考研数学一本通

线性代数分册

分层编写　体系科学　　例题经典　讲解通俗
题型全面　总结到位　　精编练习　巩固提高

王博
主编

基础篇　第一轮使用　全面复习　夯实基础
提高篇　第二轮使用　题型归纳　能力提升

吉林大学出版社
JILIN UNIVERSITY PRESS

考研数学一本通

线性代数分册

王博◎主编

吉林大学出版社
JILIN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

考研数学一本通. 线性代数分册 / 王博主编. 一长春：吉林大学出版社，2019. 6

ISBN 978-7-5692-5050-3

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 ②线性代数—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①O13②O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2019）第130258号

书　　名　考研数学一本通. 线性代数分册
KAOYAN SHUXUE YIBENTONG. XIANXING DAISHU FENCE

作　　者　王　博　主编
策划编辑　田茂生
责任编辑　赵雪君
责任校对　张文涛
装帧设计　中尚图
出版发行　吉林大学出版社
社　　址　长春市人民大街4059号
邮政编码　130021
发行电话　0431-89580028/29/21
网　　址　http://www.jlup.com.cn
电子邮箱　jdcbs@jlu.edu.cn
印　　刷　河北盛世彩捷印刷有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　14.5
字　　数　334千字
版　　次　2019年6月　第1版
印　　次　2019年6月　第1次
书　　号　ISBN 978-7-5692-5050-3
定　　价　49.00元

编委会

主　编　王　博

副主编　王　顺　彭　博

编　委　田　毅　王宏伟　张兴林　周　琛

李思东　董恋杰　王　强

前 言

自1987年以来，研究生入学考试数学统考已进行了30多年。由于考试复习内容多，覆盖面广，需要考生熟练掌握基本概念、基本理论及基本方法，同时，需要考生有较强的逻辑推理能力、综合运用能力，尤其是计算能力。

为满足不同层次考生的复习需求，帮助广大考生更好地备考考研数学，提高考场的应试解题能力，我们打破常规考研资料的编写体系，定位精品辅导教材，努力体现创新的教学理念，根据13年的一线辅导经验，按照最新《考试大纲》的要求编写了《考研数学一本通》系列丛书，本书为《线性代数分册》。

本书的特色如下。

一、适用于不同层次的考生，优化知识体系，体现因材施教、分层教学的特点

本书按考生备考的阶段分为《基础篇》与《提高篇》两部分。《基础篇》供考生第一轮复习使用，尤其适合基础薄弱的考生；《提高篇》供考生第二轮复习使用，在巩固基础的前提下，归纳总结各类题型。

二、注重基础，只有根深才能叶茂

研究生入学考试注重对基本概念、基本理论、基本方法的考查，每年的真题卷种均有60％～70％的基础题，每年都会有相当多的考生因基础知识不扎实导致后续提高乏力。《基础篇》为考试内容的精讲部分，对每个知识点都进行了详细的阐释，并配有简单例题帮助学生消化与吸收，切实地帮助学生夯实基础。

三、题型全面，分析透彻，易于消化掌握

数学试题是无限的，而题型是有限的。掌握好《考试大纲》范围内的各类常考题型的解题思路、方法、技巧，就能以不变应万变，遇到类似题型，做到心中不慌，落笔有神！《提高篇》对考研中常考的题型进行了系统归纳、总结，并辅之以大量典型例题，以朴实的语言进行解说，规避华而不实的偏题、难题、怪题，最大程度地让考生真正掌握《考试大纲》的内容和各类常考题型。

四、合理地配置适量练习，力争将所学知识转化为解题能力

由于考研复习的科目多，知识点繁杂，花在数学上的时间也就不那么充足，做题时间也相当有限，所以，考生必须要有针对性地去做那些能够真正提高考研解题能力的试题，而非盲目地去搞题海战术。本书的《基础篇》与《提高篇》中的每一讲都配备了具有针对性的练习，避免考生陷入“上课能听懂、下课不会做”的尴尬局面。

本书适合考数学一、数学二、数学三的全部考生，对不同卷种考生单独要求的内容均在知识点与题目中进行了标注，未做说明的是为所有卷种考生均要掌握的。考生若认真使用好此书，对一些不熟练的概念和思路方法反复揣摩，必能达到事半功倍的效果。

