是在以后的研究中，只考虑向量的大小与方向，而不管它的起点在什么地方. 若是遇到与起点有关的向量时，可在一般原则下作特别处理.

由于我们只讨论自由向量，所以当两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，且方向相同时，就称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，并记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 这表明经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

向量的大小又称为向量的模. 向量 $\overrightarrow{AB}$、$\vec{a}$、$\boldsymbol{a}$ 的模分别依次记为 $|\overrightarrow{AB}|$、$|\vec{a}|$、$|\boldsymbol{a}|$. 向量的模是一个非负数.

模等于 1 的向量叫作单位向量.

模等于零的向量叫作零向量，记为 $\vec{0}$ 或者 $\boldsymbol{0}$. 零向量的起点与终点重合，它的方向可以看作是任意的.

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，若它们的方向相同或者相反，则称此两向量平行，并记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 两平行向量也可称为共线向量.

在直角坐标系中，以坐标原点 O 为起点、点 M 为终点的向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 的向径，此向量有时也用 $\boldsymbol{r}$ 或 $\vec{r}$ 表示.

下面介绍向量的加法、减法及数与向量的乘法，这三种运算称为向量的线性运算.

8.2.2 向量的加法

由物理学的结论可知，作用在一点处的两个力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 的合力 $\boldsymbol{F}$

是以 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 为邻边的平行四边形的对角线$\overrightarrow{OC}$所表示的力，如图 8-7 所示．此即所谓力的合成的平行四边形法则．仿此，可以对两向量的加法规定如下：

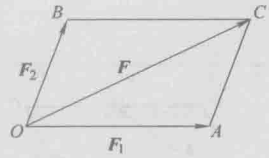

图　8-7

设两非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为不共线的向量，任意取一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，并作平行四边形 $OACB$，则向量$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和(向量)，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(见图 8-8)，即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

上述作两向量和的方法称为向量加法的平行四边形法则．

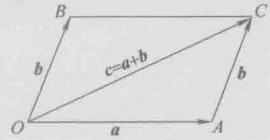

图　8-8

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是共线的非零向量，则规定其和 $\boldsymbol{c}$ 是如下之向量：

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同方向时，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 同方向，且 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反方向时，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 中模大的那个向量同方向，且 $|\boldsymbol{c}|=\big||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\big|$.

若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则规定 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$.

由几何学中平行四边形的性质并参阅图 8-8，我们可以给出两向量相加的三角形法则(请读者自己给出结论)，如图 8-9 所示．

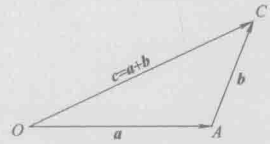

图　8-9

两向量的加法可以推广到多个向量相加的情形．

向量的加法符合下述运算规律：

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

8.2.3　向量的减法

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，则与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等但方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$. 我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差为

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

用几何作图方法可作出 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. 如图 8-10 所示之平行四边形法则及图 8-11所示之三角形法则．

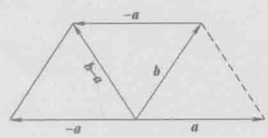

图　8-10

特别地，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

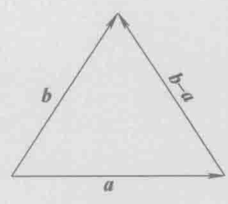

图　8-11

8.2.4　向量与数的乘法

设 $\boldsymbol{a}$ 是一个向量，λ 是一个实数，我们定义 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为一向量，它的模为

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|,$$

而方向规定为：

$$\begin{cases}\lambda\boldsymbol{a}\text{ 与 }\boldsymbol{a}\text{ 同方向，} & \text{当 }\lambda>0\text{ 时；}\\ \lambda\boldsymbol{a}\text{ 与 }\boldsymbol{a}\text{ 反方向，} & \text{当 }\lambda<0\text{ 时；}\\ \lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}, & \text{当 }\lambda=0\text{ 时}.\end{cases}$$

