

高教版 2020 高分指南系列

严格依据最新考研管理类联考大纲编写

MBA MPA MPAcc MEM 管理类联考

高分指南

数学历年真题名家详解

(第9版)(解析册)

联考真题 22 套+在职真题 18 套= 40 套全覆盖

联考真题 419 道+在职真题 315 道= 734 道全精练

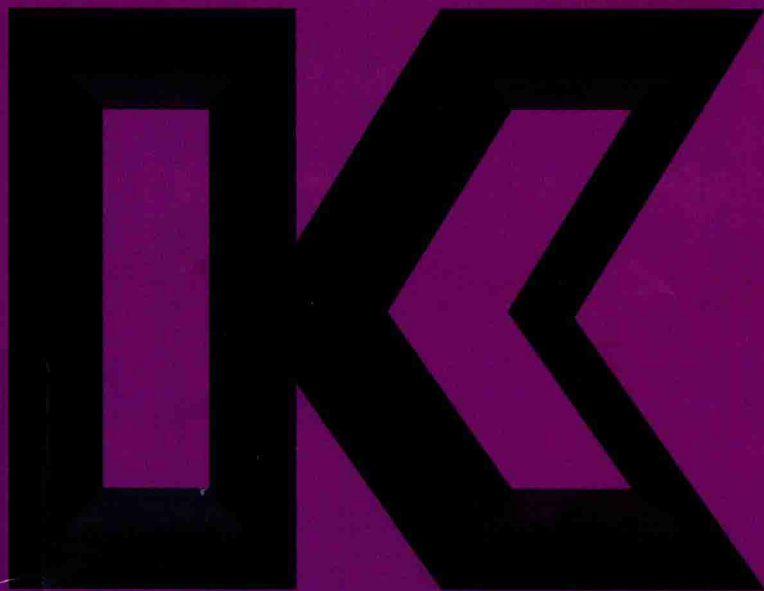
主编 陈剑

高等教育出版社

- 命题趋势+考点聚焦+深度解析
- 考点、基础、强化、专题、练习五合一
- 例题与解析分开，锻炼思维，提分显著



陈剑数学思维
新浪微博



高教版 2020 高分指南系列

严格依据最新考研管理类联考大纲编写

MBA MPA MPAcc MEM 管理类联考

高分指南

数学历年真题名家详解

(第9版)(解析册)

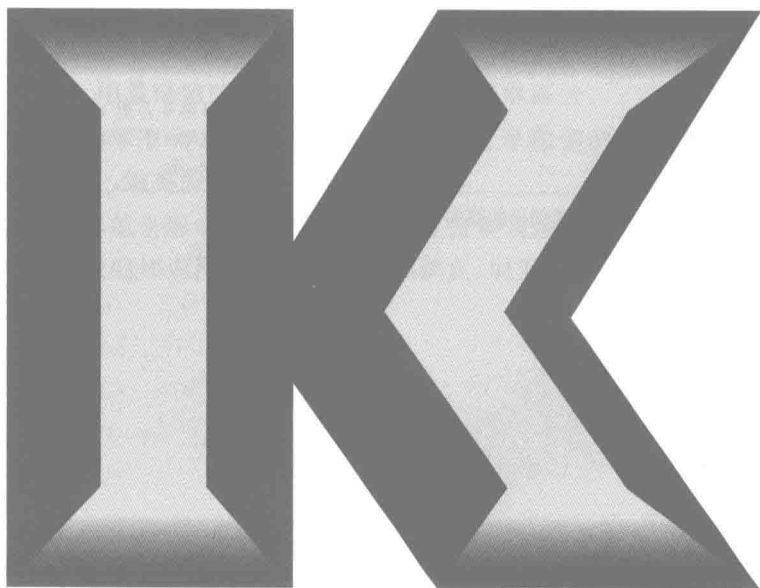
联考真题 22 套+在职真题 18 套= 40 套全覆盖

联考真题 419 道+在职真题 315 道= 734 道全精练

主编 陈剑

高等教育出版社·北京

- 命题趋势+考点聚焦+深度解析
- 考点、基础、强化、专题、练习五合一
- 例题与解析分开, 锻炼思维, 提分显著



内容简介

《2020MBA MPA MPAcc MEM 管理类联考高分指南数学历年真题名家详解》紧扣最新《考试大纲》，收录了自1997年设立全国考试以来的符合最新《考试大纲》的23套联考真题和18套在职考试真题，庖丁解牛般剖析，洞察命题新动向，指导考生把握命题脉搏，赢取高分。《2020MBA MPA MPAcc MEM 管理类联考高分指南数学历年真题名家详解》特色是涵盖了历年真题，对真题进行了科学的分类和精讲，先按模块将知识点“画龙”，随后逐题“解析、点睛、技巧、扩展”分层次地深度剖析，将考点与方法技巧进行有机联系，彰显了命题轨迹和应试精髓，力图达到居高临下和立竿见影之功效。

《2020MBA MPA MPAcc MEM 管理类联考高分指南数学历年真题名家详解》以真题解析为基点，以强调考试方法和做题技巧为宗旨，以提高实战能力为核心，以快速提高成绩和立竿见影为目的，是管理类专业硕士学位联考复习的宝贵真题资料。

