GADDENG DAISHU JICHU

YU SHUXUE FENXI YUANLI TANJIU

高等代数基础
与数学分析原理探究

王晓翊　姜　权　著

中国原子能出版社

高等代数基础
与数学分析原理探究

王晓翊　姜　权　著

中国原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等代数基础与数学分析原理探究 / 王晓翊，姜权著.--北京：中国原子能出版社，2019.7

ISBN 978-7-5022-9919-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王… ②姜… Ⅲ.①高等代数②数学分析—研究 Ⅳ.①O15②O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 154368 号

内 容 简 介

高等代数与数学分析是高等教育数学学科的主干基础。高等代数是在初等代数的基础上对研究对象的进一步扩充，包括线性代数初步与多项式代数；数学分析以实数为基础，在实数的连续性基础上对极限、函数、微积分等进行研究。本书注重理论与应用相结合，使得理论思想在实践中得到升华。全书分为两部分，分别对高等代数与数学分析进行阐述，高等代数部分包括行列式、矩阵、线性方程组、线性空间等内容；数学分析部分包括极限、函数、导数、微积分、级数等内容。全书理论与实践相结合，结构严谨，是一本值得学习研究的著作。

高等代数基础与数学分析原理探究

出版发行	中国原子能出版社(北京市海淀区阜成路 43 号 100048)
责任编辑	张 琳
责任校对	冯莲凤
印 刷	三河市铭浩彩色印装有限公司
经 销	全国新华书店
开 本	787mm×1092mm 1/16
印 张	13.75
字 数	246 千字
版 次	2019 年 9 月第 1 版 2019 年 9 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5022-9919-4 定 价 66.00 元

网址：http://www.aep.com.cn E-mail:atomep123@126.com

发行电话:010—68452845

前言

数学是研究自然科学的基本工具，是现代科技文明的基石．伴随着科学技术的发展，数学的应用范围急剧扩散，它不仅更加深入地应用于经济领域中，而且已经渗透诸如天文、生命科学、自然科学和工程技术等社会领域．

数学学科作为一种知识系统，由一个个分支相互联系、不断交叉，促进着数学体系的发展与壮大．高等代数与数学分析是数学中的两个重要分支，在理论研究和工程实践中有广泛的应用．研究每个分支的特殊的理论及思想方法演变规律对于了解数学的发现与创新具有重要的引导作用．另外，计算机技术与软件的高速发展带动了科学技术的定量化分析方法迅速发展，使得各门学科之间加速相互渗透，因此数学必须以新的理论、新的内容、新的方法来适应新的形势．

本书对高等代数基础与数学分析原理进行探究．全书共8章，第1章～第4章为高等代数部分，主要分析了行列式、矩阵、线性方程组、线性空间与线性变换的原理及应用；第5章～第8章为数学分析部分，主要讨论了实数和数列极限、函数和函数极限、导数与微分、不定积分的有关内容．

本书的写作特点如下：

1. 分析讨论了基本内容、基本理论和基本知识，并列举例题加以解释说明，注重知识应用．

2. 理论部分的安排符合人类认识事物的规律，即从具体到抽象再到具体(思维中的具体)．

3. 对重要概念、定理、推论给出了详细的证明过程．

全书由浅入深、循序渐进、结构严谨、逻辑清晰、抓住关键、突出重点．在确保理论完整、推理严密的同时，力求呈现高等代数与数学分析精深而严谨的思想魅力与灵活多变而又有章可循的方法技巧．

本书作者具有多年教学及研究经验，可以说该书是作者多年经验成果的积累和总结．作者写作本书参阅了大量的著作与文献资料，选用了其中的部分内容和习题，很受教益，在此谨向有关的作者致谢；同时本书

的出版得到了各学校领导、出版社领导和编辑的鼎力支持和帮助，在此一并表示感谢．由于作者水平所限，书中难免存在疏漏和不妥之处，恳请同行专家不吝赐教．

作　者

2019年3月

目　录

第 1 章　行列式

1.1　数域

线性方程组有没有解，与所取的数的范围有关．例如，一元一次方程

$$2x=1 \tag{1.1.1}$$

有没有解，就取决于未知量 x 的取值范围．在有理数范围内，方程(1.1.1)有解，其解为 $x=\frac{1}{2}$．但在整数范围内，方程(1.1.1)无解，这是因为在解方程(1.1.1)时，必须在方程两边同除以未知量的系数 2，而 1 除以 2 就不是整数了．这说明两个整数相除的商不一定是整数，这种情形称为整数集合对于除法是不封闭的．而有理数集合对于除法是封闭的．