向量与数的乘法符合下列运算规则：

(1) 结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,

$$\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b.$$

这些规则可以用定义及几何方法予以证明，这里从略．

例1 已知 E、F 是平行四边形 $ABCD$ 的边 BC、DC 的中点，$\overrightarrow{AE}=a$，$\overrightarrow{AF}=b$，试用 a 与 b 表示 $\overrightarrow{BC}$ 和 $\overrightarrow{DC}$（见图 8-12）．

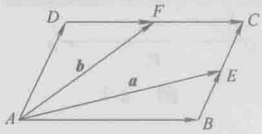

图 8-12

解 由三角形法则有

$$\begin{cases} a=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{DC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \\ b=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}, \end{cases}$$

解此向量方程组得

$$\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(4b-2a),$$

$$\overrightarrow{DC}=\frac{1}{3}(4a-2b).$$

例2 验证：当 $a\neq 0$，且 e_a 是与 a 同方向的单位向量时，

$$a=|a|e_a. \tag{8-2}$$

证 因为 $|a|>0$，所以 $|a|e_a$ 与 a 同方向，又因为

$$||a|e_a|=|a||e_a|=|a|\cdot 1=|a|,$$

所以式(8-2)的等号两端的向量是模相等且方向相同的向量，因而是两个相等的向量．

由式(8-2)立即可以得到用非零向量 a 表示的与它方向相同的单位向量

$$e_a=\frac{1}{|a|}a, \tag{8-3}$$

以及与 a 方向相反的单位向量

$$g_a=-\frac{1}{|a|}a. \tag{8-4}$$

例3 证明：当 $a\neq 0$ 时，b 平行于 a 的充分必要条件是，存在唯一实数 λ，使 $b=\lambda a$．

证 条件的充分性是显然的，以下只证明条件的必要性．

设 $b/\!/a$．取 $|\lambda|=\dfrac{|b|}{|a|}$，当 b 与 a 同向时，λ 取正值，当 b 与 a 反向时，λ 取负值，便有 $b=\lambda a$，这是因为此时 b 与 λa 同向，且

$$|\lambda a|=|\lambda||a|=\frac{|b|}{|a|}|a|=|b|.$$

再证明数 λ 的唯一性．设 $b=\lambda a$，又设 $b=\mu a$，则两式相减得

$$(\lambda-\mu)a=0,\text{从而}|\lambda-\mu||a|=0,$$

因 $|a|\neq 0$，故 $|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$． 证毕．

上述的例3是建立数轴的理论依据．我们知道，给定一个点、一

个方向及单位长度，就确定了一条数轴．而由一个单位向量既确定了方向，又确定了单位长度，因而，给定一个点和一个单位向量也就可以确定一条数轴．设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定了数轴 Ox（见图 8-13），则对于该数轴上任一点 P 就对应一个向量$\overrightarrow{OP}$，由于$\overrightarrow{OP}/\!/\boldsymbol{i}$，因此由例3，必有唯一实数 x，使$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$（实数 x 叫作轴上有向线段$\overrightarrow{OP}$的值），并知$\overrightarrow{OP}$与实数 x 一一对应．于是在数轴 Ox 上，

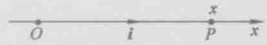

图 8-13

$$\text{点 } P \leftrightarrow \text{ 向量}\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i} \leftrightarrow \text{ 实数 } x,$$

从而数轴 Ox 上的点 P 与实数 x 有一一对应的关系．据此，定义实数 x 为数轴 Ox 上点 P 的坐标．

由此可知，数轴 Ox 上点 P 的坐标为 x 的充分必要条件是

$$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}.$$

*8.2.5 线性运算的抽象化

本节中，我们将向量的加减法及向量与数的乘法这三种运算称为向量的线性运算，实际上向量的减法是由加法定义的，因而减法可以归并到加法中去，这就是说，我们将向量的加法以及数与向量的乘法这两种运算称为向量的线性运算．为了今后能进一步学习现代数学的知识，我们将向量的线性运算抽象化．

记向量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$、…的集为 A，$\mathbf{R}$ 为实数集，则前述定义的加法及数与向量的乘法满足下述运算规律（设 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$、$\mathbf{0}\in A$，λ、$\mu\in\mathbf{R}$）：

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$;

(4) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$;

(5) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(6) $\lambda(\mu\boldsymbol{\alpha})=(\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha}$;

(7) $\lambda(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}$;

(8) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\alpha}$.