2020MBA MPA MPAcc MEM 管理类联考高分指南数学历年真题名家详解

2020MBA MPA MPAcc MEM GUANLILEI LIANKAO GAOFEN ZHINAN SHUXUE LINIAN ZHENTI
MINGJIA XIANGJIE

策划编辑 李晓翠 责任编辑 张耀明 封面设计 王洋 版式设计 童丹
插图绘制 李沛蓉 责任校对 王雨 责任印制 韩刚

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 保定市巾画美凯印刷有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
本册印张 12.25
本册字数 300千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>
版 次 2019年4月第1版
印 次 2019年4月第1次印刷
总 定 价 79.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 22-1422-25

管理类联考图书编委会

主任:陈 剑

数学委员:陈 剑 杨 晶 魏 祥 郑小松 韩 超 熊学政

逻辑委员:杨武金 李 焕

写作委员:陈君华 王 诚

英语委员:何 敬 薛 冰 孙笑飞 韩 健

管理类数学备考丛书序列

序列 1:《高分指南数学分册》

定位:第一轮复习,夯实基础

特色:考点、题型、点睛

序列 2:《数学历年真题名家详解》

定位:第二轮复习,强化拔高

特色:真题、考向、精练

序列 3:《综合能力考前冲刺》

定位:最后一轮复习,决胜冲刺

特色:预测、技巧、模拟

本书特色

- 画龙** 真题是复习备考的最好蓝本,考试具有较强的继承性,可画出命题的轮廓,总结出解题方法、技巧,为考生准确领航。
- 点睛** 数学高分的秘诀就是采用将真题类型化的方法,逐题点睛,指导考生快速、准确抓住题目的突破口,用最简洁的方法寻找答案,轻松赢取高分。
- 立竿** 针对考生的薄弱环节和命题的考查意图,形成常考题型的固定解题方法,立下万变不离其宗的标杆,触类旁通。
- 见影** 最快提分的诀窍就是形成题感,多角度、全方位展现题型变化,在短时间内将孤立考点形成一张有效的知识网,消除“虽明白知识点,但无从下手解题”的障碍。

目 录 >>>

第一章 算术与代数	1
真题深度解析(共 91 题)	1
类型一 绝对值的化简计算	1
类型二 表达式的非负性	5
类型三 实数的性质及运算	7
类型四 平均值与最值	12
类型五 整式的变形与化简	15
类型六 分式的变形及化简	17
第二章 应用题	22
真题深度解析(共 200 题)	22
类型一 商品利润与打折问题	22
类型二 比例问题	27
类型三 路程问题	36
类型四 工程问题	44
类型五 杠杆交叉法	50
类型六 浓度问题	54
类型七 集合问题	56
类型八 分段计费问题	59
类型九 不定方程	60
类型十 线性优化问题	62
类型十一 至少至多及最值问题	64
类型十二 其他问题	67
第三章 方程和不等式	72
真题深度解析(共 89 题)	72
类型一 抛物线	72
类型二 韦达定理	75
类型三 根的特征	80
类型四 解集为任意实数或空集	83
类型五 关于解集计算	85
类型六 绝对值方程不等式及最值	87
类型七 特殊方程及不等式	91
类型八 其他问题	93

第四章 数列	95
真题深度解析(共 77 题)	95
类型一 三项数列	95
类型二 告知数列求参数	97
类型三 元素求和	99
类型四 求元素或通项	104
类型五 数列的性质	108
类型六 数列相关的文字应用题	110
第五章 几何	116
真题深度解析(共 150 题)	116
类型一 三角形相关的面积	116
类型二 四边形或多边形的面积	121
类型三 圆弧相关的面积	126
类型四 三角形形状判断	130
类型五 图形的长度	131
类型六 解析几何中的对称	136
类型七 判断位置关系	138
类型八 求坐标或方程	146
类型九 立体几何	150
第六章 数据分析	156
真题深度解析(共 127 题)	156
类型一 排列组合	156
类型二 取球概率计算	163
类型三 随机取样概率	165
类型四 数字问题	172
类型五 分房模型	175
类型六 独立事件	177
类型七 伯努利概型	182
类型八 数据描述	184

第一章 | 算术与代数 >>>

— 真题深度解析 (共 91 题) —

类型一 绝对值的化简计算

一 问题求解题

1. 【考点】绝对值的三角不等式

【答案】C

【解析】由 $ab < 0$, 根据三角不等式得 $|a-b| = |a| + |b| = 5+7=12$.

【技巧】可以采用特值法, 取 $a = -5, b = 7$, 则 $|a-b| = 12$.

【点睛】主要考查三角不等式的应用, 核心考点是三角不等式等号成立的条件. 本题所用公式为: 若 $ab < 0$, 有 $|a-b| = |a| + |b|, |a+b| = ||a| - |b||$.

【扩展】此题如果改为 $ab > 0$, 则选 A. 所用公式为: 若 $ab > 0$, 有 $|a-b| = ||a| - |b||, |a+b| = |a| + |b|$.