根据数学学科本身的特点，研究生入学考试的数学复习一定要遵循“早动手、重基础、勤练习、多思考”的原则。对于不懂的概念与问题，一定要反复揣摩、练习，直至弄懂、搞熟。

由于作者水平有限，书中难免有各种不足，敬请广大读者、同行、专家批评、指正，让我们一起努力，为广大考研学子取得高分尽一份绵薄之力！

王　博

2019 年 3 月

使用指导

为提升整个教学辅导的服务品质，增强学生备考的效果，现推出一套教学资料，分享给行业内各位师生，请认真阅读本指导。

一、统一教学模式，科学规划复习

为避免不同教师授课安排不同，让学生无所适从，特统一教学资料、教学进度、教学内容，使学生听课更加系统、全面，力争达到不同老师"无缝对接"的高标准。

二、优化教学安排，课时进度统一

为方便学生听课、补课，特实行模块化教学，但不限制老师，授课老师仍可在编排的框架下进行适当的自由发挥。

第一轮是复习的基础阶段，主要使用本书的《基础篇》，并对应地做每讲的基础习题。基础课程老师应注意控制讲课的难度和深度，关键问题要细化，必考知识点要反复重点强调。授课老师对基础阶段知识点与例题讲解的时间分配应是"五五开"，且在暑假前完成该阶段学习。

第二轮是复习的强化阶段，主要使用本书的《提高篇》，并对应地做每讲的强化突破题。强化课程老师应注意授课的技巧性与方法的实用性，难点问题要深入浅出地进行讲解，对强化阶段知识点与例题讲解的时间应是"三七开"，力争在八月底完成。

总之，要实现考研数学的复习有立竿见影、事半功倍的效果，需授课老师、助教、班主任、学生的多方配合、共同努力。具体安排如下。

基础复习阶段课时安排(4 天 8 次课，计 32 课时)

对应章节	用时(课时)
第一讲　行列式	4
第二讲　矩阵	10
第三讲　向量	6
第四讲　线性方程祖	3
第五讲　特征值　特征向量	6
第六讲　二次型	3

强化提高阶段安排(4 天 8 次,32 课时)

对应章节	用时(课时)
第一讲　行列式	3
第二讲　矩阵	6
第三讲　向量	9
第四讲　线性方程组	6
第五讲　特征值　特征向量	6
第六讲　二次型	2

三、课堂模式标准化,更贴近考生

基础复习阶段课时安排(4 天 8 次课,计 32 课时)

课堂(三小时)	内容	说明	备注
前五分钟	温习上次课内容	为新内容做铺垫	温故知新
中间两个半小时	学习新内容	互动,把握节奏	表达方式
最后十分钟	本次重点总结	概括,浓缩精华	言简意赅
最后两分钟	布置作业	预告下次内容	注意衔接

四、关于复习建议

第一、要重视基础

基础复习阶段务必先吃透教材,搞清基本概念、搞透基本定理、搞熟基本方法、搞定基本公式,然后做有针对性的基础题的训练。有些学生连最基本的概念都未搞清楚,就从所谓的强化提高开始,做一些技巧性偏强的题,这样只会本末倒置。有相当多的基础题看似简单,但它们能帮助学生熟悉和掌握定义、定理和公式,如果把整个习题看成是高楼大厦,则这些基础题就是砖瓦,熟练掌握它们,就可随心所欲地构建高楼。

第二、要重视计算

考研数学是一门非常重视基本运算能力的课程。考场上的时间非常有限,3 小时内要处理 23 道题,如果计算能力不足,时间方面就会出现捉襟见肘的情况。考生只有熟练掌握各种基本运算,才有可能在考场上立于不败之地。为了达到这个效果,我们必须做大量计算题。本书每节精心编写了大量习题,读者务必搞熟、搞懂、搞精,且不可一味追求难题、偏题、怪题。