在数学中，将具有上述规律的运算称为线性运算．在现代数学中，线性运算是一个抽象的名词，所涉及集合 A 的元素一般也是抽象的，而不一定是向量，所涉及的运算也可能是某种对应，只要对集合 A 的元素规定一种对应，称其为加法，并记为$\oplus$，又对 A 的元素与某种数的集合的元素规定一种对应，称为数乘，并记为$\odot$，若这两种运算$\oplus$与$\odot$满足上述(1)～(8)这八条运算规律，则称这两种运算为线性运算．作为例子，请看下述的例4.

例4 设 A 是正实数集，$\mathbf{R}$ 是实数集．我们按下述规定定义加法：

$$a\oplus b = ab, a, b\in A;$$

并按下述规定定义数乘：

$$\lambda \odot a = a^{\lambda}, a \in A, \lambda \in \mathbf{R}.$$

可以验证加法$\oplus$和数乘$\odot$这两种运算符合上述八条规律，因而是线性运算.

习题 8.2

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，且 $|\boldsymbol{a}|=2$，试用有向线段表示下列向量：

$$\frac{3}{2}\boldsymbol{a}, -\frac{1}{2}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}^0, |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0, \frac{-1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a},$$

其中 $\boldsymbol{a}^0$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量.

2. 设 $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

3. 在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，$E$、$F$ 分别是棱 AB、CC' 的中点（见图 8-14），试用向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{EF}$.

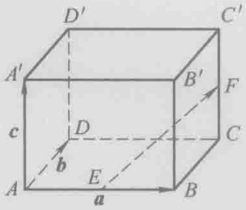

图 8-14

4. 用向量的方法证明：三角形两边中点的连线平行于第三边，且其长度等于第三边长度的一半.

5. 证明本节例 4 定义的运算$\oplus$与$\odot$是线性运算.

8.3 向量的坐标表达式

本节将讨论在空间直角坐标系中向量的表示方法，以及用此方法表示的向量的线性运算的方法，以消除上节中用几何方法作向量的线性运算的诸多不便.

8.3.1 向径的坐标表达式

建立空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$，以 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别表示与 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴同正方向的单位向量，这 3 个向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 称为空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 的基本单位向量，如图 8-15 所示.

任给一点 $M(x,y,z)$，作向径 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$，并以 OM 为一条对角线、以三坐标轴为棱作长方体 $OPNQ\text{-}RKMH$（见图 8-15）. 由于

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OR}$$
$$=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

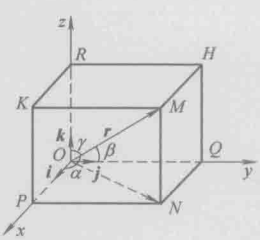

图 8-15

而 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$，

所以

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \tag{8-5}$$

上式称为向径 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表达式，$x\boldsymbol{i}$、$y\boldsymbol{j}$、$z\boldsymbol{k}$ 称为向径 $\overrightarrow{OM}$ 沿 3 个坐标轴的分向量，x、y、z 称为向径 $\overrightarrow{OM}$ 在直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中的坐标，向径 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表达式(8-5)有时也可简单地表示为

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\} \quad 或 \quad \boldsymbol{r}=(x,y,z). \tag{8-6}$$

若两个向径 $\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_2$ 的坐标表达式分别为

$$\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k},$$

则依上节中向量的线性运算规律可得

$$\boldsymbol{r}_1 \pm \boldsymbol{r}_2 = (x_1 \pm x_2)\boldsymbol{i} + (y_1 \pm y_2)\boldsymbol{j} + (z_1 \pm z_2)\boldsymbol{k},$$

$$\lambda\boldsymbol{r}_1 = (\lambda x_1)\boldsymbol{i} + (\lambda y_1)\boldsymbol{j} + (\lambda z_1)\boldsymbol{k}.$$

而由图 8-15 可知，向径 $\boldsymbol{r}_1$ 的模

$$|\boldsymbol{r}_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}. \tag{8-7}$$