2. 【考点】去掉绝对值符号化简

【答案】B

【解析】由 $t^2 - 3t - 18 = (t-6)(t+3) \leq 0$ 知 $-3 \leq t \leq 6$, 则 $t+4 > 0, t-6 \leq 0$, 所以 $|t+4| + |t-6| = t+4+6-t=10$.

【技巧】特值法, 取 $t=0$, 满足题干的范围, 则 $|t+4| + |t-6| = 10$, 选项中只有 B 符合.

【点睛】此题的命题思路是先要根据不等式确定 t 的取值范围, 再利用绝对值的定义进行脱绝对值化简.

3. 【考点】绝对值的定义

【答案】C

【解析】根据题意, 去掉绝对值符号后变成了相反数, 故绝对值内部 $\frac{5x-3}{2x+5} \leq 0$, 即 $(5x-3) \cdot (2x+5) \leq 0$ ($x \neq -\frac{5}{2}$), 解得 $-\frac{5}{2} < x \leq \frac{3}{5}$.

【技巧】通过观察绝对值内外表达式的特征, 快速抓住其符号特征.

【点睛】要深刻理解绝对值的定义: 正数的绝对值还是其本身; 负数的绝对值是其相反数; 零的绝对值还是零. 若 $|a| = a$, 则 $a \geq 0$; 若 $|a| = -a$, 则 $a \leq 0$.

【陷阱】此题在解时要把分式不等式转化为二次不等式, 在转化过程中一定要注意分母不为零, 否则会出现增根现象.

4. 【考点】绝对值的特性

【答案】A

【解析】由于 a, b, c 为整数, 则 $|a-b|$ 和 $|c-a|$ 均为非负整数. 又 $|a-b|^{20} + |c-a|^{41} = 1$, 则 $|a-b|$ 和 $|c-a|$ 中一个为 0, 一个为 1. 不妨令 $|a-b|=0$ 和 $|c-a|=1$, 即 $a=b$, 代入所求表达式得到 $|a-b| + |a-c| + |b-c| = 2|a-c| = 2$.

【技巧】采用特值法, 可令 $a=b=0, c=1$, 代入所求表达式直接得到 2.

【点睛】本题巧妙地将整数和绝对值结合起来, 通过讨论绝对值的取值来求解表达式的数值. 另外, 这个题目比较简单, 利用特值法就能解出.

5. 【考点】质数与绝对值

【答案】D

【解析】不妨设 $a > b > c$, 故 $|a-b| + |b-c| + |c-a| = a-b + b-c + a-c = 2(a-c) = 8$, 得到 $a-c=4$, 又小于 12 的质数有 2, 3, 5, 7, 11, 只能 $a=7, b=5, c=3$ 才满足, 所以 $a+b+c=3+5+7=15$.

【点睛】本题考查常见的质数性质, 除了 2 以外的质数均为奇数, 根据任意两个奇数之差为偶数, 所以想到 $2+2+4=8$, 得到 $a=7, b=5, c=3$.

6. 【考点】质数与绝对值

【答案】C

【解析】 m, n 中一个为 3、一个为 5 满足条件; m, n 中一个为 5、一个为 7 满足条件; m, n 中一个为 11、一个为 13 满足条件; m, n 中一个为 17、一个为 19 满足条件, 所以共有 4 组.

【点睛】本题关键是对质数的熟悉度, 一定要熟记 20 以内的质数, 2、3、5、7、11、13、17、19.

二 条件充分性判断题【选项说明下同, 为节省篇幅, 以后略去】

解题说明: 要求判断每题给出的条件(1)和条件(2)能否充分支持题干所陈述的结论. A, B, C, D, E 五个选项表示的含义如下:

- (A) 条件(1)充分, 但是条件(2)不充分;
- (B) 条件(2)充分, 但是条件(1)不充分;
- (C) 条件(1)和条件(2)单独不充分, 但条件(1)和条件(2)联合起来充分;
- (D) 条件(1)充分, 条件(2)也充分;
- (E) 条件(1)和条件(2)单独不充分, 条件(1)和条件(2)联合起来也不充分.

1. 【考点】绝对值的化简计算

【答案】E

【解析】由条件(1), $x=3y$, 则 $\frac{|x+y|}{x-y} = \frac{|3y+y|}{3y-y} = \frac{2|y|}{y} = \begin{cases} 2, & y > 0, \\ -2, & y < 0, \end{cases}$ 不充分; 同理条件(2)亦不充分.

【技巧】可以借助符号法快速判断, 因为 $\frac{|x+y|}{x-y}$ 的分子是正的, 所以必须要求分母为正, 而两个条件均无法说明分母的符号, 故两个都不充分.

【点睛】当绝对值内含有变量时, 要注意讨论其符号的正负.

【陷阱】解此题很容易犯的一个错误是把 x, y 看成是 $x > 0, y > 0$, 从而误选.

2. 【考点】绝对值的三角不等式

【答案】D

【解析】若 $|x| + |y| = |x - y|$, 则只要 x, y 异号, 或者其中有一个为 0 即可, 所以两个条件均充分.

【点睛】本题主要考查三角不等式的成立条件, 其成立条件要么是同号, 要么是异号, 可用特值法辅助判断.