第三、关于参考书——与其博览群书,不如精读一本

我们经常看到部分考生买了大量复习资料,最后,却没有一本能够从头到尾坚持下来,这样怎么能取得理想的成绩呢！适合自己的就是最好的。找一本适合自己的参考

书，踏踏实实地从头到尾攻克它们，远比你广而不精、走马观花地去阅读大量资料的好。

切记：基础不好，又想拿高分，复习资料越少越好！

本书层次分明，基础、强化分开编写，既适合补基础，也适合强化提高。系统钻研此书，吃透《基础篇》，搞精《提高篇》，一般都能取得好成绩。

第四、关于真题

真题是数学命题组专家们集体智慧的结晶，整体质量普遍高于普通参考书。通过对历年真题类型、特点、思路、方法进行系统的归纳总结，往往会取得事半功倍的效果。往届考生常说“你可以什么资料都没有，但一定不能没有真题”，可见真题的重要性。

强烈建议对真题务必要精、要熟，要做三遍！第一遍可以按照年份来做，尽量从后往前做，精做近 15 年的即可，距离越近的年份的真题价值越大。第二遍，按章节来做，总结到位，即看每一章节这些年主要出了哪些题型、哪些题目，每种题型的处理方式是什么。全部归纳总结出来，形成思维定势。第三遍，主要是查缺补漏。把第一、二遍不熟的习题重新再做一遍。

同时，郑重提醒各位考生：凡《考试大纲》规定的内容，不论是数学几，只要在真题中出现，强烈建议大家去做，远远比你做 30 年来的真题更有效！

总之，数学并不可怕，只要方法得当，练习充分，提高是很快的。所以，各位同学在平时复习的时候一定要充满信心，遇到一些难题，千万不要气馁，只要踏踏实实去复习，经过一段时间的磨炼后，你会越学越勇，最终登上理想的高峰。

但愿本书能为您的考研数学添砖加瓦！

王　博

目　录

基础篇

强化篇

基础篇

笔记

第一讲 行列式

【考试大纲要求】

1. 了解行列式的概念，掌握行列式的性质.
2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

【考试内容精讲】

§1.1 行列式的概念与性质

一、排列与逆序数

1. 排列：由 n 个自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的一个无重复的有序数组 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 称为一个 n 级排列，简称排列，比如 2 3 1 6 4 5 就是 1,2,3,4,5,6 这 6 个元素的一个排列.

【注】 不同的 n 级排列共有 $n!$ 个.

2. 逆序与逆序数：在一个 n 级排列 $j_1\cdots j_n$ 中，若一对数 j_sj_t，大前小后，即 $j_s>j_t$，则 j_sj_t 构成了一个逆序. 一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数，记为 $\tau(j_1\cdots j_n)$. 如 2 3 1 6 4 5 的逆序数为 4，记作 $\tau(231645)=4$，$\tau(123)=0$.

【注】 逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列为奇排列.

【概念理解点拨】

1)排列 $j_1\cdots j_n$ 中，交换任两个数的位置，其余不变，称对排列做了一次对换.

2)对换一次改变排列的奇偶性. 如 $\tau(123)=0$，$\tau(321)=3$.

二、行列式的概念

1. 二阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

2. 三阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

笔记区

3. n 阶行列式的定义：由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的数

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$$

为 n 阶行列式.

【概念理解点拨】

(1)当 $n=1$ 时，定义 $D_1=|a_{11}|=a_{11}$. 注意和绝对值符号的区别.

(2)D_n 是一个数值，是 $n!$ 项的代数和，每项均取自不同行不同列的 n 个元素的乘积，各项正负号在行下标 i 顺排的前提下，由列下标 j 的逆序数决定. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，该项取正号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，该项取负号.

(3)某行元素全为零的行列式其值为零.

(4)自左上角到右下角的元素所在的线称为行列式的主对角线，自右上角到左下角的元素所在的线称为行列式的次对角线或副对角线.

(5)对角线法则：仅适用于二阶和三阶行列式. 四阶及四阶以上行列式无对角线法则.

(6)由行列式的定义易得

1) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{n1}a_{(n-1)2}\cdots a_{1n}.$$

【考点一】 n 阶行列式定义的应用

方法：n 阶行列式是一个数值，是 $n!$ 项的代数和，每项均取自不同行不同列的 n 个元素的乘积，各项正负号在行下标 i 顺排的前提下，由列下标 j 的逆序数决定，即 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$.

【例 1】 设 $f(x)=\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12}-x & a_{13}-x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则 $f(x)$ 至多是 x 的几次多项式?