给出一个向径

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

的坐标表达式之后，怎样求出它的方向呢？要确定一个向径的方向，只要知道它的正向与 x 轴、y 轴、z 轴的正向的夹角 α、β、γ 就可以了，这里的夹角规定为 $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$，$0 \leqslant \beta \leqslant \pi$，$0 \leqslant \gamma \leqslant \pi$. 由图 8-15 易知

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x}{|OM|} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ \cos\beta = \dfrac{y}{|OM|} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ \cos\gamma = \dfrac{z}{|OM|} = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \end{cases} \tag{8-8}$$

这里，将 α、β、γ 称为向径 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ 的方向角，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦.

一个向径 $\boldsymbol{r}$ 的 3 个方向角 α、β、γ 之间有一定的关系，这由式 (8-8) 可知

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{8-9}$$

8.3.2　一般向量的坐标表达式

一个向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的起点是 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，终点是 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 时，如图 8-16 所示，由向量的减法有

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}.$$

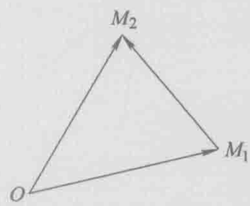

图　8-16

而

$$\overrightarrow{OM_1} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k},$$

$$\overrightarrow{OM_2} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k},$$

利用向量的运算规律，有

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M_2} &= (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) - (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) \\ &= (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}. \end{aligned} \tag{8-10}$$

若记 $a_x = x_2 - x_1$，$a_y = y_2 - y_1$，$a_z = z_2 - z_1$，则式(8-10)可表示为

$$\overrightarrow{M_1M_2} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \tag{8-11}$$

或

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{a_x, a_y, a_z\}，或\overrightarrow{M_1M_2} = (a_x, a_y, a_z). \tag{8-12}$$

上述的式(8-10)、(8-11)、(8-12)都称为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表达式，$a_x\boldsymbol{i}$、$a_y\boldsymbol{j}$、$a_z\boldsymbol{k}$ 称为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$沿 3 个坐标轴的分向量，$a_x = x_2 - x_1$，$a_y = y_2 - y_1$，$a_z = z_2 - z_1$ 称为$\overrightarrow{M_1M_2}$在直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中的坐标.

8.3.3 向量线性运算的坐标表达形式

利用向量的坐标表达式及向量线性运算的规律，易得两向量的加、减法以及数乘向量的运算方法如下：

设
$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k},$$

则

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_x \pm b_x)\boldsymbol{i} + (a_y \pm b_y)\boldsymbol{j} + (a_z \pm b_z)\boldsymbol{k}, \tag{8-13}$$

$$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda a_x\boldsymbol{i} + \lambda a_y\boldsymbol{j} + \lambda a_z\boldsymbol{k}, \tag{8-14}$$

式中 $\lambda \in \mathbf{R}$.

例 1 已知四点 $A(1,-2,3)$、$B(4,-4,-3)$、$C(2,4,3)$、$D(8,4,0)$，求 $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD} - 4\overrightarrow{DA}$.

解 因为由式(8-10)知

$$\overrightarrow{AB} = (4-1)\boldsymbol{i} + (-4+2)\boldsymbol{j} + (-3-3)\boldsymbol{k} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k},$$

$$\overrightarrow{CD} = 6\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k} = \underline{\qquad\qquad},$$

$$\overrightarrow{DA} = \underline{\qquad\qquad},$$

所以

$$2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD} - 4\overrightarrow{DA}$$
$$= \underline{\qquad\qquad} + (18,0,-9) - (-28,-24,12)$$
$$= (52,20,-33).$$

应该注意，在向径

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

的坐标表达式中，$\boldsymbol{r}$ 的坐标 x，y，z 是其终点 M 的坐标. 而在一般向量

$$\overrightarrow{M_1M_2} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

的坐标表达式中，$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标 a_x，a_y，a_z 应为其终点 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 与起点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 的相应坐标的差：

$$a_x = x_2 - x_1, a_y = y_2 - y_1, a_z = z_2 - z_1.$$