3. 【考点】绝对值大小的比较

【答案】C

【解析】显然单独不充分, 联合起来根据 $a < 0$ 和 $a + b > 0$ 得到 $-a(a + b) > a(a + b)$ 是成立的.

【点睛】要掌握绝对值的重要性质 $|a| \geq a$, 即一个数的绝对值不小于其本身.

【扩展】本题若改为 $|a|(a + b) \geq a|a + b|$, 则两个条件单独都充分了, 须选 D.

4. 【考点】绝对值与数轴

【答案】A

【解析】条件(1), $c < b < 0 < a$, 则 $|b - a| + |c - b| - |c| = (a - b) + (b - c) + c = a$, 充分; 条件(2), $a < 0 < b < c$, 则 $|b - a| + |c - b| - |c| = (b - a) + (c - b) - c = -a$, 不充分.

【技巧】也可以根据数轴上的位置取特值判断.

【点睛】根据数轴上点的位置, 可以得到 a, b, c 的大小和正负情况, 从而去掉绝对值符号. 也可以借助绝对值的几何意义即数轴上点的距离来分析.

5. 【考点】绝对值的分式化简

【答案】C

【解析】显然单独不充分, 联合起来, 得到 a, b, c 两负一正, 所以代入题干可得

$$\frac{b+c}{|a|} + \frac{c+a}{|b|} + \frac{a+b}{|c|} = -\left(\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|}\right) = 1.$$

【点睛】关键是要讨论 a, b, c 的符号情况, 然后根据符号情况去掉绝对值符号. 根据本题可以得到一个小结论: 形式为 $\frac{x}{|x|}$ 的表达式, 只能为 1 或 -1, 即 $\frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

6. 【考点】绝对值性质、不等式求解

【答案】E

【解析】由条件(1) $\frac{2x-1}{x^2+1} \leq 0$, 得 $x \leq \frac{1}{2}$, 不充分. 由条件(2) $\frac{2x-1}{3} \geq 0$, 得 $x \geq \frac{1}{2}$, 也不充分. 联合得 $x = \frac{1}{2}$, 也不充分.

【技巧】可以看出条件(1)和条件(2)都包括 $x = \frac{1}{2}$, 不满足题干, 不充分.

【点睛】根据绝对值内外表达式的关系, 讨论表达式的取值范围. 本题的关键是要注意等号. 本题所用的结论为: 若 $|a| = -a$, 则 $a \leq 0$; 若 $|a| = a$, 则 $a \geq 0$.

7. 【考点】绝对值计算

【答案】C

【解析】 $|1-x| - \sqrt{x^2 - 8x + 16} = |1-x| - |x-4|$, 显然要联合分析, 得到: 若 $2 < x < 3$, 则 $|1-x| - |x-4| = x-1 - (4-x) = 2x-5$.

【点睛】 本题巧妙地用到了 $\sqrt{a^2} = |a|$ 这个公式, 然后根据 x 的不同取值, 去掉绝对值符号.

8. **【考点】** 比较绝对值的大小

【答案】A

【解析】 由于 $|a-b| \geq a-b$ 恒成立, 故只需条件(1) $a > 0$ 即可.

【点睛】 此题的出题方式与本类型第3题有着异曲同工之妙.

【陷阱】 本题容易让考生将两个条件联合起来, 误选C. 此题若改为 $a|a-b| = |a|(a-b)$, 那么就选C.

9. **【考点】** 绝对值表达式为常数

【答案】D

【解析】 由条件(1) $-1 < x < 0$, 去掉绝对值符号得

$$\begin{aligned} f(x) &= |x-1| + |x+1| + |x-2| + |x+2| \\ &= -(x-1) + x+1 - (x-2) + x+2 = 6, \end{aligned}$$

与 x 无关; 由条件(2) $1 < x < 2$, 去掉绝对值符号得

$$\begin{aligned} f(x) &= |x-1| - |x+1| + |x-2| + |x+2| \\ &= x-1 - (x+1) - (x-2) + x+2 = 2, \end{aligned}$$

与 x 无关.

【点睛】 绝对值表达式为常数的关键在于: 去掉绝对值符号后, 变量被抵消约掉, 只剩常数项了. 此外, 此题还考查了简单的分段函数.

10. **【考点】** 三角不等式

【答案】C

【解析】 因为单独不充分, 需要联合分析, 根据三角不等式, $2|a| = |(a-b) + (a+b)| \leq |a-b| + |a+b| \leq 2 \Rightarrow |a| \leq 1$, 同理, $|b| \leq 1$, 充分.

【技巧】 本题也可以画出数轴, 利用绝对值的几何意义分析.

【点睛】 本题主要考查三角不等式的变形转化.

11. **【考点】** 算术平均值、绝对值三角不等式

【答案】C

【解析】 条件(1), 取 $x_1 = -1, x_2 = -1, x_3 = 1$, 则 $|x_3 - \bar{x}| = \frac{4}{3}$, 不充分; 条件(2), 显然不充分. 考虑联合, $|x_k| \leq 1 (k=2, 3)$, 所以 $|\bar{x}| = \left| \frac{x_2 + x_3}{3} \right| \leq \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}$, 即 $|x_1 - \bar{x}| = |\bar{x}| \leq 1$; $|x_2 - \bar{x}| = \left| \frac{2x_2 - x_3}{3} \right| \leq \frac{2|x_2| + |x_3|}{3} \leq \frac{3}{3} = 1$, 所以 $|x_2 - \bar{x}| \leq 1$, 同理可证明 $|x_3 - \bar{x}| \leq 1$, 联合充分.