在许多数学问题的讨论与计算中，主要涉及数的加法、减法、乘法和除法这 4 种运算，因此要求允许取值的范围应对这 4 种运算封闭．我们引进下述概念．

定义 1.1.1　设 F 是由一些数组成的集合，如果满足：

(1)0 和 1 在集合 F 中；

(2)数集 F 对于数的加、减、乘、除法都封闭，即 F 中任意两个数的和、差、积、商(除数不为零)仍在 F 中，则称 F 是一个数域．

显然，有理数集合，实数集合，复数集合都是数域．它们分别称为有理数域 Q，实数域 R，复数域 C．而整数集合不是数域．

还有其他的数域．例如，数集

$$Q(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in Q\},$$

可以检验，$Q(\sqrt{2})$是一个数域．

可以证明，最小的数域是有理数域，即任何一个数域都包含全体有理数．

在线性代数的每一部分内容中，我们约定所涉及的数是在同一个数域 F 里，并且在大部分情形下，这个数域 F 可以是任何一个数域．只是在少数情形里，我们会特别声明，所取数域须是实数域或复数域．

1.2 二、三阶行列式

1.2.1 二阶行列式

行列式起源于解线性方程组，它是研究线性代数的一个重要工具，近代它又被广泛地用于物理、工程技术等多个领域．对于一个方阵，我们可以求真行列式和逆矩阵．逆矩阵在很多实际问题中经常遇到，如信息加密、投入产出都要用到逆矩阵．

设二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.2.1}$$

利用消元法，可得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=a_{22}b_1-a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21} \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组(1.2.1)有唯一解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1.2.2}$$

式中，x_1，x_2 的表示式在一定条件下有其普遍性，但是上述公式不便记忆，为此，引入二阶行列式的概念．

定义 1.2.1 引入记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.2.3}$$

把式(1.2.3)称为二阶行列式．D 中横写的称为行，竖写的称为列．D 中共有两行两列，其中数 a_{ij} 称为行列式的元素，它的第一个下标 i 表示这个元素所在的行，称为行指标；第二个下标 j 表示这个元素所在的列，称为列指标．右端称为行列式的展开式．通过展开式可以计算行列式的值，它可以是数值，也可以是代数表达式．

利用二阶行列式，式(1.2.2)可以表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

其中，分母是由方程组(1.2.1)中未知数的系数按其在方程组中的位置排成的行列式，称为方程组的系数行列式．

把行列式中从左上角到右下角的连线称为主对角线，从右上角到左下角的连线称为副对角线．由式(1.2.3)可知，二阶行列式的值是主对角线上元素 a_{11}，a_{22} 的乘积减去副对角线上元素 a_{12}，a_{21} 的乘积．按照这个规则，有

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

于是，当 $D\neq 0$ 时，二元一次线性方程组(1.2.1)的解可用二阶行列式表示成

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}.$$

1.2.2　三阶行列式

对三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.2.4}$$

利用加减消元法，消去 x_2，x_3 后，得到

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1 \\ &\quad =b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{11}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}b_2a_{32}\end{aligned}$$

同样地，消去 x_1，x_3，可以得到 x_2 的完全类似的关系式，消去 x_1，x_2 可以得到 x_3 的完全类似的关系式．这个结果很难记，为此引进三阶行列式的定义．

定义 1.2.2　称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

是一个三阶行列式．其值规定为

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.2.5}$$

这里，a_{ij} 称为行列式位于第 i 行第 j 列的元素．由三阶行列式的定义可知，它是一个代数和，共有 $3!=6$ 项，每项都是 3 个元素的乘积，每项中三个元素的第一(行)下标均无重复，故这三个元素取自不同的行和不同的列，且其中三项前面带正号，三项前面带负号．