【详解】 由于行列式中所有 x 均为一次，且 x 均位于第一行，由行列式的定

义"不同行,不同列元素乘积的代数和"知 $f(x)$ 至多是 x 的一次多项式.

【例 2】 设 $f(x)=\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-x \end{vmatrix}$,则 $f(x)$ 中 x^3,x^2 的系数及常数项分别为多少?

【详解】 由行列式的定义"不同行,不同列元素乘积的代数和"知:

x^3 来源于 $(a_{11}-x)(a_{22}-x)(a_{33}-x)(-1)^{\tau(1,2,3)}$,故 x^3 的系数为 -1.

x^2 来源于 $(a_{11}-x)(a_{22}-x)(a_{33}-x)(-1)^{\tau(1,2,3)}$,且其中两项取含 x,另一项取常数,故 x^2 的系数为 $a_{33}+a_{22}+a_{11}$.

常数项即不含 x 的项应为 $f(0)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

三、行列式的性质

性质 1　行列式的行与列(按原顺序)互换(互换后的行列式叫作行列式的转置),其值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 2　行列式的两行(列)对换,行列式的值反号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【注】 行列式中两行(列)对应元素全相等,其值为零.

性质 3　行列式的某行(列)元素都乘 k,则等于行列式的值也乘 k,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【注】 1)行列式中某行(列)有公因子 k,则 k 可提取到行列式外.

2)行列式中两行(列)对应元素成比例,其值为零.

性质 4　如果行列式某行(列)元素皆为两数之和,则其行列式等于两个行列

笔记区

式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【注】 $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ c_1+d_1 & c_2+d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ c_1 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_2 \\ d_1 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}$.

性质 5(三角形法的基础) 在行列式中,把某行(列)各元素分别乘常数 k,再加到另一行(列)的对应元素上,行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【考点二】 行列式性质的简单应用

方法:熟练掌握行列式五条基本性质.

【例 1.3】 设 $A(x_1, y_1)$,$B(x_2, y_2)$是直角平面上两个不同的点,问 $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0$ 是否为过两点的直线方程.

【详解】 y 与 x 在同一行,按行列式定义,只能选一个,故该行列式结果满足 $ax+by+c=0$,故为直线方程. 是否过两点,关键看 $x=x_1$,$y=y_1$ 及 $x=x_2$,$y=y_2$ 是否满足方程,由行列式性质两行对应元素相等行列式值等于 0,知直线过点 $A(x_1, y_1)$,$B(x_2, y_2)$.

【例 4】 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$,求 $\begin{vmatrix} 4a_{11} & 2a_{11}-3a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & 2a_{21}-3a_{22} & a_{23} \\ 4a_{31} & 2a_{31}-3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

【详解】 利用行列式的拆分性质

$$\begin{vmatrix} 4a_{11} & 2a_{11}-3a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & 2a_{21}-3a_{22} & a_{23} \\ 4a_{31} & 2a_{31}-3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4a_{11} & 2a_{11} & a_{13} \\ 4a_{21} & 2a_{21} & a_{23} \\ 4a_{31} & 2a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4a_{11} & -3a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & -3a_{22} & a_{23} \\ 4a_{31} & -3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=4\times(-3)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-12.$$

§1.2 行列式的计算

一、降阶法

1. 引例

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

2. 余子式和代数余子式

1)余子式:n 阶行列式中,去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列全部元素,由剩余的元素按原位置顺序组成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记成 M_{ij}.

2)代数余子式:余子式 M_{ij} 前面乘 $(-1)^{i+j}$,即 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式,记为 A_{ij},即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

【注】 1)余子式和代数余子式都是比原行列式低一阶的行列式,其值只与 a_{ij} 的位置有关,而与 a_{ij} 的大小无关.

如 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$,则 $A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}=6$,$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}=-12.$

$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$,则 $A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}=6$,$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}=-12.$

x 与 4 的余子式与代数余子式是对应相等的,y 与 5 的余子式与代数余子式是对应相等的.

2)M_{ij},A_{ij} 最多差一个符号.

3. 行列式的展开定理

行列式对任一行按下式展开,其值相等,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\quad i=1,2,3,\cdots,n.$$