【点睛】 此题看似简单, 实际上论证其充分性的过程还是比较复杂. 要分别论证

$|x_2 - \bar{x}| \leq 1, |x_3 - \bar{x}| \leq 1$, 而不能直接论证 $|x_k - \bar{x}| \leq 1$.

12. 【考点】绝对值的几何意义

【答案】A

【解析】 $\min\{|a-b|, |b-c|, |a-c|\} \leq 5$ 表示 $|a-b|, |b-c|, |a-c|$ 三个表达式中最小值小于或等于 5, 也就是只要其中一个小于或等于 5 即可, 或者都不超过 5, 由(1)分析, 如图 1.1,

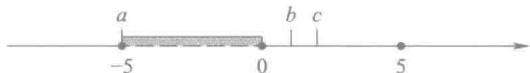


图 1.1

根据绝对值几何意义, $|a|$ 表示 a 到原点距离, $|a-b|$ 表示 a, b 两点之间的距离, 当 $|a-b| \geq 5, |a-c| \geq 5$, 则 $|b-c| \leq 5$, 同理分析可以发现, 三个绝对值不可能都超过 5, 即至少有一个是小于或等于 5, 故充分. 对于条件(2), 可以取反例, 比如, 取 $a=5, b=-5, c=15$, 显然不满足题干, 故不充分.

【点睛】本题难点有 3 个. ① 是对于所给表达式的正确理解, \min 表示最小值函数, \max 表示最大值函数. ② $\min\{x, y, z\} \leq a$ 表示 x, y, z 中最小的小于或等于 a , 转化为至少有一个小于或等于 a , 或者都不超过 a , $\min\{x, y, z\} \geq a$ 表示 x, y, z 中最小的大于或等于 a , 转化为都大于或等于 a , 或者都不小于 a ; $\max\{x, y, z\} \leq a$ 表示 x, y, z 中最大的小于或等于 a , 转化为都小于或等于 a ; $\max\{x, y, z\} \geq a$ 表示 x, y, z 中最大的大于或等于 a , 转化为至少有一个大于或等于 a . ③ 是对于绝对值的几何意义的灵活使用, 根据距离来分析比较简便.

【陷阱】本题若采用均值不等式, 只能说明表达式的大致范围, 而无法求出三者之间的关系和限制. 如根据三角不等式有 $||a| - |b|| \leq |a-b| \leq |a| + |b|$, 即 $0 \leq |a-b| \leq 10$, 无法说明取值最小的表达式的值小于或等于 5. 此外本题容易联合分析, 误选 C.

类型二 表达式的非负性

一 问题求解题

1. 【考点】非负性

【答案】C

【解析】根据非负性可得, $a=60, b=-90, c=130$, 故 $a+b+c=100$, 选 C.

【点睛】当若干个非负数之和为零时, 每个都为零, 求出其数值.

2. 【考点】利用非负性求最值

【答案】C

【解析】由 $x^2 - 4xy + 4y^2 + \sqrt{3}x + \sqrt{3}y - 6 = 0$ 得到 $(x-2y)^2 + \sqrt{3}(x+y) - 6 = 0 \Rightarrow \sqrt{3}(x+y) = 6 - (x-2y)^2 \leq 6$, 所以 $x+y \leq \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$, 选 C.

【点睛】通过对表达式进行配方, 利用非负性求解最值.

3. 【考点】利用非负性判断符号

【答案】B

【解析】 $x+y+z=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2]>0$,

显然至少有一个是大于0的.

【技巧】本题也可以采用特值法求解.

【点睛】此题单个的 x, y, z 不好判断其与0的关系,那么不妨换个角度,从整体来考虑就豁然开朗了.此外,还要记住小结论:几个数之和大于零,则至少有一个大于零;几个数之和小于零,则至少有一个小于零.

4. 【考点】配方,非负性

【答案】E

【解析】由 $|3x+2|+2(x-3y)^2=0 \Rightarrow x=-\frac{2}{3}, y=-\frac{2}{9}$, 所以 $2y-3x=\frac{14}{9}$.

【点睛】本题先对表达式进行配方,然后借助非负性求出数值,再代入得到答案.

5. 【考点】非负性

【答案】D

【解析】 $y+|\sqrt{x}-\sqrt{2}|=1-a^2 \Rightarrow y-1+a^2+|\sqrt{x}-\sqrt{2}|=0$,
 $|x-2|=y-1-b^2 \Rightarrow |x-2|+b^2+1-y=0$,

两式相加得 $|x-2|+b^2+a^2+|\sqrt{x}-\sqrt{2}|=0$, 即 $x=2, a=b=0$, 再代入 $y+|\sqrt{x}-\sqrt{2}|=1-a^2$ 可得 $y=1$, 所以 $3^{x+y}+3^{a+b}=3^{2+1}+3^{0+0}=28$.