又因为它由方程组(1.2.4)中变元的系数组成，有称其为方程组(1.2.4)的系数矩阵．如果 $D\neq 0$，容易算出方程组(1.2.4)有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & b_{12} & b_{13} \\ b_2 & b_{22} & b_{23} \\ b_3 & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

三阶行列式表示的代数和可以用图 1.2.1 的对角线法则来记．沿各实线相连的三个元素的积取正号，沿虚线相连的三个元素的积取负号，这个记忆法称为沙路法．

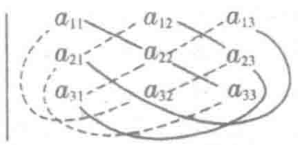

图 1.2.1

1.3 *n* 阶行列式

定义 1.3.1 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 ***n*** 阶行列式，它表示所有取自不同行不同列的 n 个元素按行标排成自

然顺序的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

1.4　行列式的性质

定义 1.4.1　将一个 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行与列一次对换，所得到的行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 D 的转置行列式．

性质 1.4.1　行列式的两行对换，行列式的值反号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明　左端 $= \sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$. 显然，上面展开式中的每一项 $a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$ 也是右端行列式展开式中的一项，因而左、右端行列式的展开式具有相同的项．我们只需证明对应的项在左、右端行列式中符号相反即可．

$a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$ 作为右端行列式中一项，应注意到 a_{ij_i} 在右端行列式中是位于第 k 行第 j_i 列，a_{kj_k} 位于第 i 行第 j_k 列，所以这一项前面所带的

符号是

$$(-1)^{\tau(1\cdots k\cdots i\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}=-(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}.$$

这说明,对应的项在左、右端行列式中的符号相反.

性质 1.4.2 若行列式有两行(列)相同,则此行列式为零.

证明 设这个行列式为 D,一方面把其中相同的两行交换,所得到的新行列式等于 $-D$;另一方面,交换形同的两行,行列式并没改变,由此得 $D=-D$,故 $D=0$.

性质 1.4.3 行列式 D 中第 i 行元素都乘以 k,其值等于 kD,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 左端 $=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$

$$=k\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=\text{右端}.$$

推论 1.4.1 若行列式有两行(列)的对应元素成比例,则此行列式等于零.

推论 1.4.2 若行列式有一行(列)的元素全部为零,则此行列式等于零.

性质 1.4.4 行列式 D 中第 i 行每个元素都是两元素之和,在此行列式等于两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明:左端 $=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(a_{ij_i}+b_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$

$$=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=\text{右端}.$$

性质 1.4.5　行列式中,把某行的各元素分别乘以非零常数 k,再加到另一行的对应元素上,行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明　右端 $= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$ 左端.

这里,第一步根据性质 1.4.4,第二步根据性质 1.4.2.

性质 1.4.6　行列式转置后其值保持不变,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证明　将 D^{T} 记为

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & & {}_{nn} \end{vmatrix},$$

于是有

$$b_{ij}=a_{ji}\,(i,j=1,2,\cdots,n).$$

则由定义有

$$D^{\mathrm{T}} = \sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n} = \sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn} = D.$$

初等变换:通过三类操作(统称初等变换)把行列式变换为三角行列式:

(1)消法变换:把一行(或一列)的倍向量加到另一行(或另一列);

(2)倍法变换:从一行(或一列)提取公因子(相当于在一行或一列乘以非零数);

(3)对换:对换两行(或两列).

1.5 行列式的按行或列展开

在 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中,划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行及第 j 列,剩下的元素按原来的排法构成一个 $n-1$ 阶行列式:

$$D_{n-1}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则称此行列式为 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij}. 令 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,则称 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.

行列式等于它的任一行(列)的所有元素与其对应的代数余子式乘积之和;行列式的某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即有

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} D_n, i=j \\ 0, i\neq j \end{cases},$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases} D_n, i=j \\ 0, i\neq j \end{cases}.$$

其中,A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式,$i,j=1,2,\cdots,n$.

例 1.5.1 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$ 的值.

解:将行列式按第一列展开可得

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$=a\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$+b\times(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}$$

$$=a\cdot a^{n-1}+(-1)^{n+1}b\cdot b^{n-1}=a^n+(-1)^{n+1}b^n.$$

例 1.5.2　计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$ 的值.

解:应用行列式的性质以及按行(列)展开的运算方法可得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$$