【技巧】观察式子 $y+|\sqrt{x}-\sqrt{2}|=1-a^2$ 和 $|x-2|=y-1-b^2$, 采用特值法, 可令 $x=2, a=b=0, y=1$, 所以 $3^{x+y}+3^{a+b}=3^{2+1}+3^{0+0}=28$.

【点睛】这道题目, 单从一个式子入手就没有思路, 无法利用非负性, 而必须把两个式子放在一起考虑, 才能根据非负性确定各个参数的具体数值.

【陷阱】本题容易通过 $3^{x+y}+3^{a+b}$, 误认为答案是3的倍数, 误选C.

6. 【考点】利用非负性求解最值

【答案】B

【解析】 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$
 $=2(a^2+b^2+c^2)-(2ab+2bc+2ac)$
 $=18-[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)]$
 $=27-(a+b+c)^2 \leq 27$,

当 $a+b+c=0$ 时, 有最大值 27.

【点睛】首先利用完全平方公式将代数式展开, 然后再配方, 利用非负性求解最值. 本题的关键在于 $2ab+2bc+2ac=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$, 然后才能利用非负性求解.

7. 【考点】非负性

【答案】A

【解析】由非负性得到 $a-3=0, 3b+5=0, 5c-4=0$, 得到 $a=3, b=-\frac{5}{3}, c=\frac{4}{5}$, 所以 $abc=-4$.

【点睛】本题考查非负性, 若干个非负数之和为零, 则每个均为零, 求出数值.

二 条件充分性判断题

1. 【考点】绝对值的非负性

【答案】C

【解析】单独的条件不可能充分,考虑联合,有
$$\begin{cases} y + |\sqrt{x} - \sqrt{3}| = 1 - a^2 + \sqrt{3}b, \\ |x - 3| + \sqrt{3}b = y - 1 - b^2, \end{cases}$$
两式相加

得到 $|\sqrt{x} - \sqrt{3}| + |x - 3| + a^2 + b^2 = 0$,根据非负性解得 $x = 3, a = 0, b = 0$,再代入原式得到 $y = 1$,故有 $2^{x+y} + 2^{a+b} = 17$,充分.

【点睛】此类型的题目,关键是要把两个方程相加,把各个参数的具体数值确定,然后问题就好解决了.本题与本类型问题求解第5题的命题思路相同,同时也暗示真题对复习备考起着至关重要的作用.

类型三 实数的性质及运算

一 问题求解题

1. 【考点】多个分数求和

【答案】A

【解析】
$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{99 \times 100}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}.$$

【点睛】遇到很多分数相加的表达式,可以采用裂项抵消来化简求解.常用的公式为 $\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right)$,本题相当于 $k = 1$.

2. 【考点】根号运算性质

【答案】C

【解析】 $\sqrt{x^3 + 2x^2} = \sqrt{x^2(x+2)} = |x| \sqrt{2+x}$,当 $x \leq 0$ 且 $x \geq -2$,即 $-2 \leq x \leq 0$ 时,有 $|x| \sqrt{2+x} = -x \sqrt{2+x}$.

【点睛】对于绝对值的结果和开根号的数,结果均为非负,可记住公式

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

3. 【考点】长串数字的化简计算

【答案】D

【解析】原式 =
$$\frac{\frac{1}{2}(3-1)(1+3)(1+3^2)(1+3^4)(1+3^8)\cdots(1+3^{32}) + \frac{1}{2}}{3 \times 3^2 \times 3^3 \times 3^4 \times \cdots \times 3^{10}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(3^{64} - 1) + \frac{1}{2}}{3^{1+2+\cdots+10}} = \frac{\frac{1}{2} \times 3^{64}}{3^{55}} = \frac{1}{2} \times 3^9.$$

【点睛】对于算术式很长,看似很麻烦的式子的计算,一般都要寻找规律,通过等差、等比数列及分式的裂项相消法等可以很容易地计算其结果.本题的分子借助平方差公式巧妙地得到化简,分母利用指数运算公式 $a^m a^n = a^{m+n}$ 求解.

4. **【考点】**实数的计算性质

【答案】D

【解析】A 选项,两个数的和为正数,只能得到至少有一个为正数.B 选项,两个数的差为负数,这两个数的符号不好确定.C 选项,只有当两个数都为正数时,此描述才正确.E 选项对于正数才成立.

【点睛】本题主要考查数的基本符号性质,对于命题一定要看前提条件.

5. **【考点】**算术平方根

【答案】D

【解析】一个大于 1 的自然数的算术平方根为 a ,则原自然数为 a^2 ,该自然数左右相邻的两个自然数为 a^2-1 和 a^2+1 ,再开方得到算术平方根分别为 $\sqrt{a^2-1}$, $\sqrt{a^2+1}$.

【技巧】特值法,设自然数为 4,则 $a=2$.左右相邻的自然数为 3 和 5,代入选项验证答案.

【点睛】本题主要涉及算术平方根的概念,要注意平方根和算术平方根的区别:一个正数 a 的平方根有两个,分别是 \sqrt{a} 和 $-\sqrt{a}$,两者互为相反数.算术平方根是特指正的平方根 \sqrt{a} .

6. **【考点】**有理数与无理数的性质

【答案】C

【解析】 $(1+2\sqrt{3})x+(1-\sqrt{3})y-2+5\sqrt{3}=(x+y-2)+(2x-y+5)\sqrt{3}=0$,所以

$$\begin{cases} x+y-2=0, \\ 2x-y+5=0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x=-1, \\ y=3. \end{cases}$$

【技巧】可以将选项的数值代入题干验证.

【点睛】将原表达式拆分成有理项 $(x+y-2)$ 和无理项 $(2x-y+5)\sqrt{3}$,当等式为零时,系数应为零.

7. **【考点】**实数的乘方运算

【答案】C

【解析】根据题意 $\begin{cases} \left(\frac{1}{a+b}\right)^{2007}=1, \\ \left(\frac{1}{-a+b}\right)^{2009}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=1, \\ -a+b=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=0, \\ b=1, \end{cases}$ 所以 $a^{2007}+b^{2009}=1$.

【点睛】1 的奇数次方根为 1,1 的偶数次方根为 ± 1 .通过开方,很容易把 a, b 的值找到.

8. **【考点】**实数的概念及性质

【答案】E

【解析】因为 $770=11 \times 7 \times 5 \times 2$,所以 $11+7+5+2=25$.

【点睛】本题主要考查因数分解,一个合数可以分解为若干个质数相乘.

9. **【考点】**合数

【答案】E

【解析】方法一：连续合数，依次列举：4, 6, 8, 9, …，发现 8 和 9 相邻，乘积 72 最小。

方法二：观察选项，发现 72 最小， $72=8 \times 9$ 符合题干条件，选 E。

【点睛】此题在考试中属于简单题目，根据题目中关键字“相邻”“合数”“乘积最小”以及答案 72，很容易联想到 $8 \times 9 = 72$ 。比较表达式大小的方法有两种：除法或减法。对于方幂形式，可以采用除法比较；其他形式可以采用相减来比较。

二 条件充分性判断题

1. 【考点】实数运算性质

【答案】B

【解析】 $\sqrt{a^2b}$ 在 $b \geq 0$ 时才有意义，条件(1)不充分；由(2)，当 $a < 0, b > 0$ 时， $\sqrt{a^2b} = |a| \sqrt{b} = -a \sqrt{b}$ ，条件(2)充分。

【点睛】本题主要考查 $\sqrt{a^2} = |a|$ 和根号有意义的条件。

2. 【考点】有理数的性质和整数的判断

【答案】A

【解析】条件(1)，由 $m = \frac{p}{q}$ ，说明 m 为有理数， m^2 是一个整数， m 也为整数，充分；条件(2)，取反例，令 $p = -1, q = 2, m = -\frac{1}{2}$ ，显然 $\frac{2m+4}{3}$ 是一个整数，但 m 不是整数，不充分。

【点睛】本题的关键点在于： $m = \frac{p}{q}$ (p 与 q 为非零整数)，说明 m 为有理数，这是有理数的定义。也就是说，所有的有理数都可以写成分数，这是与无理数的本质区别。

3. 【考点】大小比较

【答案】E

【解析】条件(1)，取反例，如 $\begin{cases} x=1, \\ y=2, \end{cases}$ 不充分；条件(2)，取反例，如 $\begin{cases} x=1, \\ y=2, \end{cases}$ 也不充分，联合亦不充分。

【点睛】本题主要考查平方和开方对一个数值大小的影响。

【扩展】如果题干改为 $x < y$ ，那么条件(1)就充分了，因为对于正整数，有 $x^2 < y \Leftrightarrow x < \sqrt{y} < y$ 。

4. 【考点】实数的符号和大小比较

【答案】A

【解析】由条件(1)，显然 $a < -1, -a > 1$ ，所以 $a < -1 < 1 < -a$ ，充分；条件(2)，则 $-1 < a < 1$ ，显然不充分。

【点睛】根据符号来进行比较，抓住这个关键，可以看出 a 应该为负，而在条件(2)中 a 有可能为正。

5. 【考点】实数的大小比较

【答案】E

【解析】因为当 $b = 0$ 时，两个条件都不充分。

【点睛】联合两个条件可以得到 a 为负, c 为正, 而 b 无法确定. 但题干中 $b^2 \geq 0$, 利用了平方的非负性来设计题目.

【陷阱】这个题目若忽略 $b=0$, 则很容易选 C.

【扩展】如果题干改为 $ab^2 \leq cb^2$ 或 $a < c$, 则就可以选 B 了.

6. 【考点】指数、幂函数单调性

【答案】B

【解析】由条件(1)因为不知道 a, b 的正负, 所以无法判断. 由条件(2)单调递减的指数函数, 可以得到 $a > b$, 充分.

【点睛】对于指数函数 $y = a^x$, 当 $a > 1$ 时为单调增函数, 当 $0 < a < 1$ 时为单调减函数.

7. 【考点】整数的性质

【答案】A

【解析】由条件(1) $\frac{3n}{14}$ 是一个整数, 因为 3 不是 14 的约数, 所以 n 是 14 的倍数, 则 $\frac{n}{14}$ 是一个整数, 充分. 条件(2)说明 n 是 7 的倍数, 不一定是 14 的倍数, 显然不充分.

【点睛】这个题目考查了整数的运算问题, 只要抓住 n 与 7 和 14 的关系即可.

8. 【考点】奇数和偶数的组合性质

【答案】D

【解析】如果两个整数之和为偶数, 则两个整数的奇偶性相同. 由两个条件可以看出, 由于 $2n$ 和 $2n^2$ 都为偶数, 故 $3m$ 和 $3m^2$ 也为偶数, 得到 m 是偶数.

【点睛】奇数 \pm 奇数 = 偶数, 偶数 \pm 偶数 = 偶数, 奇数 \pm 偶数 = 奇数; 奇数的正整数次幂是奇数, 偶数的正整数次幂是偶数.

9. 【考点】实数大小的比较

【答案】E

【解析】由于两个条件均不知道正负符号, 所以无法确定 a 与 b 的大小. 有可能 a 为负值, b 为正值, a 就会小于 b .

【技巧】带平方或绝对值的表达式一般无法得到不带平方和绝对值的表达式的大小, 所以可以看出这两个条件都不充分.

【点睛】在遇到平方或绝对值的大小的比较时, 要讨论正负情况.

【扩展】如果题干改为 $|a| > |b|$, 则条件(1)单独就充分了, 选 A. 实际上,

$$a^2 > b^2 \Leftrightarrow |a| > |b|.$$

10. 【考点】数的概念

【答案】E

【解析】可以取反例, 如 $m=q=3$, 显然不满足题干, 不充分.

【点睛】本题的条件(2)为条件(1)的特殊情况, 如果条件(2)不充分, 则可直接选 E.

11. 【考点】数的概念性质

【答案】C

【解析】条件(1)与条件(2)单独显然不充分, 考虑联合起来: $m^2n^2 - 1 = (mn)^2 - 1$, 当 m 和 n 均为奇数时, mn 为奇数, 故 $m^2n^2 - 1$ 为偶数.

【点睛】根据奇偶特性来进行判断.

【陷阱】注意 0 也是偶数.

12. 【考点】实数的大小比较

【答案】A

【解析】条件(1) $a+b \geq 4$, 假设 $a < 2$ 且 $b < 2$, 则 $a+b < 4$, 这与 $a+b \geq 4$ 矛盾, 充分;
(2) 若 $a = -4, b = -4, ab = 16 \geq 4$, 不充分.

【点睛】对于条件(1), 在论证其正确性时用到了反证法, $a \geq 2$ 或 $b \geq 2$ 的反面是 $a < 2$ 且 $b < 2$, 利用其反面可得到矛盾的结论, 其正确性就得到了论证.

13. 【考点】实数的大小

【答案】D

【解析】条件(1), $x > 2014 \Rightarrow x \geq 2014$, 充分; 条件(2), $x = 2014 \Rightarrow x \geq 2014$ 也充分.

【点睛】此题属于考试中的简单题目, 在条件充分性判断中一定要注意, 条件的范围可以比题干得到的范围小.

14. 【考点】奇数和偶数组合性质

【答案】D

【解析】条件(1), $m^2 - n^2 = (m+n)(m-n) = (2k+2t)(2k-2t) = 4(k+t)(k-t)$, 充分; 条件(2), $m^2 - n^2 = (m+n)(m-n) = (2k+1+2t+1)(2k+1-2t-1) = 4(k+t+1)(k-t)$, 充分.

【点睛】判断一个表达式是否为 n 的倍数, 一定要将表达式表示成乘积形式, 观察乘积形式的表达式是否含有 n 的所有因子.

15. 【考点】不等式性质

【答案】C

【解析】显然分别不成立. 两个式子可以改写成
$$\begin{cases} x-y \leq 2 & (1), \\ 2y-x \leq 2 & (2). \end{cases}$$

两式相加, 得 $y \leq 4$, (1) 式乘以 2 加 (2) 式, 得 $x \leq 6$, 得到
$$\begin{cases} x \leq 6, \\ y \leq 4. \end{cases}$$

【点睛】本题考查不等式的基本变形性质, 同向不等式可以加法运算. 此外, 需要注意的是, 不等式经过加法运算后, 不再可逆, 也就是两个条件可以推出题干, 但题干不能反推条件.

16. 【考点】实数的概念及不定方程

【答案】C

【解析】因为完全平方数较多, 两个条件明显单独不充分, 联合分析.

设小明的年龄为 m^2 , 20 年后小明年龄是 n^2 , 得到 $n^2 = m^2 + 20$,

整理后得到 $(n+m)(n-m) = 20$, 所以
$$\begin{cases} n+m=10, \\ n-m=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=6, \\ m=4, \end{cases}$$
 故小明的年龄为 16. 选 C.

【点睛】本题考查完全平方数的概念, 根据表达式转化为不定方程来分析讨论.

17. 【考点】余数

【答案】E

【解析】根据被除数 = 除数 \times 商 + 余数, 显然单独条件无法确定 n , 联合假设除以 2 和 3 的余数都是 0, 则 n 是 6 的倍数, 除以 5 的余数不确定.

【点睛】本题主要考查余数的概念及运算关系. 根据被除数 = 除数 \times 商 + 余数来分析讨